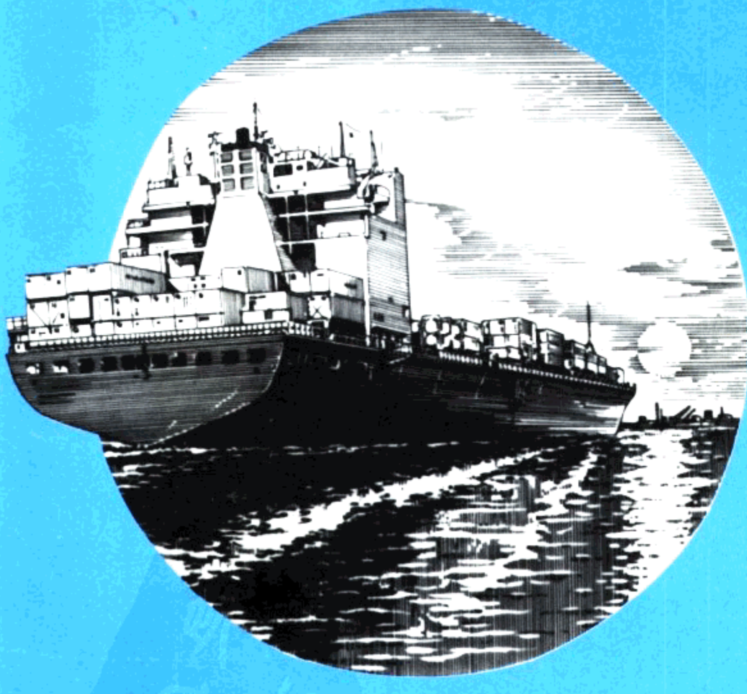
交通航海职业技术教育教材

符合 STCW 公约要求
交通职业技术学校教学指导委员会
航海类学科委员会推荐
交通部科技教育司审定
中华人民共和国海事局认可

航 海 数 学

王人连 主编
戴毓康 主审



大连海事大学出版社

前　言

航海职业教育系列教材是交通部科教司为适应《STCW78/95公约》和我国海事局颁发的《中华人民共和国海船船员适任考试、评估和发证规则》而组织编写的。编审人员是由交通职业技术学校教学指导委员会航海类学科委员会组织遴选的，具有较丰富的教学经验和实践经验。教材编写依据是交通部科教司颁发的“航海职业教育教学计划和教学大纲”（高职教育），也融入了中等职业教育“教学计划和教学大纲”。本系列教材是针对三年高职教育和五年高职教育编写的，对于四年中等职业教育可根据考试大纲在满足操作级的要求上选用，也适用于海船驾驶员和轮机员考证培训和船员自学。

本系列教材包括职能理论和职能实践两个部分，在内容上有严格的分割，但又相互补充。

这套系列教材的特点：

1. 全面体现了《STCW78/95公约》和《中华人民共和国海船船员适任考试、评估和发证规则》中强调的：教育必须遵守知识更新的原则，强调技能，培养能适应现代化船舶管理复合型人才要求的精神。

2. 始终贯穿“职业能力”作为培养目标的主线，根据“驾通合一”、“机电合一”及课程内容不能跨功能块的原则，打破原有学科体系，按功能块的要求对课程内容进行了全面的调整、删减，抓住基本要素重新组合。各课衔接紧凑，避免重复教学，并跟踪了现代科学技术，有较强的科学性和先进性。

3. 编写始终围绕着职业教育的特点，内容以“必需和够用”为原则，紧扣大纲，深广度适中，不但体现了理论和实践的结合，也体现了加强能力教育和强化技能训练的力度。

4. 编写过程中还把品格素质、知识素质、能力素质和身心素质等素质教育的内容交融并贯彻其中，体现了对海员素质及能力培养的力度。

本系列教材在编审过程中尽管对“编写大纲和教材”都经过了集体或专家会审，也得到海事局和航运单位的大力支持，但可能还有不足之处，希望多提宝贵意见，以利再版时修改并进一步完善。

