

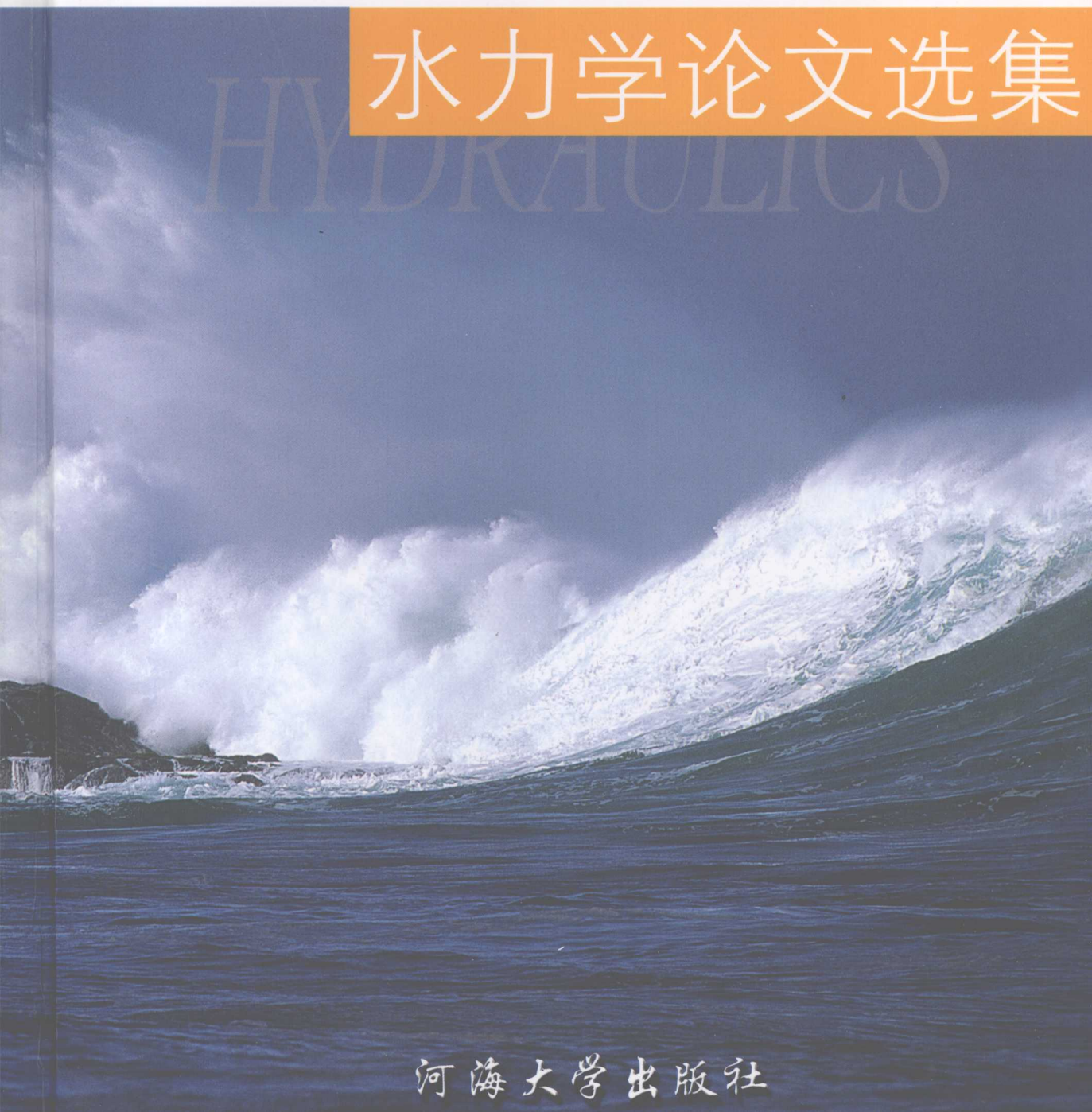
许荫椿 编

HYDRAULICS

张长高教授

水力学论文选集

HYDRAULICS



河海大学出版社

张长高教授水力学论文选集

许荫椿 编

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张长高教授水力学论文选集/许荫椿编. —南京:河海大学出版社, 2007. 3

ISBN 978-7-5630-2348-6

I. 张... II. 许... III. 水力学—文集 IV. TV13-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 026634 号

书 名/张长高教授水力学论文选集

书 号/ISBN 978-7-5630-2348-6/O · 135

责任编辑/吴毅文

封面设计/张世立

出 版/河海大学出版社

地 址/南京市西康路 1 号(邮编:210098)

