普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

经济应用数学——线性代数与线性规划学习辅导

齐　毅　主编
熊章绪　姜兴武　副主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

经济应用数学——线性代数与线性规划学习辅导

齐　毅　主　编
熊章绪　姜兴武　副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材(高职高专教育)"经济应用数学——线性代数与线性规划"的配套辅导书。

全书是依据原教材的九章内容:行列式、矩阵、向量、线性方程组、线性方程组的应用、线性规划问题的数学模型及解的性质、单纯形法、对偶线性规划问题、应用 Mathematica 解线性代数与线性规划问题而编写的辅导书。各章由内容小结、学习指导、典型例题、测试题四部分组成,最后又给出了三套综合测试题,并附有参考答案,做到与原教材相辅相成,可同步使用。

通过该书的学习能够使学生尽快掌握每章的基本内容、重点内容,理解难点内容,加深对书中重点知识的理解,从而更好地把握重点内容和容易混淆的概念。通过典型例题的解答使学生掌握数学思维的方法,找出解决不同问题的规律,进一步消化课堂学习的内容。书中给出的测试题和综合测试题是让学生检查自己的学习效果,强化学生能力的训练,达到自我提高的目的。

本书可作为经济、管理类专业高职高专学生的学习辅导书,也可作为"经济应用数学——线性代数与线性规划"的讲授参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学.线性代数与线性规划学习辅导/齐毅主编.—北京:高等教育出版社,2003.7
ISBN 7-04-012410-6

Ⅰ.经… Ⅱ.齐… Ⅲ.①线性代数-高等学校:技术学校-教学参考资料②线性规划-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037508 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	6.25	**印　　次**	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	140 000	**定　　价**	7.40 元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000] 19号),提出了“力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前　言

本书是为了配合“经济应用数学——线性代数与线性规划”的学习而编写的辅导书。它与原教材相辅相成，适合于经济类专业高职高专学生使用，也是一本较为适用的教学参考书和自学参考书。

全书在编写过程中加强了对每章内容的整理归纳，知识系统全面，并分别做了小结，指出了每章的基础知识、重点和难点，对主教材中难以理解的知识加以重点说明和解释，起到画龙点睛的作用，使学生的学习达到事半功倍的效果。为帮助学生学习主教材，我们将章末难题和部分课外题作为典型例题加以详细解答，让学生更好地消化理解主教材中的基本内容。每章的测试题和最后的综合测试题中，我们还适当地选取一些稍有难度的习题给以内容上的补充和加深，以强化学生的思维训练，使学生能够运用所学的知识解决具体问题，为养成良好的逻辑思维习惯打下坚实的基础。

本书由齐毅教授任主编，熊章绪副教授、姜兴武副教授任副主编。第 1、2、3 章及综合测试题由姜兴武编写，第 4、8 章由齐毅编写，第 5、6、7 章由熊章绪编写。全书由齐毅、姜兴武进行结构设计并总纂定稿。

由于时间仓促且编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者和使用本书的老师对书中的缺点和错误给予批评指正。

编　者

2002 年 12 月

策划编辑 蒋 青
责任编辑 胡乃冏
封面设计 杨立新
责任绘图 朱 静
版式设计 陆瑞红
责任校对 刘 莉
责任印制 杨 明

目　录

第一章 行 列 式

一、内 容 小 结

本章主要介绍了 n 阶行列式的概念、性质和计算方法,同时讨论了 n 阶行列式在解 n 元线性方程组中的应用.

1. n 阶行列式定义

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(3) n 阶行列式

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为一个 n 阶行列式.

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式($i,j=1,2,\cdots,n$).

(4) 特殊行列式

① 一阶行列式 $|a| = a$.

② 上、下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

③ 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

2. 行列式的性质

性质(1) 行列式与它的转置行列式相等.

性质(2) 交换行列式的任意两行(列),行列式仅改变符号.

性质(3) 行列式等于任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

性质(4) 行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

性质(5) 把行列式的任意一行(列)的各元素同乘以数 k,等于该行列式乘以数 k.