交通职业技术学校教学指导委员会航海类学科委员会

1999.8

编者的话

为了编写一部适合于高等职业航海教育的数学教材，满足培养高等技术应用型人才的需要，解决长期缺少的航海数学教材问题，在交通职业技术学校教学指导委员会航海类学科委员会的组织下，依据交通部颁布的航海数学教学大纲，编写了本教材。

本教材主要内容包括：极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分及一阶微分方程，球面三角学，内插法，误差理论基础等内容。书中配有一定数量的练习题和复习题，供学习者使用，以便掌握自己的学习效果，书末附有习题答案供参考。

本教材在保证必要的系统性、科学性的基础上，力争减少理论论证，注重培养学生的基本运算能力和分析问题、解决问题的能力，重视理论联系实际，强调工具的运用。

本教材的教学时数为 100 学时左右，供招收三年制或初中起点五年制学生的高等职业技术院校使用，也可供参加国家海事局组织的适任证书考试的有关人员参考。

本教材的第一章至第五章由胡旭令编写，第六章至第十二章由王人连编写，全书由王人连统稿，由戴毓康审核。

由于作者水平有限，书中难免有缺点和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1999 年 5 月

目 录

第一章　函数、极限与连续

极限是数学中极其重要的基本概念，它是学习微积分的理论基础.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，建立函数极限的概念，并讨论函数的连续性.

第一节　函数及其特性

一、函数的概念

1.函数的定义

定义　如果对于数集 D 内的每一个实数 x，按照某种对应关系 f，y 都有惟一确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记做 $y=f(x)$. x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 中的一切实数值时与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域.

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$ 都有确定的 y 值与它对应. 因此，常量 $y=C$ 也是函数, 因为对于任一 $x\in D$, y 都有确定的 C 值与它对应，即 $y=C$ 是符合函数定义的.

2.函数的定义域

当我们研究函数时，必须注意函数的定义域. 在解决实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域. 对于用解析式表达的函数,确定其定义域的原则是:使解析式的运算有意义. 一般地有：

(1)　在分式中，分母不能为零；

(2)　在偶次根式中，根号内的式子必须大于等于零；

(3)　在对数式中，真数必须大于零；

(4)　在三角函数和反三角函数中，要符合它们各自的定义域；

(5)　如果函数表达式中含有分式、根式、对数式、三角函数和反三角函数，则应取各部分定义域的交集.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；(3) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解： (1)　因为　$x^2-1\neq 0$, 所以　$x\neq\pm1$;因为　$1-x^2\geq 0$, 所以　$-1\leq x\leq 1$.

所以函数的定义域为(-1，1).

(2)　因为　$\dfrac{x}{x-2}>0$，所以　$x>2$ 或 $x<0$.

所以函数定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(3)　因为　$x^2-4\geq 0$，所以 $x\leq -2$ 或 $x\geq 2$；

又 $-1\le\frac{x}{2}\le 1$， 所以 $-2\le x\le 2$．

所以函数的定义域为{-2,2}.

由(3)可以看出，函数的定义域还可以是点的集合.

同时我们指出，两个函数只有当它们的定义域和对应关系都相同时，这两个函数才是相同的.例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 和 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以这两个函数是相同的.又如，函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 和 $y=1$，虽然它们的对应关系相同，但它们的定义域不相同，所以它们是不同的函数.

3.函数与函数的记号

我们知道，y 是 x 的函数可以记做 $y=f(x)$，但在同一问题中要讨论不同的函数，就得用不同的字母来表示 y 与 x 之间不同的对应关系，如:$y=F(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, …

当 $x=x_0$ $(x_0\in D)$ 时，对应的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，并称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义.

例2 已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$、$f(a+b)$．

解: $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$；$f(0)=\frac{1}{1+0}=1$；$f(-2)=\frac{1}{1+(-2)}=-1$；$f(a+b)=\frac{1}{1+a+b}$.

