十年高考试题分类解析

数学

《十年高考试题分类解析》编写组

北京教育出版社

数学

十年高考试题分类解析

数　　学

《十年高考试题分类解析》编写组

北 京 教 育 出 版 社

(京)新登字2

十年高考试题分类解析　数学

shinian gaokao shiti fenlei jiexi shuxue

《十年高考试题分类解析》编写组

*

北京教育出版社出版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京印刷一厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　13.5印张

1990年7月第1版　1991年5月第2版

1992年3月第3次印刷

印数 56661—75160

ISBN 7-5303-0162-4/G·147

定　价：4.90元

目　录

代　数

平面三角

立 体 几 何

平面解析几何

代　　数

第一章　函　　数

一、集　　合

1. （1984年理、文）数集$X=\{(2n+1)\pi, n$是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi, k$是整数$\}$之间的关系是

（A）$X\subset Y$.　　　　（B）$X\supset Y$.

（C）$X=Y$.　　　　（D）$X\neq Y$.

答　(C). 由于$\{2n+1, n\in Z\}=\{$奇数$\}$，而$4k\pm1(k\in Z)$必为奇数，故$X\supseteq Y$；反之，当$x\in X$时，$x=(2n+1)\pi$，若n为奇数，即$n=2k-1(k\in Z)$，则$x=(4k-1)\pi$，$x\in Y$，若n为偶数，即$n=2k(k\in Z)$，则$x=(4k+1)\pi$，$x\in Y$；故$X\subseteq Y$. 由$X\supseteq Y$，且$X\subseteq Y$可知$X=Y$.

分析　此题考查集合的包含，相等、不等的概念，根据定义，判定集合间的关系应归结为判定元素与集合的关系.

2. （1984年理）如果n是正整数，那么$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值

（A）一定是零.　　　　（B）一定是偶数.

（C）是整数但不一定是偶数.

（D）不一定是整数.

答 (B). 当n是偶数时，$1-(-1)^n=0$，原式$=0$；当n是奇数，即$n=2k-1(k\in N)$时，原式$=\frac{1}{8}(1+1)(4k^2+4k)=k(k+1)$，这是两个连续正整数的乘积，必为偶数，0也是偶数.

分析 将整数(或正整数)分成奇数与偶数两种情形进行讨论的方法经常用到.

3. (1986年文)已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是

(A) $A\cup B$. (B) $A\cap B$.

(C) $\overline{A}\cup\overline{B}$. (D) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

答 (D). $\because$ $A\cup B=\{1,3,4,5,6\}$，$\therefore$ $\{2,7,8\}=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

分析 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.这两个关系式称为反演律.

4. (1987年理、文)设S，T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令$X=S\cap T$，那么$S\cup X$等于

(A) X. (B) T. (C) ϕ. (D) S.

答 (D). $\because$ $X=S\cap T\subset S$，$\therefore$ $S\cup X=S$.

分析 此题可借助于韦恩图的直观性作出判断(如图1).

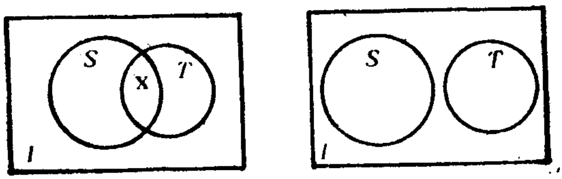


图1

在左图中，X非空，且$X \subset S$，故$S \cup X = S$；在右图中，$X = \varnothing$，$S \cup X = S$仍成立.

5. (1989年理、文)如果$I = \{a, b, c, d, e\}$，$M = \{a, c, d\}$，$N = \{b, d, e\}$，其中I是全集，那么$\overline{M} \cap \overline{N}$等于

(A) ϕ. (B) $\{d\}$. (C) $\{a, c\}$. (D) $\{b, e\}$.

答 (A). $\because$ $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, $\therefore$ $\overline{M} = \{b, e\}$，$\overline{N} = \{a, c\}$，$\overline{M} \cap \overline{N} = \phi$.

分析 此题也可以用下述过程作出判断：$\because$ $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, $\therefore$ $M \cup N = \{a, b, c, d, e\} = I$, $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{M \cup N} = \varnothing$.

