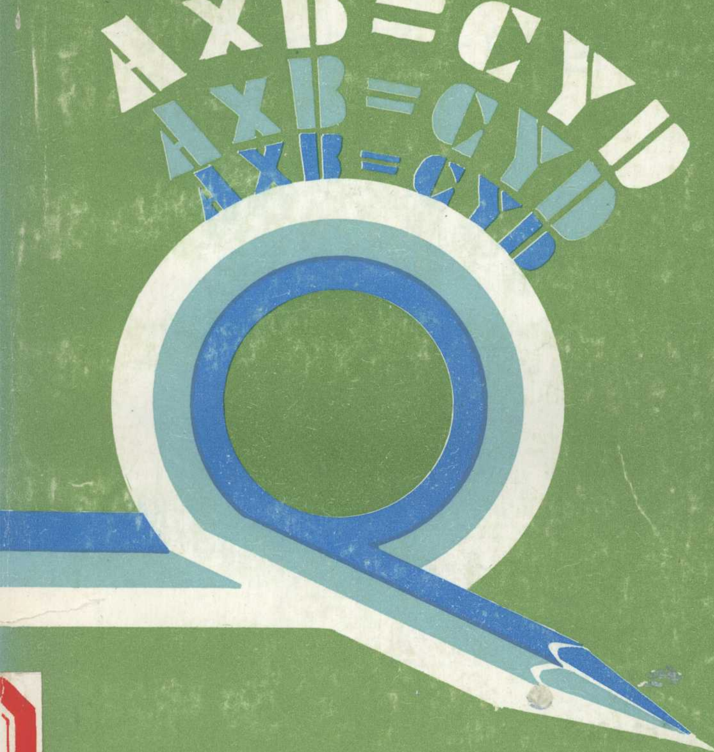
线性代数研究

体与环上的矩阵方程



王卿文 薛有才 著

知识出版社

体与环上的矩阵方程

王卿文
薛有才　著
李师正　主审

内 容 简 介

本书是国内外第一部系统而全面地论述矩阵方程的专著。作者以十几年来体与环上矩阵论的新成果为工具，研究了各类矩阵方程有各种解的充要条件及其通解表达式。

全书共四章。第一章介绍与研究矩阵方程有关的体与环上的线性代数，第二章介绍各类线性矩阵方程，第三章介绍线性矩阵方程组，最后一章介绍非线性矩阵方程.

本书读者对象为攻读代数方向的大学生、研究生、高校有关数学教师及数学工作者。

图书在版编目（CIP）数据

体与环上的矩阵方程/王卿文，薛有才著，—北京：知识出版社，1996．10

ISBN 7—5015—1443—7

Ⅰ．体…　Ⅱ．①王…　②薛…　Ⅲ．矩阵—理论　Ⅳ．O151．21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 17855 号

前　言

在谢邦杰教授开创性工作的基础上，体上的矩阵理论十几年来已有了长足的进展。众所周知，矩阵方程是矩阵论中的重要研究方向之一，但由于体上一般元素乘法的非可换性，给问题的处理带来了相当大的困难，致使复矩阵论中的很多有效的基本方法与技巧难以仿效运用，复矩阵方程的常规解法在体上大都失效。体特别是任意体上矩阵方程方面的研究成果至今仍不多。而矩阵方程的研究除了理论上的重要意义外，还在数学、力学、理论物理、理论电工技术、遥感技术等各种领域中有广泛的应用，同时在国内外文献中，尚未见到系统而全面地论述矩阵方程方面的专著。本书力图弥补数学文献中的这一缺憾，以促进矩阵方程研究发展。

作者从 90 年代初开始研究体与环上的矩阵方程和矩阵方程组，已发表数十篇论文。本书大部分内容是作者研究成果的总结，主要运用近十几年来体上矩阵论的新成果为工具，研究各类矩阵方程和矩阵方程组有各种解的充要条件及其通解表达式。全书共四章，第一章介绍与矩阵方程研究有关的体与环上的线性代数，后三章分别介绍各类矩阵方程，后面还附有百余篇参考文献。

