高职高专数学系列教材

线性代数

主编 谭坚 邓国栋

中南大学出版社

高职高专数学系列教材

线性代数

主编 谭 坚 邓国栋
编者 李占光 陈先觉
陈 珊 李宏平
主审 肖果能

中南大学出版社

线性代数

主　编　谭　坚　邓国栋

□责任编辑　谢贵良
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8710482
电子邮件:csucbs @ public. cs. hn. cn
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　长沙理工大印刷厂

□开　　本　730×960　1/16　□印张　13.25　□字数　239 千字
□版　　次　2004 年 5 月第 1 版　□2004 年 5 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 7-81061-849-0/O·050
□定　　价　16.00 元

前 言

教育的发展需要教材的支撑，高等职业技术教育也是如此。由于历史的原因，高职高专层次的教育发展时间短、专业分布广，不同专业对数学知识的要求差异较大。虽然许多学校和数学教师在教材建设方面作出了不少的努力，编写的许多教材也各有特色，但在教材体系上多受传统本科数学教材的影响，因此还缺乏一套比较成熟的适合高职、高专层次的数学教材。

本教材是由中南大学出版社组织编写的“高职、高专数学系列教材”中的一种。在编写过程中，编者紧扣部颁“高职、高专线性代数课程基本要求”，突破传统教材的局限，在取材和体系上大胆创新，努力做到：

1. 在内容安排上，线索分明，层次清楚；

2. 各章、节主题突出，条理清晰，结论明确；

3. 全书理论严谨，自成体系，几乎所有定理都给出证明（较复杂的证明用“*”号标明，供教师和有兴趣的学生参阅），使教材充分体现线性代数学科的理论框架和思想实质，使学生掌握系统的而不是零散的知识；

4. 注意概念、理论的实际背景，例题丰富，并有足够的练习题和习题；

5. 条目清晰，安排恰当，便于课堂教学。

编者深深地感到抓住根本，从体系上完善一本教材决非易事，我们遇到过不少的困难，也克服了不少困难。但从全局看，从长远看，这是一项必须要做的工作，编者愿意为此尽力！谨呈献这本教材于广大师生，尽管许多地方仍不尽人意，但愿她在大家的关心下，在使用的过程中不断地得以完善。

编者感谢中南大学出版社的支持。谢贵良博士审阅全书，谢谢他为本书所作的耐心细致的编辑工作，他的指导和宝贵意见使本书增色。

谭　坚　邓国栋

2004 年 3 月

目　录

第一章　行列式 ……………………………………………………… (1)
§1.1　二元一次方程组与二阶行列式 ………………………………… (1)
练习 1.1 ……………………………………………………………… (5)
§1.2　三阶行列式与三元一次方程组 ………………………………… (6)
练习 1.2 ……………………………………………………………… (16)
§1.3　n 阶行列式 …………………………………………………… (17)
习题 1.3 ……………………………………………………………… (27)
§1.4　克莱姆法则 ……………………………………………………… (28)
习题 1.4 ……………………………………………………………… (32)
习题一 ………………………………………………………………… (32)
第二章　向　量 ……………………………………………………… (35)
§2.1　向量及其运算 …………………………………………………… (35)
练习 2.1 ……………………………………………………………… (39)
§2.2　向量组的线性相关及线性无关 ………………………………… (39)
练习 2.2 ……………………………………………………………… (45)
§2.3　极大无关组　向量组的秩 ……………………………………… (46)
练习 2.3 ……………………………………………………………… (50)
§2.4　向量的内积与正交性 …………………………………………… (50)
练习 2.4 ……………………………………………………………… (59)
习题二 ………………………………………………………………… (59)
第三章　矩　阵 ……………………………………………………… (61)
§3.1　矩阵的意义和运算 ……………………………………………… (61)
练习 3.1 ……………………………………………………………… (71)