有时，一个函数的自变量在不同范围内的用不同的式子表示,如:

$$f(x)=\begin{cases}-x, x<0,\\ \sqrt{x}, x\ge 0.\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$；

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$．它的图像如图 1－1 所示.

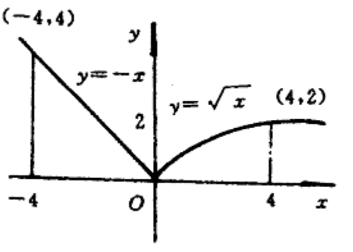


图 1－1

自变量在不同的范围内用不同的式子来表示的函数叫做分段函数.

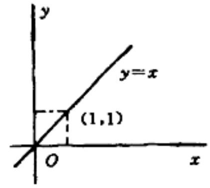
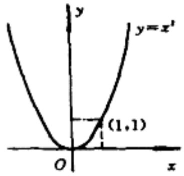
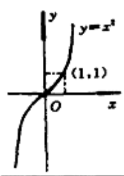
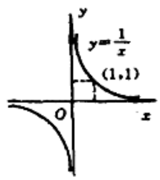
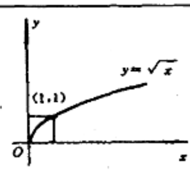
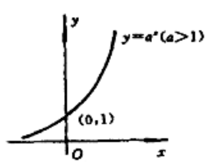
求分段函数时，应注意把自变量的值代入相应取值范围内的表达式进行计算. 如在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f(-4)=-(-4)=4$．

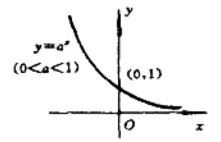
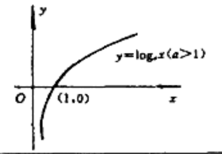
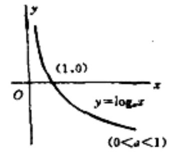
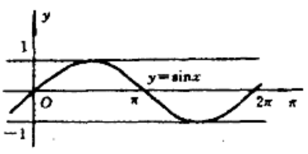
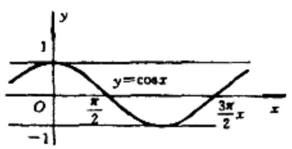
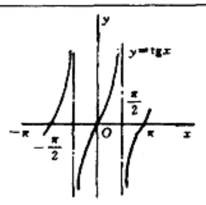
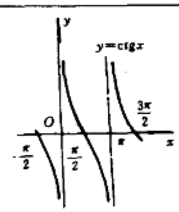
二、基本初等函数

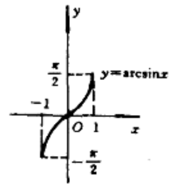
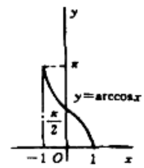
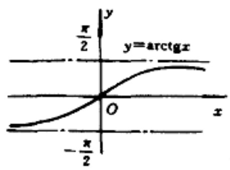
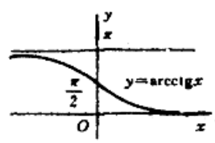
我们把幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数)，指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\ne 1)$，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\ne 1)$，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

现把基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列与表 1 - 1，以便掌握.

表 1-1

函数		定义域、值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数， 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		奇函数， 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数， 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数， 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,=\infty)$ $y\in[0,=\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加

	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数,周期 2π,在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加,在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少
三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数,周期 2π,在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少,在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期 π,在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期 π,在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调增加

<table>
<tr><td rowspan="4">反
三
角
函
数</td><td>$y=\arcsin x$</td><td>$x\in[-1,+1]$
$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$</td><td></td><td>奇函数,
单调增加,
有界</td></tr>
<tr><td>$y=\arccos x$</td><td>$x\in[-1,+1]$
$y\in[0,\pi]$</td><td></td><td>单调减少
有界</td></tr>
<tr><td>$y=\arctan x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$</td><td></td><td>奇函数,
单调增加,
有界</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{arc}\cot x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,\pi)$</td><td></td><td>单调减少
有界</td></tr>
</table>

三、复合函数、初等函数

在实际问题中，常会遇到由几个较简单的函数组合而成的较复杂的函数.

