抛物型偏微分方程的反问题

郭宝琦 编著

黑龙江科学技术出版社

抛物型偏微分方程的反问题

郭宝琦　编著

黑龙江科学技术出版社

1988年·哈尔滨

责 任 编 辑：李立群
封 面 设 计：张秉顺

抛物型偏微分方程的反问题

郭宝琦　编著

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
哈尔滨工业大学服务公司印刷厂印刷

787×1092毫米32开本9.25印张　186千字
1988年12月第1版·1988年12月第1次印刷
印数：1—2000册　　定价：3.20元
ISBN 7-5388-0587-7/ N·35

序

微分方程是人类认识自然、改造自然的一种重要工具，也是数学理论联系实际的重要桥梁。如果微分方程的系数、右端项、定解条件和定义域等是未知的，这类问题通常称之为微分方程的反问题。众所周知，微分方程的中心任务是寻求定解问题的解，即寻找满足定解条件（初、边值条件）的微分方程的解。相对于这个问题，微分方程反问题则是由微分方程解的某种泛函来确定上述提到的方程的未知系数、右端项、定解条件和定义域等。

微分方程反问题领域非常广阔，它来源于各种实际问题，属于多学科的应用理论范畴，无论是对理论研究还是实际应用，都具有重要意义。近十年来，由于资源勘探、航天工程、大地物理、大气测量、海洋工程、遥感技术、控制与识别、生物器官性态的分析、遗传工程及量子力学等各个自然科学和工程技术领域相继提出了大量的微分方程反问题，吸引了众多学者涉足这一领域的研究。目前有许多科学家从不同的角度，带着各种不同的新工具进入了这一领域，使得这方面的研究得到迅速发展。由于目前这一领域内容已相当丰富，因此要全面掌握整个反问题领域的研究状况是非常困难的。

本书主要介绍抛物型偏微分方程的反问题。全书共分五章，第一、二章介绍了一维和多维线性抛物型方程中确定未知系数的反问题，第三章讨论了拟线性抛物型方程确定未知系数的反问题，第四章研究了抛物型方程中边界值反问题，第五章介绍了抛物型方程中确定未知源的反问题。本书内容比

较丰富，力求反映这一领域的新成果，并介绍了我们近年来在这方面的一些研究工作。书后列有比较详细的参考文献，可供读者进一步钻研时参考。

本书是笔者在哈尔滨工业大学的讲稿《抛物型方程的反问题》基础上作了进一步的修改与充实编著而成。参加此项工作的还有：（按姓氏笔划为序）刘维国、杨光、杨枫林、陈小宏、程普新。本书在编写过程中还得到了吴从炘教授、刘家琦教授的鼓励和支持，对此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中一定有许多缺点，恳请读者提出宝贵意见。

目　录

第一章　一维抛物型偏微分方程中确定未知系数的反问题

本章主要讨论一维抛物型偏微分方程中确定未知系数的反问题。我们将考虑未知系数分别为常数、依赖于时间变量的函数以及依赖于空间变量的函数等几类反问题，介绍了研究这些问题的主要方法并给出了关于反问题解的存在唯一性和稳定性结果。

§1　确定抛物型方程中未知常数系数的反问题

在抛物型方程中确定未知参量的问题，通常是从超定的边界条件确定单个和多个未知参量。本节我们讨论利用边界上的附加数据确定一维抛物方程中单个参数和两个参数的反问题。

1.1 单个扩散系数的确定

我们今后采用记号

$$u_x(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\ ,\ u_t(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ ,$$

和 $u\in c^2(D)\cap c^1(\overline{D})$ 表示 $u(x,\ t)$ 为闭区域$\overline{D}$内的一阶连续可微、区域D内的二阶连续可微函数。

考虑如下确定正常数k和函数 $u(x,\ t)$ 的反问题，使得 $u\in c^2(D)\cap c^1(\overline{D})$ ，$D=\{(x,t)|0<x<1,\ \ 0<t\leq T\}$，且

$\{k, u(x,t)\}$ 满足：

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0<x<1, \ 0<t<T \ ; \\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1 \ ; \\ u(0,t)=f(t), \ u(1,t)=g(t), & 0\leq t\leq T, \\ \qquad f(0)=g(0)=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