性质(6) 用常数 k 乘行列式某一行(列)的各元素,然后再加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

推论 若行列式满足下列三个条件之一,则该行列式的值为零.

① 行列式有两行(列)对应元素相同;

② 行列式有两行(列)对应元素成比例;

③ 行列式有一行(列)的元素全为零.

3. 克拉默(Cramer)法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad ①$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组①有惟一解,且解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 分别是以常数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代替 D 中第 1 列,第 2 列,$\cdots$,第 n 列而得到的

n 阶行列式.

用克拉默法则解线性方程组时需要有两个前提条件:

(1) 方程个数与未知量个数相等;

(2) 系数行列式不等零.

当一个线性方程组满足这两个条件时,该方程组的解存在且是惟一的.

二、学 习 指 导

1. 基本要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义;

(2) 掌握 n 阶行列式性质,会计算 n 阶行列式;

(3) 会用克拉默法则求解线性方程组.

2. 重点和难点

重点　行列式的计算

难点　行列式的定义

3. 内容理解

(1) 行列式的计算方法

① 按定义,将行列式按第一行展开;

② 利用性质 3,将行列式按任意一行(列)展开;

③ 利用行列式性质将行列式化为上(下)三角形行列式来计算.

在行列式的计算中,首先,要观察分析行列式各行(列)元素的构造特点,然后利用行列式的性质化简行列式的计算.同时要注意尽量避免分数运算,避免计算错误.

(2) 由克拉默法则所推出的关于齐次线性方程组的推论是“若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式等于零”.不可理解成其逆定理“若齐次线性方程组的系数行列式等于零,则它有非零解”.虽然后一个结论也是成立,但它不是克拉默法则推出的.

三、典 型 例 题

例 1　计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+b & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解(1) $\begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+b & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix} \xlongequal[④\times(-1)+③]{②\times(-1)+①} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & b & b \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[③\times(-1)+④]{①\times(-1)+②}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -b \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} -a & 2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & -b \end{vmatrix}=-a^2\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -b \end{vmatrix}=a^2b^2.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}\xlongequal[\text{第 1 列乘}(-1)\text{加到其余各列}]{}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第 2 列展开}]{}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=(-2)(n-2)!\ =-2[(n-2)!](n\geqslant 2).$$

例 2 证明 $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证明 (Ⅰ) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Ⅱ) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例 3 用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq 0,$$

所以可用克拉默法则求解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&-6\\1&-3&9&2\\0&2&-5&6\\1&4&0&8\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27.$$

因此方程组有惟一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4,x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1,x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$.

四、测 试 题

(A)

1. 填空题(2×5=10 分)

(1) 当 $k=$______时, $\begin{vmatrix}k&3&4\\0&k&1\\-1&k&0\end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&x\\1&1&-1\end{vmatrix}$是关于 x 的一次多项式,则此多项式中一次项的系数是________;

(3) 设 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=d$,则 $\begin{vmatrix}2a_3&2b_3&-c_3\\2a_2&2b_2&-c_2\\2a_1&2b_1&-c_1\end{vmatrix}=$______;

(4) $\begin{vmatrix}\sin x&\cos x\\\cos x&\sin x\end{vmatrix}=$________;

(5) $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=$__________.

2. 选择题(4×5=20 分)

(1) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是(　　　);

A. $k\neq -1$;　　B. $k\neq 3$;　　C. $k\neq -1$ 且 $k\neq 3$;　　D. $k\neq -1$ 或 $k\neq 3$.

(2) 下列 $n(n>2)$阶行列式的值必为零的有(　　　);

A. 行列式主对角线上的元素全为零;

B. 行列式零元素的个数多于 n 个;

C. 三角形行列式主对角线上有一个元素为零;

D. 行列式非零元素的个数小于 n 个.

(3) 若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式 D(　　　);

A. 必为 0;　　B. 必不为零;　　C. 必为 1;　　D. 可取任何值.

(4) 如果 $\begin{cases} 3x+ky-z=0, \\ 4y+z=0, \\ kx-5y-z=0. \end{cases}$ 有非零解,则(　　　);

A. $k=0$;　　B. $k=1$;　　C. $k=-1$;　　D. $k=-3$.

(5) 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1, D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

那么 $D_1=$(　　　).