例如，质量为 m 的物体，作初速度为 v_0 的垂直上抛运动，其动能为 $E=\frac{1}{2}mv^2$，即动能 E 是速度 v 的函数，而速度 v 又是时间的函数，如不考虑空气阻力，物体的运动速度 $v=v_0-gt$,其中 g 为重力加速度，于是得动能 E 与时间 t 之间的函数关系式

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

该函数由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 组合而成. 下面引入复合函数的定义.

定义 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，我们就称 y 是 x 的复合函数，记做 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 叫做中间变量.

复合函数 $y=f(\varphi(x))$，是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 组合而成的较复杂的函数，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则复合函数便失去意义.

复合函数也可以由两个及两个以上的简单函数复合而成，例如，$y=\lg u, u=\sin v$, $v=x^2$，则 $y=\lg\sin x^2$，这里u,v是中间变量.

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的，并可用一个解析式表示的函数叫做初等函数．例如，$y=1+\sqrt{x}$，$y=2\sin x$，$y=a^{\sin x}$，$y=\ln(x^2+1)$, $y=\arcsin\sqrt{2x^2}$ 等都是初等函数.

习 题 1－1

1.求下列函数的定义域：

(1) $y=x^4-2x^2+3$；　(2) $y=\ln x^2$；　(3) $y=\sqrt{16-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　(5) $y=\ln\sin x$；　(6) $y=\arccos(x-3)$.

2.已知$f(x)=\ln(x)$,求$f(1)$,$f(\frac{1}{e})$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x+1 & x>0\end{cases}$　求$f(-1),f(0),f(2)$.

4.判断下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 和 $\varphi(x)=2(x+1)$；　(2) $f(x)=\ln x^2$ 和 $\varphi(x)=2\ln x$；　(3)　$f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

5.指出下列各函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{3x-1}$；　(2) $y=3^{\cos x}$；　(3) $y=\cos^2(2x+1)$；　(4) $y=\ln\tan x$；　(5) $y=\arcsin(x^2-1)$.

6.已知 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2+1$,试把 y 表示成为 x 的函数.

7.已知 $y=\lg u$,$u=3^v$,$v=\sin x$,试把 y 表示成为 x 的函数.

8.用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒,试将它的表面积表示为底半径 r 的函数,并求其定义域.

9.一物体作直线运动,已知阻力的大小与物体的运动速度成正比,方向相反,当物体以 4m / s 的速度运动时,阻力为 2N,试建立阻力与速度之间的函数关系.

第二节　极　限

一、数列的极限

我们已学过数列的概念，现在我们来进一步考察当自变量n无限大时，数列$x_n=f(n)$的变化趋势.先看下面两个数列：

(1) $\{\frac{1}{2^n}\}$，具体写出来就是$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots\frac{1}{2^n},\cdots$；

(2) $\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$，具体写出来就是$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots$.

容易看出，随着n的不断增大，数列$\{\frac{1}{2^n}\}$越来越接近0，数列$\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$越来越接近1.上述数列，当$n$无限增大时，数列$x_n$都分别无限接近于一个确定的常数. 一般地，我们给出下面的定义：

定义　如果当n无限增大时数列x_n无限接近于一个确定的常数A，那么A就叫做数列x_n当$n\to\infty$时的极限，记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或当$n\to\infty$时，$x_n\to A$.

于是数列(1)的极限是0，记做$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；数列(2)的极限是1，记做$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例1 求下列各数列的极限：

(1)　$x_n=\frac{1}{n}$；　(2)　$x_n=2-\frac{1}{n^2}$；　(3)　$x_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$；　(4)　$x_n=-5$.