和

$$-\rho c k u_x(0,t_0)=h, \quad 0<t_0\leq T, \tag{1.2}$$

其中 k 是未知的扩散系数，密度 ρ、比热 c、常数 h 均为已知，且 $f(t)$、$g(t)$ 是关于 t 的已知函数。

假设 $f(t)$，$g(t)$ 均为连续函数，则正问题（1.1）的解可以表示成：

$$u(x,t) = -k\int_0^t \frac{\partial M(x,k(t-\tau))}{\partial x} f(\tau)\,d\tau + $$

$$+k\int_0^t \frac{\partial M(x-1,\ k(t-\tau))}{\partial x} g(\tau)\,d\tau。 \tag{1.3}$$

其中

$$M(\xi,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\xi+2n)^2}{4\sigma}\right\}$$

$$\sigma>0 \ 。 \tag{1.4}$$

如果还设 $f(t)$、$g(t)$ 均为连续可微，则在 $0<x<1$，$0<t<T$ 上，对（1.3）应用莱布尼兹定理得到：

$$u_x(x,t) = k\int_0^t \left[\frac{\partial^2 M(x-1,\ k(t-\tau))}{\partial x^2} g(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 M(x,\ k(t-\tau))}{\partial x^2} f(\tau)\right] d\tau \tag{1.5}$$

由于

$$\frac{\partial M(x-\xi, k(t-\tau))}{\partial \tau} = -k\frac{\partial^2 M(x-\xi, k(t-\tau))}{\partial x^2}$$

$$x \neq \xi, \quad t \neq \tau 。 \tag{1.6}$$

所以从（1.5）得到：

$$u_x(x,t) = \int_0^t \left[\frac{\partial M(x, k(t-\tau))}{\partial \tau} f(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial M(x-1, k(t-\tau))}{\partial \tau} g(\tau) \right] d\tau 。 \tag{1.7}$$

注意到 $f(0) = g(0) = 0$ 和

$$\lim_{\tau \to t} M(x-\xi, k(t-\tau)) = 0, \quad x \neq \xi 。 \tag{1.8}$$

则通过分部积分（1.7）右端便有：

$$u_x(x,t) = \int_0^t [M(x-1, k(t-\tau))g'(\tau) -$$

$$- M(x, k(t-\tau))f'(\tau))] d\tau 。 \tag{1.9}$$

我们再应用勒贝格控制收敛定理可得：

$$u_x(0,t) = \lim_{x \to 0} u_x(x,t) \tag{1.10}$$

$$= \int_0^t [M(-1, k(t-\tau))g'(\tau) -$$

$$- M(0, k(t-\tau))f'(\tau)] d\tau 。$$

令 $$G(t,k) = \int_0^t [M(-1, k(t-\tau))g'(\tau) -$$

$$- M(0, k(t-\tau))f'(\tau)] d\tau, \tag{1.11}$$

和

$$F(k) = -\rho c k G(t_0, k) . \tag{1.12}$$

则从条件（1.2）得到关系式：

$$F(k) = h 。 \tag{1.13}$$

因此如果反问题（1.1）、（1.2）有解，则扩散系数 k 必满足（1.13）。

定理 1.1 假设 $f(t)$、$g(t)$ 当 $0\leq t\leq T$ 时均为连续可微，则反问题（1.1）、（1.2）具有唯一解的充要条件是（1.13）仅有唯一正解 k。

证明 必要性，设（1.1）、（1.2）具有唯一解，则由上面分析（1.13）必具有一个正解 k，如果 k 不是（1.13）的唯一解，则存在 $k_1>0$，$k_2>0$，$k_1\neq k_2$，使它们均为（1.13）的解。令

$$u_i(x,t)=k_i\int_0^t\left[\frac{\partial M(x-1,k_i(t-\tau))}{\partial x}g(\tau)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial M(x,k_i(t-\tau))}{\partial x}f(\tau)\right]d\tau\,,$$

$$(i=1,\ 2)\text{。}\tag{1.14}$$

显然函数偶 $\{k_i,\ u_i(x,t)\}$，$(i=1,\ 2)$ 是（1.1）、（1.2）的两个不同解，与题设矛盾。

充分性，设（1.13）有唯一解 $k>0$，则由（1.3）定义的 $u(x,\ t)$ 便是（1.1）的一个解。唯一性由上面论述可推得。

现在我们着手研究函数方程（1.13），可有：

定理 1.2 假设 $f(t)$、$g(t)$ 均为 $0\leq t\leq T$ 上的连续可微函数，且满足 $f(t)\neq 0$，而当 $0\leq t\leq t_0$ 时 $f'(t)\geq 0$，$g'(t)\leq 0$ 且 $h>0$，则方程（1.13）具有唯一解 $k>0$。