A. 8;　　B. -12;　　C. 24;　　D. -24.

3. 计算(5×10=50 分)

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(4) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$,求方程 $f(x)=0$ 的根;

(5) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 0; i=0,1,2,\cdots,n).$$

4. 应用题(15 分)

用克拉默法则解线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ 5x_3+2x_4=1, \\ \quad -\ x_2+\ \ 7x_3 \qquad\ =-5, \\ \qquad\quad -\ 2x_3+2x_4=-1. \end{cases}$$

5. 证明(5 分)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

(B)

1. 填空题($2\times5=10$ 分)

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix}$中元素 a_{21} 的余子式 $M_{21}=$____,代数余子式 $A_{21}=$______;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \end{vmatrix}=$______;

(3) 若一个 n 阶行列式中零元素的个数多于 n^2-n 个(位置不考虑),则该行列式的值等于________;

(4) 每行元素之和是零的 n 阶行列式的值等于________;

(5) 三角形行列式的值等于它的____________.

2. 选择题($4\times5=20$ 分)

(1) 设行列式 $|A_1|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,$|A_2|=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$,则(　　　);

A. $|A_2|=-|A_1|$;　B. $|A_2|=0$;　C. $|A_2|$与$|A_1|$无关;　D. $|A_2|=|A_1|$.

(2) 若 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,则 λ_1、λ_2 为(　　　);

A. $\lambda_1=4,\lambda_2=3$;　　B. $\lambda_1=3,\lambda_2=4$;

C. $\lambda_1=5,\lambda_2$ 可为任意实数;　　D. $\lambda_1=3,\lambda_2$ 可为任意实数.

(3) 下列行列式恒等于零的是(　　　);

A. $D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　B. $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

C. $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;　　D. $D_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

(4) 如果$\begin{cases} 3x+ky-z=0 \\ 4y+z=0 \\ kx-5y-z=0 \end{cases}$有非零解,则(　　　);

A. $k=0$;　　B. $k=1$;　　C. $k=-1$;　　D. $k=-3$.

(5) 下列命题中正确的是(　　　).

A. 行列式 D 中若任一行(列)不为零,则 $D\neq0$;

B. 行列式 D 中有一行(列)为零,则 $D=0$;

C. 行列式 $D=0$,则它所有的元素为零;

D. 行列式 D 的每一个元素都不是零,则 $D\neq0$.

3. 计算($5\times10=50$ 分)

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　　(4) 解方程 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$;

(5) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

4. 应用题(15 分)

用克拉默法则解方程组:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$$

5．证明(5 分)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

第二章 矩　　阵

一、内容小结

1. 矩阵的概念

(1) 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表,称为一个 $m\times n$ 矩阵.记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) 行矩阵、列矩阵、零矩阵、n 阶矩阵(方阵).

只有一行的矩阵 $\mathbf{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})_{1\times n}$ 称为行矩阵.

只有一列的矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$ 称为列矩阵.

所有元素都是零的矩阵,称为零矩阵,记作 $\mathbf{0}$.

行数与列数相同的矩阵,称为方阵;行数与列数均为 n 的矩阵称为 n 阶矩阵(或 n 阶方阵).

(3) 几种特殊矩阵

① 对角阵

主对角线以外的元素全为零的 n 阶方阵称为对角矩阵.

② 数量矩阵

主对角线上的元素全为数 a 的对角矩阵称为数量矩阵.

③ 单位矩阵

主对角线上的元素全为 1 的 n 阶数量矩阵称为 n 阶单位矩阵.

④ 三角形矩阵

主对角线下(上)方的元素全为零的 n 阶方阵称为上(下)三角形矩阵.

⑤ 对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 的元素满足条件 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵.

⑥ 分块矩阵

将一个矩阵用纵线和横线分成若干子块,以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.