解： (1) $x_n=\frac{1}{n}$，当n依次取1,2,3,…按自然数无限增大时，x_n的各项依次为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$，容易看出当$n$无限增大时，$x_n$无限接近于0，根据数列极限的定义可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2)　$x_n=2-\frac{1}{n^2}$，当n依次取1，2，3，4，…按自然数无限增大时，x_n的各项依次为$2-1$，$2-\frac{1}{4}$，$2-\frac{1}{9}$，$2-\frac{1}{16}$，…，容易看出，当$n\to\infty$时，$x_n\to 2$，由数列极限定义可记做$\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})=2$.

(3)　$x_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$，当n依次取 1，2，3，4，…按自然数无限增大时，x_n的各项顺次

为$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，…，容易看出，当$n \to \infty$时，$x_n \to 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=0$.

(4) $x_n=-5$，显然，当$n \to \infty$时，x_n仍然是-5，记为$\lim\limits_{n\to\infty}(-5)=-5$.

一般地，有下面的结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C\qquad$（$C$为常数）.

应当注意，并不是任何数列都有极限，有些数列就没有极限，如数列$x_n=2^n$，当n无限增大时，它就不接近任何确定的常数，所以，$x_n=2^n$没有极限. 又如，数列$x_n=(-1)^n$，当n无限增大时，x_n在-1 与 1 这两个数之间来回跳动，而不接近任何一个确定的常数，所以，$x_n=(-1)^n$无极限.

对于没有极限的数列，也说它们的极限不存在.

二、函数的极限

讨论过数列$x_n=f(n)$的极限，再来讨论一般函数的极限.

1. 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

观察当$x\to+\infty$时，函数$f(x)=\frac{1}{x}$的变化趋势，从图 1－2 可以看出：当$x\to+\infty$ 时，函数$f(x)$ 的值无限接近于零，它与数列$x_n=\frac{1}{n}$相仿.

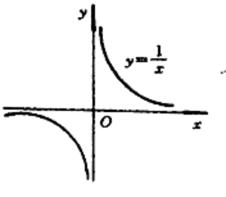


图 1－2

我们再来观察当$x\to-\infty$时，函数$f(x)=\frac{1}{x}$的变化趋势，从图 1－2 可以看出：当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的值也无限接近于零. 下面给出当$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时,函数极限的定义：

定义 如果当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记做$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 当$x\to+\infty$时，$f(x)\to A$.

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记做 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$.

由上述定义：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

有时，要考虑 $|x|\to\infty$ 时的情形，也就是当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 趋于相同的极限. 于是有下面的定义：

定义 如果 $|x|$ 无限增大 $(x\to\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记做 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$.

根据这个定义，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限为零，

即 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

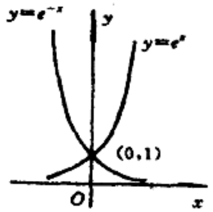


图 1－3

例 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{+x}$.

解： 由图 1－3 可知

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty}e^{+x}=0.$$

例 3 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解： 如图 1－4 所示，有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\text{arc}\cot x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 不是无限接近于一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}\,x$ 不存在.

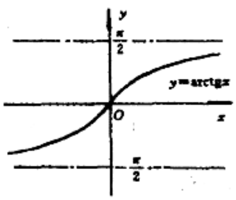


图 1－4

综上所述，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在并相等，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 也存在且等于同一常数；即使 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，但不相等，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 也不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子：

考察当 $x\to2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+2$ 的变化趋势，如图 1－5.

当 x 从左侧无限接近于 2，即 x 取 1.99，1.999，1.9999，$\cdots\to2$ 时，对应的函数 $f(x)$ 从

2.995，2.9995，2.99995，…→3.

当 x 从右侧无限接近于 2，即 x 取 2.01，2.001，2.0001，…→2 时，对应的函数 $f(x)$ 从 3.005，3.0005，3.00005，…→3.

由此可知，当 $x \to 2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+2$ 的值无限接近于 3.

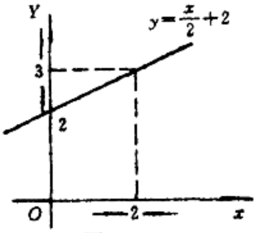


图 1－5

对于这种当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义：

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 左右近旁有定义，如果当 x 无限接近于定值 x_0（但可以 $x \neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一确定的常数 A，那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记做

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to A$.