证明 因为 $kM(0,k(t_0-\tau))$ 和 $kM(-1,k(t_0-\tau))$ 具有关于 k $(k>0)$ 的连续导函数，经过冗长但比较简单

的计算后，可以证明 $k>0$ 时，$F(k)$ 是连续可微的，且 $F'(k)>0$，因此 $F(k)$ 关于 k 是严格递增函数。为证明 $F(k)=h$ 具有唯一正解，只须证明

$$\lim_{k\to 0} F(k)=0, \text{ 所以 } \lim_{k\to 0}(F(k)-h)<0 \tag{1.15}$$

和

$$\lim_{k\to\infty} F(k)=\infty, \text{ 所以 } \lim_{k\to\infty}(F(k)-h)>0 \text{ 。} \tag{1.16}$$

事实上，由 $x>0$ 时 $e^{-x}<x^{-1}$，则从（1.4）、（1.12）可得：

$$F(k)\leq ck^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

其中 c 为某正数，于是可得（1.15）式成立。

又由于

$$F(k)\geq\left\{\rho c\int_0^{t_0}\frac{f'(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}d\tau\right\}\sqrt{k},$$

由此可以得到（1.16）式成立。

由定理1.1及定理1.2则知反问题（1.1）、（1.2）的解 $\{k,\ u(x,t)\}$ 存在唯一。

1.2 有限长热导体的未知长度的确定

考虑确定正常数 ν 和函数 $u(x,t)$ 的反问题，使函数 $u(x,t)\in c^2(D)\cap c^1(\overline{D}),D=\{(x,t)|0<x<\nu,0<t\leq T\}$，而 $\{\nu,u(x,t)\}$ 满足：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx},\ 0<x<\nu,\ 0<t<T; \\ u(x,0)=0,\ 0\leq x\leq\nu; \\ u(0,t)=f(t),\ u(\nu,t)=g(t),\ 0\leq t\leq T, \end{cases} \tag{1.18}$$

$$f(0)=g(0)=0,$$

和

$$-u_x(0,\ t)=h,\ 0<t_0\leq T\ 。\tag{1.19}$$

其中 ν 是未知常数，待求。h 为已知常数，$f(t)$ 、$g(t)$ 均为 t 的已知函数。

作变量代换 $x=\nu\xi$，$0\leq\xi\leq1$，置 $w(\xi,t)=u(\nu\xi,t)$ ，则由 $w_\xi=\nu u_x$ 得到关于 (1.18) 、(1.19) 的等价形式：

$$\begin{cases} w_t=\dfrac{1}{\nu^2}w_{\xi\xi}\quad, 0<\xi<1,\ 0<t<T; \\ w(\xi,0)=0,\ 0\leq\xi\leq1; \\ w(0,t)=f(t),\ w(1,t)=g(t),\ 0<t\leq T, \\ \qquad f(0)=g(0)=0, \end{cases}\tag{1.20}$$

和

$$-\frac{1}{\nu}w_\xi(0,\ t_0)=h,\ 0<t_0\leq T。\tag{1.21}$$

仿§1.1 的分析，我们也可以得到等价于 (1.20) 、(1.21) 的函数方程：

$$H(\nu)=-\frac{1}{\nu}G(t_0,\ \frac{1}{\nu^2})=h\ 。\tag{1.22}$$

假设 $f(t)$、$g(t)$ 满足定理1.2中的条件，则可以证明 $H(\nu)$ 对 $\nu>0$ 是一个严格递增函数，且有

$$\int_0^{t_0}\frac{f'(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}\,d\tau<H(\nu)<\infty\ 。$$

因此，假若常数$h>\int_0^{t_0}\frac{f'(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}d\tau$，则可得到方程(1.22)具有唯一的正解 ν。

1.3 抛物方程中两个未知常数系数的确定

考虑半无限区域内，确定正常数组 $\{\alpha,\ \beta\}$ 和有界函数

$u(x,t)$ 的反问题，使得 $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D), D=\{(x,\ t)|0<x<\infty,\ 0<t<\infty\}$，满足：

$$\begin{cases} \alpha u_t=\beta u_{xx},\ x>0,\ t>0; \\ u(x,\ 0)=0;\ x\geq 0; \\ u_x(0,\ t)=f(t),\ t\geq 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