§3.2 逆矩阵与转置矩阵 …… (72)
练习 3.2 …… (78)
§3.3 分块矩阵 …… (79)
练习 3.3 …… (85)
§3.4 矩阵的初等变换 …… (86)
练习 3.4 …… (91)
§3.5 矩阵的秩 …… (91)
练习 3.5 …… (99)
§3.6 矩阵的初等变换的应用 …… (99)
练习 3.6 …… (105)
习题三 …… (106)
第四章 线性方程组 …… (108)
§4.1 线性方程组的基本概念 …… (108)
练习 4.1 …… (113)
§4.2 齐次线性方程组 …… (114)
练习 4.2 …… (122)
§4.3 非齐次线性方程组 …… (123)
练习 4.3 …… (127)
§4.4 高斯消去法 …… (128)
习题 4.4 …… (134)
习题四 …… (134)
第五章 特征值与特征向量 …… (137)
§5.1 变量的线性变换及其矩阵 …… (137)
练习 5.1 …… (143)
§5.2 矩阵的特征值与特征向量 …… (143)
练习 5.2 …… (148)
§5.3 相似矩阵与矩阵的相似对角化 …… (149)
练习 5.3 …… (157)
§5.4 实对称矩阵的相似对角化 …… (158)
练习 5.4 …… (163)

练习五 …………………………………………………………………… (164)

*第六章　二次型 …………………………………………………………… (166)

§6.1　二次型及其矩阵表示 ……………………………………………… (166)
练习 6.1 ……………………………………………………………… (169)
§6.2　化二次型为标准型 ………………………………………………… (171)
练习 6.2 ……………………………………………………………… (178)
§6.3　二次型的分类 ……………………………………………………… (179)
练习 6.3 ……………………………………………………………… (187)
习题六 ………………………………………………………………… (188)

习题参考答案 ………………………………………………………… (189)

第一章 行列式

行列式是一种重要的数学工具,不但在数学的各个分支中,而且在其他学科中都有广泛的应用,特别是在线性代数中,它是一个不可缺少的工具. 本章在复习二元、三元线性方程组的基础上,引出二阶、三阶行列式,进一步学习 n 阶行列式的定义,并讨论行列式的性质和计算方法,给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

§1.1 二元一次方程组与二阶行列式

中学阶段我们学习过求解二元一次方程组的各种方法,但没有建立一般的二元一次方程组的求解公式. 这种求解公式可以通过二阶行列式来表示,这就是本节将要讨论的问题.

1. 二元一次方程组的求解公式

二元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.1.2) \end{cases}$$

解这个方程组:

$(1.1.1) \times a_{22} - (1.1.2) \times a_{12}$,得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

$(1.1.2) \times a_{11} - (1.1.1) \times a_{21}$,得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

(1.1.3)式是一般二元一次方程组的求解公式.

例1.1.1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$$

解 方程组中未知数的系数和常数项分别为:

$$a_{11} = 2, a_{12} = 1$$

$$a_{21}=1, a_{22}=-3, b_1=5, b_2=-1$$

经计算得

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=2\times(-3)-1\times1=-7\neq0$$
$$a_{22}b_1-a_{12}b_2=(-3)\times5-1\times(-1)=-14$$
$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=2\times(-1)-1\times5=-7$$

代入求解公式(1.1.3)，得方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-14}{-7}=2 \\ x_2=\dfrac{-7}{-7}=1 \end{cases}$$

2. 二阶行列式

考察二元一次方程组的求解公式，可以看出方程组的解由方程组中未知数的系数及常数项决定，其中 x_1, x_2 的分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组中的系数组成的表达式. 若把这些系数排列成一个表的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

则 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是这个表从左上到右下的对角线上两元素之积减去从右上到左下的对角线上的两元素之积的差. 今后我们就用这个数表来表示这个差，并称之为二阶行列式.