综合分析 集合是数学中最基本的概念，利用集合来定义函数、数列、轨迹等数学概念，可以理解得更深刻，表达得更明确.应正确理解全集、子集、补集、交集、并集、空集等概念以及集合之间的包含、相等关系；掌握它们的表示方法；理解元素与集合的关系的两个基本特征——确定性和互异性；正确运用有关的术语和符号.

高考试题中有关集合的题目主要考查集合的基本概念，在解题方法上要善于做到两点：(1)将集合与集合的关系转化为元素与集合的关系；(2)将集合用图形(韦恩图、区间等)直观表示.

二、函数的定义、图象与性质

1. (1983年文)求函数$y = \sqrt{x+5}\log_a(36 - x^2)$的定义域.

解 解不等式组$\begin{cases} x + 5 \geqslant 0 \\ 36 - x^2 > 0 \end{cases}$，得$-5 \leqslant x < 6$，故所求定义域是$[-5, 6)$.

2. （1985年理）设函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求函数$f(x^2)$的定义域.

解 解不等式$0\leqslant x^2\leqslant 1$，得$-1\leqslant x\leqslant 1$，故$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$.

3. （1985年文），求函数$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$的定义域.

解 解不等式组$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得$-2\leqslant x<1$或$1<x\leqslant 2$，故所求定义域是$[-2,1)\cup(1,2]$.

4. （1987年文）求函数$y=\log_2(1+2x-3x^2)$的定义域.

解 解不等式$1+2x-3x^2>0$，即$(3x+1)(x-1)<0$得$-\dfrac{1}{3}<x<1$，故所求定义域是$\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$.

5. （1986年文）函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x\ (x\in(0,8])$的值域是

（A）$[-3,+\infty)$.　　（B）$[3,+\infty)$.

（C）$(-\infty,-3]$.　　（D）$(-\infty,3]$.

（E）$(0,+\infty)$.

答 （A）. ∵ 函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x\ (x>0)$是减函数，∴ 当$0<x\leqslant 8$时，$\log_{\frac{1}{2}}8\leqslant y<+\infty$，即$[-3,+\infty)$.

6. （1987年文）函数$y=\dfrac{2x}{1+x^2}\ (x\in R)$的值域是____.

解法一 ∵ $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$1+x^2\neq 0$，∴ $(1+x^2)y=2x$，即$yx^2+2x+y=0$，这是一个关于x的二次方程且有实根，则$\Delta=4-4y^2\geqslant 0$，解得$-1\leqslant y\leqslant 1$，故所求值域是$[-1,1]$.

解法二 ∵ $2|x|\leqslant 1+|x^2|=1+x^2$，∴ $\dfrac{2|x|}{1+x^2}=$

$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$，可得$-1\leqslant\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$，即$-1\leqslant y\leqslant 1$，当$x=-1$时，$y=-1$，当$x=1$时，$y=1$，故所求值域是$[-1,1]$.

7. (1988年文)函数$f(x)=2+2x-x^2(x\in R)$的值域是

(A) $(-\infty,3]$. (B) $(-\infty,1]$.

(C) $(-\infty,3)$. (D) $(-\infty,1)$.

答 (A). $\because$ $f(x)=2+2x-x^2=3-(x-1)^2\leqslant 3$，
$\therefore$ 所求值域是$(-\infty,3]$.

8. (1989年理、文)函数$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是

______.

解法一 $\because$ $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$，由$e^x>0(x\in R)$可得$\frac{2}{e^x+1}>0$，且$\frac{2}{e^x+1}<\frac{2}{1}=2$，$\therefore$ $-2<-\frac{2}{e^x+1}<0$，由此可得$-1<y<1$，即函数$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的值域是$(-1,1)$，因此它的反函数的定义域是$(-1,1)$.

解法二 $\because$ $e^x+1>0$，$\therefore$ 由$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$可得$(y-1)e^x=-(y+1)$，$e^x=\frac{1+y}{1-y}$，解得$x=\ln\frac{1+y}{1-y}$，故$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$是函数$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数，解不等式$\frac{1+x}{1-x}>0$，得$-1<x<1$，故所求反函数的定义域是$(-1,1)$.

9. (1989年理、文)求函数$y=-x^2+4x-2$在区间$[0,3]$上的最大值和最小值.

解 $y=-x^2+4x-2=2-(x-2)^2\leqslant 2$，当$x=2$时，$y_{最大}=2$，$x=0$时，$y=-2$，$x=3$时，$y=1$，故$y_{最小}=-2$.