和

$$-\alpha u(0,\ t_0)=h_0,\ t_0>0; \tag{1.24}$$

$$u(x_0,\ t_0)=u_0,\ x_0>0,\ t_0>0\ 。 \tag{1.25}$$

如果 α、β 为已知，则问题（1.23）的有界解存在，且可以表示成：

$$u(x,t)=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t E\left(x,\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau, \tag{1.26}$$

其中

$$E(\xi,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\sigma}\right\}\ 。 \tag{1.27}$$

借助于附加条件（1.24）得到：

$$\beta\int_0^{t_0}\frac{f(\tau)}{\sqrt{\pi\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)}}\ d\tau=h_0$$

即 $$\sqrt{\alpha\beta}\int_0^{t_0}\frac{f(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}d\tau=h_0\ 。$$

如果 $f(t)$ 在 $[0,\ t_0]$ 上连续，且为不恒等于 0 的非负函数，则可解出：

$$\alpha\beta=h_0^2\left[\int_0^{t_0}\frac{f(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}d\tau\right]^{-2}=c(t_0,\ h_0,\ f)\ 。 \tag{1.28}$$

这里 c 为常数，仅依赖于 t_0，h_0 和 $f(t)$ 的选择。于是我们建立了α、β之间的关系：

$$\beta = \frac{c}{\alpha}\quad。$$

再利用条件 (1.25) 得：

$$u_0 = -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{t_0} E\left(x_0,\ \frac{\beta}{\alpha}(t_0-\tau)\right)f(\tau)\,d\tau \tag{1.29}$$

令

$$G(k) = -k\int_0^{t_0} E(x_0,\ k(t_0-\tau))f(\tau)\,d\tau,\ k=\frac{\beta}{\alpha}。\tag{1.30}$$

则 (1.29) 可以写成函数方程：

$$u_0 = G(k),\ 或\ u_0 = G\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)。\tag{1.31}$$

下面证明$G(k)$ 为关于$k>0$的单调函数，为此将 (1.27) 代入 (1.30) 中有

$$G(k) = -k\int_0^{t_0}\frac{f(\tau)}{\sqrt{k\pi(t_0-\tau)}}\exp\left\{-\frac{x_0^2}{4k(t_0-\tau)}\right\}d\tau$$

$$= -\sqrt{k}\int_0^{t_0}\frac{f(\tau)}{\sqrt{\pi(t_0-\tau)}}\exp\left\{-\frac{x_0^2}{4k(t_0-\tau)}\right\}d\tau,$$

计算导数得到：

$$G'(k) = -\int_0^{t_0}\left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi(t_0-\tau)}} + \frac{x_0^2}{4\sqrt{[k\pi(t_0-\tau)]^3}}\right]\exp\left\{-\frac{x_0^2}{4k(t_0-\tau)}\right\}f(\tau)\,d\tau。$$

由于积分号下被积函数中，方括号内为非负函数，又 $f(t)$

为〔0，t_0〕上非负连续函数，且不恒为零，因此便得到

$$G'(k)<0, \text{ 当 } k>0 \text{ 时。}$$

由隐函数定理知（1.31）中G存在反函数，用G^{-1}表示，于是有：

$$\frac{\beta}{\alpha}=G^{-1}(u_0)\text{ 。} \tag{1.32}$$

这样，联合（1.28）、（1.32）可得到：

$$\alpha=\sqrt{c(t_0,u_0,f)/G^{-1}(u_0)}$$

$$\beta=\sqrt{c(t_0,u_0,f)G^{-1}(u_0)}$$

综上所述，我们有

定理 1.3 设 t_0，x_0，h_0 为大于0的常数，而 u_0 为小于0的常数，$f(t)$为〔0，∞〕上的有界连续函数，且在〔0，t_0〕上非负不恒等于0，则确定常数组 $\{\alpha, \beta\}$和函数 $u(x, t)$ 的反问题（1.23）～（1.25）的解存在唯一。

§2 确定一维抛物型方程中随时间变化的未知系数反问题

本节我们讨论一维介质中的扩散过程，其介质的物理性质依赖于时间变化。这里主要讨论微分方程 $u_t=a(t)u_{xx}$，其中 $a(t)$ 是未知函数，本节我们将提出几类关于确定函数 $a(t)$ 的反问题，并给出解的存在性、唯一性和稳定性结果。

考虑在一维抛物型方程

$$u_t=a(t)u_{xx} \tag{2.1}$$

中，$a(t)$ 为未知函数，由物理性质总假设它为正的连续函