定义 1.1.1 称数表

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

是一个**二阶行列式**，它表示数值 $(ad-bc)$，即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{1.1.5}$$

在二阶行列式(1.1.4)中，称数 a,b,c,d 是行列式的元素，在同一横线上的两个数组成行列式的一行，第一行是 (a,b)，第二行是 (c,d)；在同一竖线上的两个数组成行列式的一列，第一列是 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，第二列是 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$，整个行列式表示一个数 $ad-bc$，称为行列式的值. 求二阶行列式的值称为二阶行列式的展开. 展开的方法是分别求出行列式两条对角线上的元素之积然后作差. 我们用下面的图解表示：

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ - \quad\quad + \end{array}$$

例 1.1.2 求下列二阶行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -b \\ b & \sqrt{a} \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-7)\times 3 - 4\times(-5) = -1$

(2) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -b \\ b & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a}\times\sqrt{a} - (-b)\times b = a + b^2$

3. 二元一次方程组的解的行列式表示

利用二阶行列式可以将二元一次方程组的求解公式(1.1.3)表示成既简洁又便于记忆的形式.

首先,(1.1.3)中未知数 x_1,x_2 的值的分母均可用二阶行列式表示为

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}$$

其次,易见 x_1,x_2 的值的分子也可以用二阶行列式表示为

$$\Delta_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.7}$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{1.1.8}$$

于是,当 $\Delta\neq 0$,时方程组的解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

其中 Δ_1,Δ_2 如(1.1.7),(1.1.8)所示,它是以常数列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 分别代替 Δ 中的第 1 列及第 2 列所得出的行列式.

例 1.1.3 用行列式解下列二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

解 方程组中未知数的系数和常数项分别为: $a_{11}=3, a_{12}=-1, a_{21}=1, a_{22}=1, b_1=4, b_2=1$. 由方程组的求解公式可得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - (-1)\times 1 = 4 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\times 1 - (-1)\times 1 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - 4\times 1 = -1$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{4},\ \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{4} \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

4. 二阶行列式的性质

(1)行列式的转置

将行列式的行和列互换,即将行列式的第 1 行作为第 1 列,第 2 行作为第 2 列(这时行列式的第 1 列变为第 1 行,第 2 列变为第 2 行),这个过程称为行列式的转置,所得的行列式称为行列式的转置行列式,行列式 Δ 的转置行列式记为 Δ^{T},即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{1.1.9}$$

$$\Delta^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \tag{1.1.10}$$

由定义可知:

(ⅰ)求一个行列式的转置行列式,只需将行列式的元素沿主对角线(指行列式从左上到右下的对角线)翻转(即交换元素 b 与 c).

(ⅱ)将转置行列式再转置,即得到原来的行列式:

$$(\Delta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \Delta$$

定理 1.1.1 一个二阶行列式与它的转置行列式有相同的值.

证明 设 Δ 与 Δ^{T} 如(1.1.9),(1.1.10)所示,则

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\Delta^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

于是得到

$$\Delta = \Delta^{\mathrm{T}}$$

由此定理可知:二阶行列式的行与列互换时,不改变行列式的值,因而在二阶行列式中,行与列处于完全对等的地位,故在讨论二阶行列式的性质时,对行成立的性质对列也自然成立.

(2)二阶行列式的性质

(ⅰ)当行列式中有一行(列)元素全为零时,行列式的值为零;

(ⅱ)当行列式的两行(列)对应元素成比例(特别当行列式的两行(列)相同)时,行列式的值为零;

(ⅲ)交换行列式的两行(列),行列式的值变号;

(ⅳ)用一个常数乘行列式,只要用这个常数乘行列式的某一行(列)(等价地,行列式中某一行(列)元素的公因数,可作为因数提到行列式外);

(ⅴ)如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可表示为两个行列式之和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(ⅵ)将行列式一行(列)的各元素乘以同一常数加到另一行(列)对应元素上,所得行列式与原行列式有相同的值.

由于行列式中行与列的地位对等,故我们只需对行(或列)证明上面的性质,其中的(ⅰ)-(ⅴ)可通过计算(行列式的展开)直接证明,我们把证明留给读者. 利用这些性质,不难证明(ⅵ):

设$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,不妨设,将第 1 列各元素乘以常数 k 加到第 2 列的对应元素上,得行列式$\begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix}$,则依次应用性质(ⅴ),(ⅱ)可得

$$\begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix} \xlongequal{(\text{v})} \begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{(\text{ii})} 0 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{\quad} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

练习 1.1

1. 填空

(1)二阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix}$= ________;

(2)已知二阶行列式 $\Delta = -3$,则 Δ^{T} = ________;

(3)已知二阶行列式$\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=0$,则 x = ________.