本书系山东省自然科学基金资助项目。

最后，趁本书出版之际，作者还要向我们的老师李师正教授多年来的谆谆教诲、指导、关心和帮助表示衷心的感谢！

限于水平，不当之处诚请读者批评指正。

作　者

1996 年春

符 号 表

符号	意义
$\square$	证毕
F	域
Ω	任意的体
K	具有对合反自同构的体
Q	实四元数体
C	复数域
A'	矩阵 A 的转置
$\overline{A}$	矩阵 A 的共轭
A^*	矩阵 A 的共轭转置(即 $\overline{A}'$)
A^{-1}	矩阵 A 的逆
A^+	矩阵 A 的 Moore—Penrose 广义逆
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹
$\mathrm{rank}A$	矩阵 A 的秩
$\mu(A)$	矩阵 A 的行向量张成的左向量空间
$R(A)$	矩阵 A 的列向量张成的右向量空间
$N(A)$	矩阵 A 的核
$\mathrm{Im}f$	f 的象(值域)
$\mathrm{Ker}f$	f 的核
$\dim V$	向量空间 V 的维数
$F^{m\times n}$	F 上的全体 $m\times n$ 矩阵
$F_r^{m\times n}$	F 上的全体秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵
$GL_n(F)$	F 上的全体 $n\times n$ 可逆阵
$SC_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 自共轭矩阵
$SS_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 反自共轭矩阵

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$SP_n(P_n)$	Q 上的全体 $n\times n$ 亚半正定(正定)矩阵
$SP_n^*(P_n^*)$	Q 上的全体 $n\times n$ 亚半正定(正定)矩阵
A^*	矩阵 A 的次转置共轭矩阵
$H_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 次自共轭矩阵
$S_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 次反自共轭矩阵
$SP_n^{\triangle}(P_n^{\triangle})$	Q 上的全体 $n\times n$ 半正定(正定)次自共轭矩阵
$SP_n^{(*)}(P_n^{(*)})$	Q 上的全体 $n\times n$ 斜亚半正定(正定)矩阵
$A\geqslant O$	$A\in SP_n$
$A\trianglelefteq O$	$A\in SP_n^{\triangle}$
$\|q\|$	实四元数 q 的长度
$\mathrm{Re}[b]$	$b\in Q$ 的实部
A^{-*}	$(A^{-1})^*$
$A^{-(*)}$	$(A^{-1})^{(*)}$
$\det A$	A 的行列式
$T_{ij}(k)$	将一个矩阵的第 i 列(j 行)右(左)乘以 k 加到第 j 列(i 行)上去
$A_{\perp}^{n\times t}$	$\{V\in A^{n\times t}\mid V^*V=I_t\}$
$\mathrm{Ch}R$	环 R 的特征
R_p	含幺交换环 R 在其素理想 P 处的局部化
R/M	环 R 对理想 M 的商环
$M^{\perp}$	M 的正交补
P_L	到 L 上的正交投影算子
$[t]$	实数 t 的整数部分
$A\sim B$	A 与 B 相似
$A\cong B$	A 与 B 等价(同构)
$L(V_n)$	F 上 n 维左(右)向量空间上的全体线性变换

$\Rightarrow$	推出
$\Leftrightarrow$	等价，当且仅当
$f\|s$	f 在 s 上的限制
$\\|A\\|$	矩阵 A 的 Frobenius 范数，实四元数矩阵 A 的范数
$A\otimes B$	A 与 B 的 Kronecer 积，实四元数阵 A 与 B 的弱直积
$\sigma(A)$	矩阵 A 的拉直、矩阵 A 的谱