电 话/(025)83737852(总编室) (025)83722833(发行部)

印 刷/丹阳市教育印刷厂

开 本/787 毫米×1092 毫米 1/16 11.25 印张 290 千字

版 次/2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷

定 价/47.00 元



张长高教授伏案工作

张长高教授简介



张长高教授是国内知名的水力学家，河海大学名教师。1920年出生于浙江镇海县，1940年在重庆参加地下党，从事革命活动。1945年毕业于同济大学土木系，毕业后在同济大学和中央水利实验处（现南京水利科学院）从事教学和科研工作。解放初代表人民政府参加接管交通大学、同济大学、震旦大学的工作。在震旦大学（现复旦大学）时任政治教学组组长、任党支部书记。

1952年奉命筹建华东水利学院（现河海大学），任党支部书记。1956年兼任南京水利实验处（现南京水利科学研究所）水工室副主任。1958年被错划为右派，1959年调安徽水利电力学院任教。1969年下放农村，白天劳动，晚上仍勤奋钻研业务，许多水力学论文初稿，就是在那种艰难岁月中完成的。1976年调合肥工业大学任教。1978年冤案得到改正，同年破格从助教晋升为教授。

1980年华东水利学院请他重新返回学校，他谢绝了一切行政领导工作，一心扑在教学和科研上。1982年国家教委（现教育部）举办暑期水力学教师进修班，全国名教授登台讲课，一致公认张先生讲课效果最好，学识渊博，条理清晰、记忆非凡，得到一片赞扬声。后聘为国家教委工科课程指导委员会委员、水利部水力学课程协作组组长。

1986年离休，他离而不休，更勤奋地工作，为研究生开设紊流力学、边界层理论、渗流理论等新课，先后指导研究生17名。历时近三十年于1993年完成了145万字的专著《水动力学》，由高等教育出版社出版。

1985年至今发表论文36篇，其中科研基金项目“紊流模式及其应用”，1992年经专家鉴定达国际先进水平，1994年获水利部科技进步理论一等奖。

今年张老已87岁高龄，在患肺气肿和双目视力严重下降的情况下，还写出用分数维理论研究圆管紊流糙率和台风的新论文，为紊流力学研究开拓了新的园地。

张先生严谨的治学态度，坦诚的为人，在遭遇坎坷处境下，还不停地笔耕撰写论文等，实属难能可贵；近来还嘱咐子女，他百年以后，遗体献给南京医科大学为教育事业作最后的贡献。他这种高风亮节的精神，高尚的品德，是我们后辈的楷模，堪称一代宗师！

编者

2007年元月

注：张长高教授在本书即将付印之际，不幸于2007年2月15日猝然谢世，深表遗憾。



1979年与国家教委(现教育部)水力学课程指导小组
扩大会代表合影(第2排左起第7人)



1988年与研究生答辩委员合影
(前排右起第2人)



1989年与水利部水力学课程协作组成立大会
全体代表合影(前排左起第6人)



1990年与水利部水力学课程协作组年会合影
于福州大学专家楼前(前排左起第5人)



1999年与水力学教研室全体教师合影(第2排左起第5人)

自序

与我编著的《水动力学》一样,这些论文也是在任林一同志的督促和支持下完成的,遗憾的是她未能看到论文选集的出版。

对河海大学领导支持该论文选集的出版所做的努力,表示衷心的感谢!

张长高

2006年12月17日



* 任林一同志是张长高教授的夫人,已于去年病故。他们是患难与共的夫妻、同志和战友。

序

张长高教授是我的老师,国内知名的水力学家,华东水利学院(现河海大学)创建人之一。本论文集的序言理应由德高望重的前辈来撰写。许荫椿教授几次带口信说张先生要我为他论文集写一序言,我均婉言推辞。岁末,张先生因病住院,我去医院看他,他老人家又亲口说仍希望我写,盛情难却,尊敬不如从命,只得命笔了。

上世纪40年代,张先生就参加地下党从事革命活动,解放后奉命筹建华东水利学院并任党支部书记,1958年被错划为右派,下放农村劳动,受到了不公正的待遇。在此身心都受到严重摧残的极困难条件下,白天劳动,晚上仍挑灯夜读,思考水力学中的问题,数篇论文初稿就是在那时完成的。

1979年张先生冤案得到改正,重新调回华东水利学院,回来后他一心扑在教学和科研上,勤奋工作。1982年国家教委(现教育部)举办全国水力学教师培训班,全国著名水力学教授参与讲课,一致公认张先生讲得最好。我有幸在读研期间,聆听先生讲紊流力学课,深感他学术渊博,记忆力非凡。哪年、哪国、哪位学者有什么成就,史论结合讲课,娓娓动听,从不看讲稿,满黑板的公式随手写出。深奥理论听来并不感枯燥,听他的课简直是一种享受!