2. 单项选择

(1)若二阶行列式$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -1$,则$\begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 \\ -2y_1 & -2y_2 \end{vmatrix}$=(　　)

A. -2　　B. 2　　C. -4　　D. 4

(2)若二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 5a_{11}+3a_{12} \\ 4a_{21} & 5a_{21}+3a_{22} \end{vmatrix} = (\quad)$

A. 12　　B. 15　　C. 20　　D. 60

(3)若二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$，则 $a = (\quad)$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

3. 计算下列二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a+b \\ a^2-ab+b^2 & a-b \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} \frac{1+x^2}{1-x^2} & \frac{2x}{1-x^2} \\ \frac{2x}{1-x^2} & \frac{1+x^2}{1-x^2} \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

4. 用行列式解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+y=10 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x_1+7x_2=0 \\ 3x_1+5x_2=0 \end{cases}$

§1.2　三阶行列式与三元一次方程组

1. 关于二阶行列式的进一步讨论

二阶行列式是用递归方法建立行列式的理论基础，为了奠定这一基础，我们有必要用一种新的观点来考察二阶行列式.

设已给 2×2 的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

它有两行 (a_{11}, a_{12})，(a_{21}, a_{22}) 及两列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$，共4个元素 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$，其中 a_{ij} 是处于第 i 行第 j 列的元素 $(i=1,2; j=1,2)$，若视单独的一个数为1阶行列式，则称 a_{ij} 为二阶行列式的一阶子行列式，简称为一阶子式，故二阶行列式有4个一阶子式.

对于行列式的每个元素 a_{ij}，划去其所在的第 i 行第 j 列后，剩下的部分是一个

一阶子式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，故 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 的余子式分别是

$$M_{11}=a_{22}, M_{12}=a_{21}, M_{21}=a_{11}, M_{22}=a_{11}$$

a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 的积，称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，于是 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 的代数余子式分别是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=a_{22}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-a_{21}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}=-a_{12}$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=a_{11}$$

将二阶行列式的第 1 列元素分别乘以它们的代数余子式然后求和，称为二阶行列式按第 1 列展开. 容易算出，二阶行列式按第 1 列展开的结果将等于 §1.1 中所定义的行列式的值：

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}=a_{11}a_{22}+a_{21}(-a_{12})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

同样地，二阶行列式的任一行(列)的元素分别乘以它们的代数余子式然后求和，称为二阶行列式按这一行(列)展开. 容易算出，二阶行列式按任一行(列)展开的结果都等于行列式的值：

$$a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}=a_{12}(-a_{21})+a_{22}a_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}+a_{12}(-a_{21})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}=a_{21}(-a_{12})+a_{22}a_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

故为了求二阶行列式的值，只要将二阶行列式按任一行(列)展开.

若将二阶行列式的一行(列)的元素分别乘以另一行(列)的对应元素的代数余子式然后相加，则容易算出所得的结果均为零. 例如

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=a_{11}(-a_{12})+a_{12}a_{11}=0$$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}=a_{21}\cdot a_{22}+a_{22}(-a_{21})=0$$

于是我们得到

定理 1.2.1　(1)二阶行列式按任一行(列)展开的结果都等于二阶行列式的值；

(2)二阶行列式任一行(列)的元素分别与另一行(列)相应元素的代数余子式相乘然后将所得的积相加，其结果都等于零.

例 1.2.1　给定二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

(1)写出每个元素的余子式和代数余子式；

(2)将行列式按第二行展开；

(3)将行列式按第一列展开.

解 (1)余子式分别为 $M_{11}=-2, M_{12}=3, M_{21}=-5, M_{22}=4$,它们的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-2, A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=5, A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=4$$

(2)由按第二行展开的公式 $\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}$ 有

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=3\times5+(-2)\cdot4=7$$

(3)由按第一列展开的公式 $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$ 有

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=4\times(-2)+3\times5=7$$

2. 三阶行列式的定义

由于二阶行列式按第一列展开的结果等于行列式的值,故我们可将二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$$

仿此,我们可以定义三阶行列式.

给定一个 3×3 的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

它表示一个数值,我们姑且称它为三阶行列式,其精确定义稍后给出. 此三阶行列式有三行 (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}) 及三列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$,共 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 a_{ij} 是处于第 i 行$(i=1,2,3)$,第 j 列$(j=1,2,3)$的元素. 若视每个元素为一个一阶行列式,则称之为三阶行列式的一阶子式,故三阶行列式有 9 个一阶子式;若从三阶行列式的三行中任取二行,三列中任取二列,则其交会处的四个元素组成一个二阶行列式,称为三阶行列式的二阶子式. 例如,取三阶行列式的第 1,3 行和 2,3 列,则得到二阶子式为

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式共有 $C_3^2\times C_3^2=9$ 个二阶子式.

对于三阶行列式的每个元素 a_{ij}，划去其所在第 i 行、第 j 列后剩下的部分是一个二阶子式，称之为 a_{ij} 的余子式，记为 $M_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$. 例如，元素 a_{21} 的余子式是

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与 $(-1)^{i+j}$ 的积称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如元素 a_{21} 的代数余子式为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式中每个元素的余子式是一个二阶行列式，每个元素的代数余子式是一个二阶行列式带上适合的"+"号或"-"号，因此，余子式和代数余子式都表示数.

将三阶行列式的第一列各元素分别乘以它们的代数余子式，然后将所得的积相加，称为三阶行列式按第一列展开，展开所得的结果是一个数，称为三阶行列式的值. 于是我们有下面的定义.

定义 1.2.1　给定 3×3 的数表

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.2.1}$$

其第 1 列元素 a_{11},a_{21},a_{31} 的代数余子式分别为

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},A_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则规定三阶行列式所表示的数值为

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \tag{1.2.2}$$

依定义，三阶行列式表示一个数，它是三阶行列式按第 1 列展开后计算所得的结果.

由 1.2.2 式可得

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\text{（共 6 项）} \tag{1.2.3}$$

例 1.2.1　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

解 按(1.2.2)式计算可得其值为

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\-3&1&5\\4&0&-3\end{vmatrix}=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5\\0&-3\end{vmatrix}+(-3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&4\\0&-3\end{vmatrix}+$$

$$4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&4\\1&5\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-3)+3\times(-9)+4\times 11$$

$$=11$$

或按(1.2.3)式计算亦可得值为

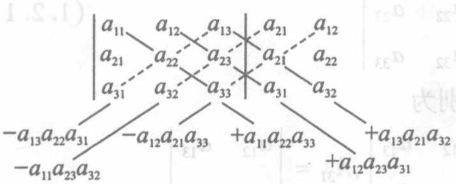
$$\begin{vmatrix}2&3&4\\-3&1&5\\4&0&-3\end{vmatrix}=2\times1\times(-3)+3\times5\times4+4\times(-3)\times0$$

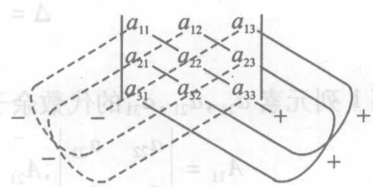
$$-4\times1\times4-2\times0\times5-3\times(-3)\times(-3)$$

$$=-6+60+0-16-0-27$$

$$=11$$

通常也可直接用(1.2.3)式定义三阶行列式,其中右边的式子共有6项:3项为正,3项为负. 为了便于记忆这些项,可以参看下面的两个图.





其中在实线上三个数的乘积取"+"号,在虚线上三个数的乘积取"-"号,然后加起来就是三阶行列式的值,即(1.2.3)式.

3. 三阶行列式的展开

依定义,三阶行列式的值等于三阶行列式按第1列展开的结果. 实际上通过直接计算可知,三阶行列式按任一行或任一列展开(即将任一行或任一列中各元素分别乘以它们的代数余子式,然后将所得的积相加)的结果都一致,都等于三阶行列式的值. 例如,三阶行列式(1.2.1)的第二行是 a_{21},a_{22},a_{23},其对应的代数余子式是

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32}$$