目　　录

第一章 体与环上的线性代数

域上的线性代数已是一门相当成熟的理论，早已成为数学专业的重要基础课之一．而体与环上的线性代数由于乘法的非交换性所限，五十年代以来进展甚微．自 1978 年谢邦杰先生的论文[1]发表以来，体上的线性代数已有了长足的发展．本章介绍在矩阵方程的研究中有重要理论和实用价值的一些内容，主要包括：体与环上的向量空间及其线性变换、体与环上的矩阵与线性方程组、(次)自共轭矩阵与(斜)亚(半)正定矩阵、环上矩阵的广义逆、体上矩阵的分解、四元数矩阵的范数及四元数矩阵的弱直积、弱圈积与拉直等．

§1 体与环上的向量空间及线性变换

设 R 是一个(结合)环，V 是一个加法交换群，若有从 $V\times R$ 到 V 的一个运算(叫做 V 的元素 μ 与 R 的元素 a 的纯量乘法，其积记为 μa)使得

1) $(\mu+\upsilon)a=\mu a+\upsilon a$;

2) $\mu(a+b)=\mu a+\mu b$;

3) $(\mu a)b=\mu(ab)$;

4) 当 R 有幺元 1 时，有 $\mu 1=\mu$;

则称 V 是 R 上的一个(右)向量空间．

例 任意体 Ω 可视为其任意子体 R 上的一个向量空间．更一般地，任意环恒可视为某子环上的向量空间．

设 V 是环 R 上的一个向量空间．V 的元素称为向量，R 的元素称为纯量；V 的零元素称为零向量，记为 θ，V 中 μ 的负元素 $-\mu$ 称为向量 μ 的负向量．

设 S 为 V 的一个非空子集，若在原有的向量加法与纯量乘法下，S 又是 R 上的一个向量空间，则说 S 是 V 的一个子空间．

以下恒设环 R 有幺元 1，于是与域上向量空间一样易证得下面的结论．

命题 1　V 的一个非空子集 S 为 V 的子空间的充要条件为

1）　若 $\mu,\upsilon\in S$，则 $\mu+\upsilon\in S$；

2）　若 $\mu\in S$，$a\in R$，则 $\mu a\in S$.

命题 2　$L(\mu_1,\cdots,\mu_m)=\{\sum_{i=1}^{m}u_ia_i\,|\,a_i\in R,\mu_i\in V,i=1,\cdots,m\}$ 是向量空间 V 的一个子空间．称为 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 所生成的子空间.

命题 3　V 的若干个子空间 S_i 的交 $S=\bigcap_i S_i$ 仍为 V 的一个子空间，称为交空间.

命题 4　若 $S_i(i=1,\cdots,m)$ 为 V 的子空间，则 V 中所有这样的向量 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i(\mu_i\in S_i,i=1,\cdots,m)$ 构成 V 的一个子空间，称为 S_1，$\cdots$，S_m 的和空间. 记作 $\sum_{i=1}^{m}S_i$.

同域上向量空间一样，可定义环上(右)向量空间的同态、同构映射及向量的(右)线性组合．

如果 V 是由有限个向量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 生成的，则说 V 是 R 上的有限维向量空间；若 V 中每个向量均可唯一地表为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的线性组合，则说向量组 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 V 的一个基，n 为 V 的维数. 并定义零空间$\{\theta\}$的维数为 0.

如在环 R 上，所有的 n 元行向量$(a_1,\cdots,a_n)$构成 R 上的一个 n 维向量空间 $R^{1\times n}$(简记 R^n)；向量组 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$(称之为标准单位向量)就是 R^n 的一个基．R 上任意 n 维空间显然同构于 R^n. 故 R 上任意两个 n 维向量空间同构．

下面恒设环 R 为一体，用 Ω 表示之．

同域上向量空间一样，可以定义 Ω 上向量空间 V 中向量的(右)线性相关性与(右)线性无关性，且可照样证明下面的

命题 5 $\mu_1,\cdots,\mu_m(m>1)$是线性相关的充要条件为其中有一个向量为其余向量的一个线性组合．

命题 6 若 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 线性无关，$\mu_1,\cdots,\mu_m,\alpha$ 线性相关，则 α 必可唯一地表为 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 的一个线性组合．