需注意，上面定义中，我们假定函数 $f(x)$ 在 x_0 左右有定义，并且考虑的是当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，并不要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义.因此，当 $x \to 2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+2$ 的极限是 3，可记为 $\lim\limits_{x \to 2}(\dfrac{x}{2}+2)=3$.

例 4 观察并写出下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x \to 0}\cos x$； (2) $\lim\limits_{x \to -2} x^2$； (3) $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）.

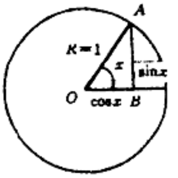


图 1－6

解 (1) 作单位圆如图 1－6 所示，取角 $\angle AOB=x$（单位为弧度），则 $\sin x=AB$，$\cos x=OB$，当 $x \to 0$ 时，AB 无限接近于 0，OB 无限近于 1，所以 $\lim\limits_{x \to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x \to 0}\cos x=1$

(2) $y=x^2$ 的图像是抛物线，如图 1－7 所示，当 $x \to -2$ 时，$x^2 \to 4$，即 $\lim\limits_{x \to -2} x^2=4$.

(3) 因为当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 恒等于 C，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} C=C$.

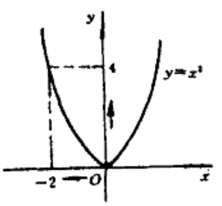


图 1－7

3. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左极限与右极限

在前面讨论的当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限中，x 既可以从 x_0 的左侧无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0 - 0$），又可以从 x_0 的右侧无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0 + 0$）.

定义 如果当 $x \to x_0 - 0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一确定的常数 A，那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记做 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$

如果当 $x \to x_0 + 0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一确定的常数 A，那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记做 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$

由图 1－7 可以看出，函数 $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ 当 $x \to 2$ 时的左极限为

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (\frac{x}{2} + 2) = 3$$

右极限为 $$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (\frac{x}{2} + 2) = 3,$$

即 $$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 3.$$

它们都等于函数 $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ 当 $x \to 2$ 时的极限.

一般地，在 $x \to x_0$ 时，只有当函数 $f(x)$ 的左极限和右极限都存在且相等，即 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 才存在且等于 A.如果 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 都存在，但不相等，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

例 5 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

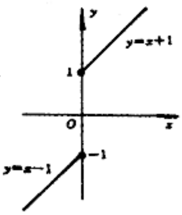


图 1－8

解：作出这个分段函数的图像（图 1－8）.由图可以看出，函数当 $x \to 0$ 时的左极限 $f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0-0} (x-1) = -1$，右极限 $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x+1) = 1$,即当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的左右极限虽然都存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

习题 1-2

1.观察下列数列当 $x \to \infty$ 时的变化趋势,并写出它们的极限:

(1) $x_n = \frac{n+1}{n}$; (2) $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$; (3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$; (4) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

2.观察并写出下面函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x$; (2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$; (3) $\lim\limits_{x \to \infty}(2+\frac{1}{x})$; (4) $\lim\limits_{x \to -1}(\frac{x^2-1}{x+1})$.

3.证明函数:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 1 & x=1 \\ -1 & x>1 \end{cases}$$ 当 $x \to 1$ 时的极限不存在.

第三节　极限的运算

对于一些简单的数列和函数的极限，用观察法即可看出，对于较复杂的数列和函数的极限，就需要极限的运算法则求得.

一、函数极限的运算法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限分别为 A 和 B，即

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，　$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则有:

法则 1　$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$.

法则 2　$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$.

特别地，若 $g(x) = C$（C 为常数），则

$$\lim_{x \to x_0}[Cf(x)] = C \lim_{x \to x_0} f(x) = C \cdot A$$

法则 3　$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$　$(B \neq 0)$.

上述极限运算法则对于 $x \to \infty$ 的情形也是成立的.另外，法则 1 和 2 可以推广到有限个具有极限的函数的情形.