分析 这是一组求函数的定义域和值域的试题.定义域、值域都是函数三要素（定义域、对应法则、值域）之一.

求函数定义域的基本方法是：依据各类基本函数对定义域的规定，或由题意所确定的自变量实际意义而对自变量取值范围的限定，通过解方程、不等式(组)，确定自变量x的取值范围.具体地说，求函数的定义域可参照以下几个准则：(1)若$f(x)$是整式，则$f(x)$的定义域是实数集R；(2)若$f(x)$是分式，则分母应不等于零；(3)若解析式有偶次根式$\sqrt[2n]{f(x)}$ $(n\in N)$，则应有$f(x)\geqslant 0$；(4)若解析式有$\log_{f(x)}g(x)$，则应有$f(x)>0$且$f(x)\neq 1$和$g(x)>0$；(5)若解析式有$\arcsin f(x)$或$\arccos f(x)$，则应有$|f(x)|\leqslant 1$；(6)若上述几种情况同时出现在解析式中，则先各自找出相应的定义域，然后取它们的交集.

如第2题：由函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$可知，在对应法则f的规定下，作为函数$f(x^2)$的中间变量x^2的取值范围是$[0,1]$，即$0\leqslant x^2\leqslant 1$，解得$-1\leqslant x\leqslant 1$，因此函数$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$.由于在本题中，函数$f(x)$的对应法则（即函数的解析表达式）没有具体给出，增大了题目的难度，相当数量的考生按照$0\leqslant x\leqslant 1\Longrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 1$的推理，判定函数$f(x^2)$的定义域也是$[0,1]$，导致这一错误，当然主要原因是考生对函数的概念理解不够准确，但也和函数关系不具体有关.为此，将函数关系具体化，对获得正确结论是有益的.比如：设$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$，它的定义域是$[0,1]$；这样，函数$f(x^2)=\sqrt{x^2(1-x^2)}$，通过解不等式$x^2(1-x^2)\geqslant 0$，即$0\leqslant x^2\leqslant 1$，便可求得函数$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$.

求函数的值域与求函数的定义域的方法不同，这是因为定义域完全由对应法则所确定，并且求定义域还有若干条可参照的准则，依照这些准则通过解方程，解不等式(组)等手段就可求得. 而值域要由对应法则及定义域两个因素决定，求值域没有固定的方法与步骤，没有明确的准则. 因此，求值域的问题往往比求定义域的问题要难. 为有助于求值域，熟记各类基本函数的值域及单调性、奇偶性是十分必要的；通过配方法可利用实数的性质$x^2 \geqslant 0$来确定一些函数的值域；平均值定理可用于求函数的最大(小)值，也有助于值域的确定. 对于有反函数的函数，则可将求函数的值域转为求它的反函数的定义域.

10. (1985年理) 如果$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$，则$f(x)=$____.

解法一 $\because$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x^2}}$

$$=\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}, \therefore \quad f(x)=\frac{x}{x^2-1}.$$

解法二 设$t=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{t}$，代入$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$得

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{t}{t^2-1}，\text{故} f(x)=\frac{x}{x^2-1}.$$

11．（1986年文）若$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1$，则 $f(x)=$ ______.

解法一 $\because$ $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x}-2=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{x}\right)$，$\therefore$ $f(x)=x^2-2x$.

解法二 设$1+\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t-1}$，代入$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1$得$f(t)=\frac{1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}-1=(t-1)^2-1=t^2-2t$，

故$f(x)=x^2-2x$.

分析 这是一组求函数的解析表达式的试题．函数的解析式$y=f(x)$是由自变量x确定y值的计算式，其实质就是对应法则$f: x\to y$．这两个题目都是由间接地给出确定$\frac{1}{x}$或$1+\frac{1}{x}$的象的表达式，转而求出直接给出确定x的象的表达式．解决这类问题，常用两种方法．解法一是直接变换法，解法二是换元法．

12．（1989年理、文）与函数$y=x$有相同图象的一个函数是

（A）$y=\sqrt{x^2}$． （B）$y=\frac{x^2}{x}$．

（C）$y=a^{\log_a x}$，其中$a>0$，$a\neq1$．

（D）$y=\log_a a^x$，其中$a>0$，$a\neq1$．

答 (D). $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x(x\geqslant 0)\\-x(x<0)\end{cases}$是分段定义的函数，它的图象是第一象限和第二象限的平分线，与函数$y=x$的图象——第一、三象限的平分线不同；$y=\frac{x^2}{x}$在$x\neq 0$时可化为$y=x$，在$x=0$时没有意义，它的图象是直线$y=x$上除原点以外的部分，也与$y=x$的图象不同；$y=a^{\log_a x}$在$x>0$时可化为$y=x$，$x\leqslant 0$时没有定义，它的图象只是第一象限的平分线，与直线$y=x$不同．而$y=\log_a a^x=x\log_a a=x(x\in R)$，与$y=x$相同．

分析 两个用不同的解析式表示的函数，只有在对应关系相同，定义域相等，值域也相等的条件下才能算是相同的函数，才能有相同的图象．答案(A)中的函数$y=\sqrt{x^2}$与函数$y=x$的对应关系不同；答案(B)和(C)中的函数则与函数$y=x$的定义域不同，都不能算是与函数$y=x$相同的函数．

13．(1983年文)在直角坐标系内，函数$y=|x|$的图象

(A) 关于坐标轴、原点都不对称．

(B) 关于原点对称．　　(C) 关于x轴对称．

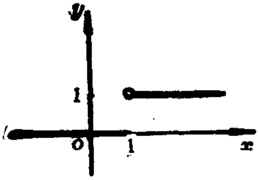
(D) 关于y轴对称．

答 (D). ∵ $|-x|=|x|$，∴ $y=|x|$是偶函数，它的图象关于y轴对称．

14．(1984年理) 设$H(x)=\begin{cases}0 & 当x\leqslant 0,\\1 & 当x>0.\end{cases}$画出函数$y=H(x-1)$的图象．

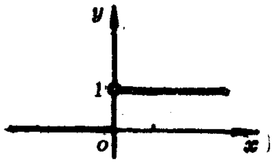
解 ∵ 当$x\leqslant 1$时，$x-1\leqslant 0$，$H(x-1)=0$；当$x>1$时，$x-1>0$，$H(x-1)=1$．

∴ 函数$y=H(x-1)$的图象如图2所示



$y=H(x-1)$

图2



$y=H(x)$

图3

分析　函数$y=H(x)$的图象（如图3）向右平移一个单位，就可得到函数$y=H(x-1)$的图象．

15．（1984年文）画出函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$的图象．

解　列表取点

x	…	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1	…
y	…	0.25	1	4	不存在	4	1	0.25	…

描点连线（如图4）

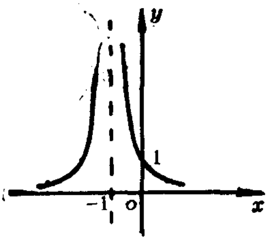


图4

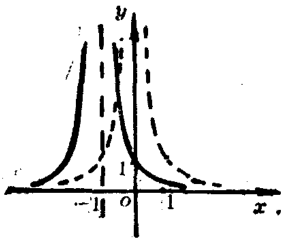


图5

分析　不难发现，整个图象在y轴上方，关于直线$x=-1$成轴对称图形，且以x轴及直线$x=-1$为渐近线．

函数$y=\frac{1}{(x+1)^2}$的图象与$y=\frac{1}{x^2}$的图象形状完全一样，只是在位置上两函数的图象左右相差一个单位，将$y=\frac{1}{x^2}$的图象向左平移一个单位就可得到$y=\frac{1}{(x+1)^2}$的图象（图5）.

一般说来，函数$y=f(x-a)$的图象形状与函数$y=f(x)$的图象形状一样，当$a>0$时，将$y=f(x)$的图象向右平移a个单位，当$a<0$时，将$y=f(x)$的图象向左平移a个单位就可得到$y=f(x-a)$的图象；同理，当$b>0$时，将$y=f(x)$的图象向上平移b个单位，当$b<0$时，将$y=f(x)$的图象向下平移b个单位，就可以得到$y=f(x)+b$的图象.

16.（1984年文）函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象

（A）关于y轴对称.　　（B）关于原点对称.

（C）关于直线$x+y=0$对称.

（D）关于直线$x-y=0$对称.

答（D）. 这是一个定理.

分析　函数$y=f(x)$和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称，这种对称性是两个函数图象间的对称性，与奇、偶函数的图象关于原点、y轴对称的对称性不同，后者是一个函数图象自身的对称性.

17.（1986年文、理）在图6中，$y=ax^2+bx$与$y=ax+b(ab\neq0)$的图象只可能是