命题 7 Ω 上任意有限维向量空间 V 恒有一个唯一确定的维数 n，且当 $n\neq 0$ 时，V 中 n 个向量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 构成 V 的一个基的充要条件为它们线性无关；Ω 上两个有限维向量空间同构的充要条件是其维数相等．

命题 8 若 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 Ω 上 n 维向量空间 V 的一个基，则 $\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n$ 也是一个基的充要条件是有 Ω 上 n 阶非奇异阵 A 使

$$(\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n)=(\mu_1,\cdots,\mu_n)A.$$

命题 9 当 $S=\sum_{i=1}^{m}S_i$ 时，下列各命题等价：

1) S 中每个向量 $\upsilon=\sum_{i=1}^{m}\upsilon_i(\upsilon_i\in S_i)$的表法唯一；

2) θ 在 S 中的表法唯一；

3) 诸子空间 S_i 的基合并起来便成 S 的基；

4) 诸 S_i 的维数的和即 S 的维数；

5) $(\sum_{i=1}^{s-1}S_i)\cap S_i=\{\theta\},i=2,\cdots,m$；

6) $(S_{i_1}+\cdots+S_{i_n})\cap(S_{i_{n+1}}+\cdots+S_{i_m})=\{\theta\}$，其中 $i_1,\cdots i_m$，是 $1,2,\cdots,m$ 的任意一个排列，$1\leqslant n<m$.

此时就定义 S 为诸 S_i 的直和，记为 $S=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_m$.

命题 10 对任意子空间 S 恒有子空间 S^* 使 $V=S\oplus S^*$，故 V 中任意一组线性无关的向量均可扩充为 V 的一个基.

（对有限维的 V 是显然的，对无限维的 V 可用 Zorn 引理来证）

下面给出重要的维数公式.

定理 1[2] 对任二有限维子空间 S_1 与 S_2，有

$$\dim(S_1+S_2)=\dim S_1+\dim S_2-\dim(S_1\cap S_2).$$

V 的一个变换 σ 若满足：

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，$\alpha,\beta\in V$；

2) $\sigma(\kappa\alpha)=\sigma(\alpha)\kappa$. $\kappa\in\Omega$，$\alpha\in V$，

则称为 V 上的一个线性变换.

同域上向量空间的情形一样，在定义变换的运算后，照样可证

命题 11 V 上的全体线性变换构成一个有幺元（恒等变换）的环（称为 V 的线性变换环）；其中所有可逆线性变换又构成一个乘法群（叫做 V 的可逆线性变换群）.

定理 2 Ω 上 n 维向量空间 V 的线性变换环反同构于 Ω 上 n 阶全阵环；V 的可逆线性变换群反同构于 Ω 上 n 阶完全线性群.

定理 3 Ω 上 n 维向量空间 V 的一个固定线性变换在不同基下对应的矩阵是彼此相似的.

定理 4[4] 如果 $f:V\to V'$ 是 Ω 上向量空间之间的线性映射，则存在 V 的一组基 X，使得 $X\cap\mathrm{Ker}f$ 是 $\mathrm{Ker}f$ 的一个基，并且

$$\{f(x)\mid f(x)\neq 0,x\in X\}$$

是 $\mathrm{Im}f$ 的一组基. 特别地，

$$\dim V=\dim(\mathrm{Ker}f)+\dim(\mathrm{Im}f).$$

以上事实与域上向量空间基本相同，但应注意由于环与体上的乘法未必可交换，故在定义向量空间时有左与右之分，即对称地还可定义环与体上的左向量空间，纯量就应置于向量之左而进行

纯量乘法．

环 R 上的左(右)向量空间又常称为 R 左(右)模，它是研究环的结构理论与表示理论的一个基本工具，在同调代数中也如此．

下面引入广义酉空间的概念．

本书恒令 Q 是一个实四元数体．对于 $c\in Q$，$\bar{c}$ 表示 c 的共轭四元数．显然，对于 $p,q\in Q$，有 $\overline{pq}=\bar{p}\bar{q}$，$\overline{p+q}=\bar{p}+\bar{q}$.