从1985年至2006年他在学术会议上宣读和公开发表论文共34篇,其中根据紊流脉动性质,在未作任何假定下导出的一个新的紊流模式,使雷诺方程闭合,在紊流理论上有所突破。这一重要创新成果经专家鉴定达到了国际先进水平,荣获1994年水利部科技进步理论一

等奖。

今年张老先生已 86 岁高龄,双目视力严重下降,借用放大镜写成《用分数维理论研究台风》的论文,提出用圆管紊流阻力平方区模拟海岸线的新论点,开拓了海岸工程与水力学交叉的研究新思路。

本论文集的出版对水力学的发展是一个新的贡献。张先生治学严谨,善于思考,奋于钻研,为人正直,忠诚党的教育事业是我们后辈的楷模!

张长宽

2006.12.26

目 录

1	恒定均匀紊流探讨	1
2	恒定均匀紊流脉动切应力的假设及应用举例	9
3	河边有污水源或污水渠的污水带探讨(平面问题)	16
4	有自由面的铅直平面无旋流动的解法	21
5	脉动流速的分解和脉动应力探讨	30
6	管中紊流新探索	39
7	非圆形断面直管中的恒定紊流	51
8	螺旋流动探讨	61
9	平板紊流边界层探讨	72
10	用流场分析法确定 Chézy 系数 C	83
11	论流函数偶与涡函数偶及其相应的梯度	93
12	论 Chézy 公式和 Chézy 系数	103
13	一个新的紊流模式	112
14	明槽中会有均匀流吗	122
15	用新紊流模式研究圆孔自由紊流射流	125
16	梯形断面明槽中恒定均匀流的流速分布	134
17	紊流模式中的耗散相关和能耗率	141
18	论紊流 Couette 流	149
19	用分数维理论研究圆管糙率	158
20	用分数维理论研究台风	161
21	曼宁公式及其名称的由来	164

1 恒定均匀紊流探讨

摘 要 通过圆管与明槽中恒定均匀紊流的分析,对紊流脉动切应力 $-\rho \overline{u'_y u'_x} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}_x}{dy}$ 中的 ϵ 提出了一个新假设: $\epsilon = u_* H \beta (e^{\kappa \frac{\bar{u}}{u_*}} - 1)$ 。

并且据此得到了圆管与明槽中恒定均匀紊流水力光滑区的流速分布公式。它概括了流速亏值定律与壁面定律,精度较高,毋须分区,计算较简单;由此得到的脉动切应力分布比起 Prandtl 和 kármán 的脉动切应力假设更符合实际;根据这个假设还得到圆管中阻力系数 λ 的计算公式,公式计算值与 1913~1953 这 40 年间共 20 个紊流水力光滑区的 λ 经验公式的计算值比较吻合。通过分析,作者认为轴对称问题和平面问题的沿程阻力系数并不完全一致。

根据 ϵ 的假设,作者也给出了圆管与明槽中恒定均匀紊流非水力光滑区的流速分布公式 $\varphi = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa R_*}{2m} (1 - \eta^2) \right]$, 系数 m 与 κ 要通过实验确定。

恒定均匀紊流基本方程表为:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'_y u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'_z u'_x} \right) = -\gamma J \quad (1)$$

式中: x, y, z ——直角坐标, x 轴落在流动方向;

μ ——粘性系数;

γ ——液体的单位体积重;

J ——水力坡度,即单位流程的水头损失^[1]。

求解偏微分方程(1)还须了解 Reynolds 应力的规律性。这是一个难题,正如作者已经指出^[2],以往学者虽有各种假设,至今还没有公认的定论。本文提出一个新的假设,未必能在这问题上有所推进,不妥之处,欢迎指正。

今有相邻二层液体作恒定均匀紊流如图 1 所示,由于横向脉动流速 u'_y 而使二层液体有质量交换,随着质量的交换便有动量交换,于是在二层液体之间产生脉动切应力 $-\rho \overline{u'_y u'_x}$ 。严格根据统计理论确定脉动切应力 $-\rho \overline{u'_y u'_x}$ 目前还有困难。可以设想,单位