定义 1 设 V 是 Q 上的一个右向量空间．若对 V 中的任二向量 u,v 恒有 Q 中唯一的四元数与之对应，称为 u 与 v 的内积，记为 $\langle u,v\rangle$，如果

(1) $\langle u_1a+u_2b,v\rangle=\bar{a}\langle u_1,v\rangle+\bar{b}\langle u_2,v\rangle$;

(2) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$;

(3) $\langle u,u\rangle\geqslant 0$，当且仅当 $u=\theta$ 时等号成立；

其中 $u,v,u_1,u_2\in V,a,b\in Q$.

带有内积的 V 称为一个广义酉空间．

例 在 Q 上所有 $m\times n$ 矩阵构成的右向量空间 $Q^{m\times n}$ 中，规定内积

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}A^{*}B, \tag{1}$$

易检知，$Q^{m\times n}$ 关于(1)构成一个广义酉定间．

定义 2 Q 是一个广义酉空间，$u\in Q$，称非负实数 $\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$ 为向量 u 的范数，记为 $\|u\|$.

易证得下面的命题

命题 12 在广义酉空间中，有以下关系式：

(1) $\langle ua,vb\rangle=\bar{a}\langle u,v\rangle b$;

(2) $\langle u,v_1a+v_2b\rangle=\langle u,v_1\rangle a+\langle u,v_2\rangle b$;

(3) $\left(\sum_{i=1}^{m}u_ia_i,\sum_{j=1}^{n}v_ib_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_i\langle u_i,v_j\rangle b_j$.

命题 13 $\|ua\|=|a|\,\|u\|$.

命题 14 $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle$.

命题 15　对于广义酉空间 V 中任二向量 u,v 恒有

$$|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\ \|v\|,$$

等号成立当且仅当 u,v 右线性相关.

命题 16　$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$.

§2　体与环上的矩阵与线性方程组

本节研究体、主理想环(未必交换)、单 Artinian 环中矩阵的秩,含幺环上矩阵的初等变换,体、主理想环、单 Artinian 环上矩阵的等价标准形及体上线性方程组可解的充要条件.

定义 1　含幺环 R 上一个 $m\times n$ 矩阵 A 的行空间(或列空间)是由 A 的诸行(或诸列,分别视为 R^n 与 R^m 中的元素)所生成的自由左(或右)模 R^n(或 R^m)的子模. 如果 R 是体,则 A 的行空间(或列空间)的维数称为 A 的行(或列)秩.

可以证明,若 $A\in\Omega^{m\times n}$,则 A 的行秩等于 A 的列秩.

定义 2　$A\in\Omega^{m\times n}$,称 A 的行秩为 A 的秩,记为 $\mathrm{rank}A$.

定义 3　设 R 为含幺环,$A,B\in R^{n\times n}$ 称为相似的,若有 $P\in GL_n(R)$ 使 $B=PAP^{-1}$,记为 $A\sim B$. $C,D\in R^{n\times m}$ 称为等价的,记为 $C\cong D$,如果存在 $P,T\in GL_n(R)$ 使 $D=PCT$.

等价和相似均是等价关系.

定义 4　设 A 是含幺环 R 上的矩阵. 下列诸项均叫作 A 上的初等行变换:

(1)　交换 A 的两行;

(2)　将 A 的一行左乘以单位 $c\in R$;

(3)　对于 $r\in R$,$i\neq j$,将第 j 行左乘以 r 加到第 i 行上.

类似地可定义 A 上的初等列变换((2)与(3)中的左乘均改成右乘).

将单位矩阵 I_n 恰好进行一次初等行(或列)变换所得的矩阵

叫作 $n\times n$ 的初等矩阵．

定理 1[2]　设 A 是含幺环 R 上的 $n\times m$ 矩阵．E_n(或 E_m)是 I_n(或 I_m)上进行初等行(或列)变换 T 而得到的初等矩阵，则 E_nA(或 AE_m)是 A 上作用 T 而得到的矩阵．

由此，含幺环 R 上的初等阵均可逆，且其逆也是初等阵．

定理 2[2]　关于体 Ω 上 $n\times n$ 矩阵 A 的以下诸条件是彼此等价的．

(1)　$\mathrm{rank}A=n$；

(2)　A 等价于单位阵 I_n；

(3)　$A\in GL_n(\Omega)$；

(4)　A 是一些初等阵的乘积．

定理 3[4]　$A\in\Omega^{m\times n}$，则 $\mathrm{rank}A=r$ 的充要条件为有 $P\in GL_m(\Omega)$和 $T\in GL_n(\Omega)$，使

$$PAT=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

定理 4[2]　设 R 是一个主理想环，$A\in R_r^{m\times n}$，$r>0$，则 A 等价于标准形

$$\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0),$$

其中 $d_i\neq 0,i=1,\cdots,r,d_i\mid d_j,1\leqslant i<j\leqslant r$.

注　若 R 是欧氏环，则上述的 A 可通过一些初等行变换或初等列变换化为标准形.

定理 5[2]　单 Artinian 环同构于某一个体上的 $n\times n$ 全阵环.

定理 6[3]　R 为单 Artinian 环，$A\in R^{m\times n}$，则 A 等价于

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,e,0,\cdots,0)$$

其中 $e^2=e$.

下面引入含幺结合环上的矩阵广义{1}逆．

定义 5　设 R 是一个含幺结合环，$A\in R^{m\times n}$，若有 $X\in R^{n\times m}$，使 $AXA=A$，则称 X 为 A 的广义{1}逆，记为 $A^{(1)}$.

定理 7　设 R 是一个含幺结合环，$A\in R^{m\times n}$，且

$$A=P\mathrm{diag}(D,O)T,D^2=D,$$

P,T 可逆，则 $A^{(1)}$ 一定存在.

由定理 7 立知，体及单 Artinian 环上的矩阵均存在广义{1}逆.

下面给出体上矩阵秩的一些等式与不等式.

定理 8[1]　设 P 和 T 是 Ω 上的可逆阵，对 Ω 上的任意矩阵 A，只要可乘，就有

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}PA=\mathrm{rank}AQ=\mathrm{rank}PAQ.$$

定理 9[1]　（Sylvester **定律**）　$A\in\Omega^{m\times n},B\in\Omega^{n\times s}$，则

$$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B-n\leqslant\mathrm{rank}AB\leqslant\min\{\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}B\}.$$

定理 10[1]　对于 Ω 上的矩阵，A,B,C，只要可乘，就有

$$\mathrm{rank}ABC\geqslant\mathrm{rank}AB+\mathrm{rank}BC-\mathrm{rank}B.$$

以下恒令 $\mu(A)$ 与 $R(A)$ 分别是 Ω 上的矩阵 A 的行向量与列向量张成的左向量空间与右向量空间.

引理 1　设 $A\in\Omega^{m\times n},B\in\Omega^{m\times t},C\in\Omega^{s\times n}$，则

$$R(A)\cap R(I-AA^{(1)})B)=\{\theta\};\tag{1}$$

$$\mu(A)\cap\mu(C(I-A^{(1)}A))=\{\theta\}.\tag{2}$$

证明　设 $\alpha\in R(A)\cap R((I-AA^{(1)})B)$，则有向量 x_1 与 x_2 使得

$$\alpha=Ax_1=(I-AA^{(1)})Bx_2.$$

因 $I-AA^{(1)}$ 是幂等阵，故

$$\begin{aligned}(I-AA^{(1)})\alpha&=(I-AA^{(1)})Ax_1=(I-AA^{(1)})^2Bx_2\\&=(I-AA^{(1)})Bx_2=\alpha.\end{aligned}$$

由 $AA^{(1)}A=A$ 得

$$(I-AA^{(1)})Ax_1=\theta,$$

故 $\alpha=\theta$.

同理可证(2).

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com