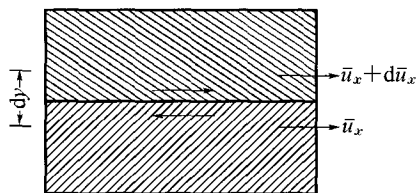


图 1

时间质量交换的时均值 $\frac{dm}{dt}$ 与二层液体的接触面积 dA 成正比,与间距 dy 成反比,并与横向

* 本文发表于华东水利学院学报,1985(1)

脉动强度 $\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}$ 有关, 表为

$$\frac{\overline{dm}}{dt} = f\left(\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}\right) \frac{dA}{dy} \quad (2)$$

于是因质量交换而引起的动量交换的时均值为

$$\frac{\overline{dm}}{dt} \cdot d\bar{u}_x = f\left(\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}\right) \frac{d\bar{u}_x}{dy} \cdot dA \quad (3)$$

由此可得

$$-\rho \overline{u'_y u'_x} = f\left(\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}\right) \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (4)$$

1877 年 Boussinesq T V 提出

$$-\rho \overline{u'_y u'_x} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (5)$$

假设^[3], 若令

$$\rho \epsilon = f\left(\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}\right) \quad (6)$$

则(4)、(5)两式是一致的。

然而(4)式或(5)式还不能直接用来求解偏微分方程(1)。今以圆管中的恒定均匀紊流和明槽中的恒定均匀平面紊流两个特例探讨本问题, 相应地, 基本方程简化为

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{1}{2} \gamma J r \quad (\text{圆管}) \quad (7)$$

和

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} = \gamma J (h - y) \quad (\text{明槽}) \quad (8)$$

式中: h ——水深, 如图 2 所示。

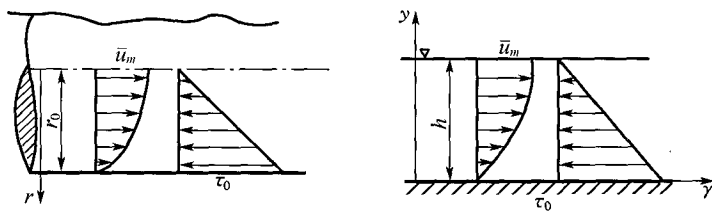


图 2

我们看到, 对于脉动切应力

$$-\rho \overline{u'_y u'_x} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} = f\left(\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}\right) \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9)$$

的合理假设, 至少应使由此得到的流速分布符合实际情形, 例如在管壁或槽底, $\bar{u} = 0$, 在管轴或水面上, $\bar{u} = \bar{u}_m$ 取极大值, 即 $\frac{d\bar{u}}{dr} = 0$ 或 $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$, 并在其它点处 $\frac{d\bar{u}}{dr} < 0$ 或 $\frac{d\bar{u}}{dy} > 0$ 。同时,

对于脉动切应力的合理假设,还应使脉动切应力的分布符合实际情形,例如在图 3 中可以看到,在管壁或槽底, $-\rho \overline{u'u'_x} = 0$ 或 $-\rho \overline{u'y'u'_x} = 0$,在管轴或水面上, $-\rho \overline{u'u'_x} = 0$ 或 $-\rho \overline{u'y'u'_x} = 0$,并且从管轴到管壁,或者从水面到槽底,脉动切应力 $-\rho \overline{u'u'_x}$ 或 $-\rho \overline{u'y'u'_x}$ 应是先从 0 增到某一极大值而后减小到 0。还有,随着 Re 数的增大,脉动切应力 $-\rho \overline{u'u'_x}$ 或 $-\rho \overline{u'y'u'_x}$ 在全部切应力中所占比例也越大,表现

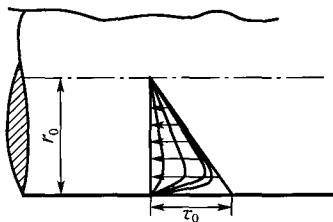


图 3

在 $r = 0$ 处 $\frac{d(-\rho \overline{u'u'_x})}{dr}$ 越趋近于 $\frac{\tau_0}{r_0}$ 。最后,对于脉动切应力的合理假设,还应使由此求得的水头损失:

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (10)$$

与实测结果相符,即沿程阻力系数 λ 与实测结果相符。

式中: l ——流程;

d ——圆管直径;

v ——平均流速;

g ——重力加速度。

由此可见,任何合理的关于脉动切应力的假设,应满足如下三个条件:

- (1) 脉动切应力分布符合实际;
- (2) 流速分布符合实际;
- (3) 沿程阻力系数 λ 符合实际。

正如作者已经指出过^{[1][2]},以往学者的各种假设,未能全部满足这些条件。本文建议采用一个新假设:

$$\epsilon = u_* H \beta (e^{\kappa \frac{y}{H}} - 1) \quad (11)$$

式中: $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ——切应力流速;

H ——特征长度,对于圆管选用半径 r_0 ,对于明槽平面问题用水深 h ;

β, κ ——无量纲系数,对于紊流水力光滑区,可选用

$$\beta = \frac{1}{R_*} \quad R_* = \frac{u_* H}{v} \quad (12)$$

对于紊流非水力光滑区,则 β, κ 还与粗糙度 $\frac{k}{H}$ 有关。

对于圆管中的恒定均匀紊流,由式(7)

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{1}{2} \gamma J r \quad (13)$$

令 $\varphi = \frac{\bar{u}}{u_*}$, $\eta = \frac{r}{r_0}$,采用假设(11)式,可得无量纲方程:

$$\left[\frac{1}{R_*} + \beta(e^{\kappa\varphi} - 1) \right] \frac{d\varphi}{d\eta} = -\eta \quad (13)$$

于是对于紊流水力光滑区,积分可得流速分布公式:

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa R_*}{2} (1 - \eta^2) \right] \quad (14)$$

并有

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{\kappa R_*}{2}}{1 + \frac{\kappa}{2} R_* (1 - \eta^2)} \quad (15)$$

$$2 \frac{\nu}{u_*} = 4 \sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \left(1 + \frac{2}{\kappa R_*} \right) 2\varphi_m - \frac{2}{\kappa} \quad (16)$$

式中: $R_* = \frac{u_* r_0}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = R_e \sqrt{\lambda}$, $R_e = \frac{v d}{\nu}$ 。

选用

$$\kappa = 0.4 \left(1 + \frac{1.433}{\lg R_* - 1.688} \right)^{-1} \quad (17)$$

则由(16)式算出的 λ 值与 1913~1953 这 40 年间共 20 个紊流水力光滑区的 λ 经验公式^[2~10]比较,出入很小特别是与 Nikuradse J 的公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg R_e \sqrt{\lambda} - 0.8 \quad (18)$$

相差在 1% 以内,平均流速 v 的相差也是这样。(16)式还可近似地表为

$$4 \sqrt{\frac{2}{\lambda}} = 5 \ln 2R_* \quad (19)$$

可以看到,作者提出的假设满足上举三个条件。此外,作者的假设还有如下的特点。

1. 由(15)式可得:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{2}{\kappa R_*}}{\frac{2}{\kappa R_*} + (1 - \eta)(1 + \eta)} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{2}{\kappa R_*}}{\frac{2}{\kappa R_*} + \frac{y}{r_0} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)} \quad (20)$$

通常 $\frac{2}{\kappa R_*} \ll 1$, 如果 $\frac{r}{r_0} \ll 1$, 即在管轴附近,则(20)式转化为

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y} \quad (21)$$

这就是紊流核心区的流速亏值定律^[3]。

又由作者的(14)式可得:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa u_* r_0}{2\nu} (1 - \eta)(1 + \eta) \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa u_* r_0}{2\nu} \frac{y}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right] \quad (22)$$

如果 $\frac{y}{r_0} \ll 1$, $\frac{r}{r_0} = \frac{r_0 - y}{r_0} \simeq 1$, 即在管壁附近, 则当 $\frac{\kappa u_* y}{\nu} < 1$, 即 $\frac{u_* y}{\nu} < \frac{1}{\kappa}$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_*} &= \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{\kappa u_* y}{\nu} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa u_* y}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\kappa u_* y}{\nu} \right)^3 + \dots \right] \\ &\simeq \frac{u_* y}{\nu} \end{aligned} \quad (23)$$

这就是管壁附近区的壁面定律^[3]。可见作者的流速分布公式不仅概括了流速亏值定律与壁面定律, 精度较高, 而且毋须分区, 计算也较简单。

2. 由作者的假设(11)式可得:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{-\rho \overline{u' u'_x}}{\tau_0} \right) = 1 - \frac{\left[\frac{1}{R_*} + \beta(e^{\kappa\phi} - 1) \right]^2 + \beta\kappa e^{\kappa\phi} \eta^2}{R_* \left[\frac{1}{R_*} + \beta(e^{\kappa\phi} - 1) \right]} \quad (24)$$

在 $\eta = \frac{r}{r_0} = 0$ 处, 即在管轴上:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{-\rho \overline{u' u'_x}}{\tau_0} \right) = 1 - \frac{1}{1 + R_* \beta(e^{\kappa\phi} - 1)} \quad (25)$$

随着 R_* 增大, 也即 Re 数增大,

$$\left. \frac{d}{dr} (-\rho \overline{u' u'_x}) \right|_{r=0} \rightarrow \frac{\tau_0}{r_0} \quad (26)$$

$\eta = \frac{r}{r_0} = 1$ 处, 即在管壁上:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{-\rho \overline{u' u'_x}}{\tau_0} \right) = -R_*^2 \beta \kappa \quad (27)$$

随着 R_* 增大, 也即 Re 数增大,

$$\left. \frac{d}{dr} (-\rho \overline{u' u'_x}) \right|_{r=r_0} \rightarrow -\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

我们看到, 这样的脉动切应力分布比较符合实际, 若按 Prandtl L 的假设^[3]:

$$\epsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| = \kappa^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (29)$$

或者按照 Kàrmàn Th. V. 假设^[3], 均在管轴处, $y = r_0$ 处:

$$\left. \frac{d}{dy} (-\rho \overline{u' u'_x}) \right|_{y=r_0} = 0 \quad (30)$$

这是不合理的。

由于作者的假设含有双参数 β, κ , 这样, 通过实验确定 β, κ , 除了脉动应力分布比较符

11

恒定均匀紊流探讨

合实际以外,还能使流速分布与沿程阻力系数 λ 与实际符合。

上述对于圆管中恒定均匀紊流水力光滑区的流速分布公式(14)同样适用于明槽中的恒定均匀平面紊流水力光滑区,只是 x 轴落在水面上。若将 x 轴落在槽底,相应地有

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa}{2} R_* (2\eta - \eta^2) \right] \quad (31)$$

式中: $\eta = \frac{y}{h}$, $R_* = \frac{u_* h}{\gamma}$ 。并由 Darcy H 公式,

$$h_w = \lambda \frac{l}{4h} \frac{v^2}{2g} \quad (32)$$

可得

$$\frac{v}{u_*} = 2\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\kappa R_*}} \phi_M - \frac{2}{\kappa} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{\kappa R_*}} \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\kappa R_*}}} \right] \right] \quad (33)$$

比较(16)式和(33)式,可知轴对称问题和平面问题的沿程阻力系数 λ 并不完全一致。

对于紊流非水力光滑区,试令

$$\beta = \frac{m}{R_*}, \quad R_* = \frac{u_* H}{\gamma} \quad (34)$$

式中 m 与粗糙度 $\frac{\kappa}{H}$ 有关,则当 x 轴落在管轴或水面上,可得

$$-\eta = \left[\frac{1}{R_*} + \frac{m}{R_*} (e^{\epsilon^\beta} - 1) \right] \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (35)$$

于是流速分布公式表为

$$\frac{m}{\kappa R_*} [e^{\epsilon^\beta} - 1] + \frac{(1-m)}{R_*} \varphi = \frac{1-\eta^2}{2} \quad (36)$$

上式左边第2项远小于第1项,可以略去不计,于是(36)式还可近似表示为

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{u_*} \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa R_*}{2m} (1 - \eta^2) \right] \quad (37)$$

式中系数 κ , m 可由实验确定,试令

$$m = a \frac{u_* k}{\nu}, \text{ 即 } \beta = a \frac{k}{H} \quad (38)$$

则在管轴或水面附近,可由(37)式得到

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\bar{u}}{u_*} &= \frac{1}{\kappa} \ln \left[1 + \frac{\kappa H}{2a\kappa} \frac{\gamma}{H} \left(2 - \frac{\gamma}{H} \right) \right] \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa \gamma}{2a\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\gamma}{\kappa} + \ln \left(\frac{\kappa}{\gamma} + \frac{K}{2a} \right) \simeq \frac{1}{K} \ln \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{\kappa}{H} + \frac{K}{2a} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

我们看到, Nikuradse J 的紊流阻力平方区的流速分布公式: