HIT

数学·统计学系列

Polynomial and Irrational Numbers

多项式和无理数

冯贝叶 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

多项式和无理数

冯贝叶 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书从数的起源讲起，逐步介绍数的发展和新的各种性质及其应用，其中也包括了数学分析、实变函数和高等代数的一些入门知识，最后介绍了几个尚未解决的具有挑战性的问题。本书写法简明易懂，叙述尽量详细，适合于高中以上文化程度的学生，教师，数学爱好者以及数论、常微分方程、分支、混沌问题和 $3x+1$ 问题的研究者和有关方面的专家参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

多项式和无理数/冯贝叶著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5603-2385-5

Ⅰ.多…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.①多项式②无理数　Ⅳ.0174.14 0122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 175542 号

策划编辑　刘培杰　张　荣
责任编辑　李广鑫
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 40.25　字数 742 千字
版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2385-5
印　　数　1~3 000 册
定　　价　68.00 元

⊙前言

作者从年轻时就对整数的奇妙性质和有关整数的各种有趣问题十分感兴趣，后来随着数学知识的增加，才知道整数又可发展成为有理数、实数和复数，而各种数之间既存在着相互的联系，又有很大差别。而有关整数的问题，有时其解法不由得不令人拍案称奇。如此积累一多，发现如果不加整理和保存，很多精彩的想法就会擦肩而过。遂决定遇到有关的问题和材料就随时做一点笔记，到退休之时，竟积累了不少。这些笔记在多年的教学和辅导中，曾反复起了不少作用，因此觉得如把它们整理出来，对那些像我当年那样也对整数问题感兴趣的年轻人和初学者多少会有些帮助，于是就产生了这本书。

目前和本书内容及题材、体裁类似的书已有不少，其中也不乏广为人知的精彩作品。作者之所以还愿意写一本这样的书，是因为一方面，这些书有一些已难于买到和借到，另一方面是感到和已有的书相比，本书在以下几方面还是有一些新意和特色的，所以才敢不揣冒昧，班门弄斧。

(1) 一次不定方程是我国古代已研究的比较成熟和成就较多的一个课题，其中如孙子问题和孙子定理(又称中国剩余定理)已是世界数学界公认的成果。

以往介绍这方面内容的书不在少数，但是往往有的书把古代的算法讲得很清楚，其中的数学原理则让人不太明了；有的书

把现代的理论讲得很清楚，如何解释古代的算法则一笔带过。当我看到这些书时，对此总感到遗憾。本书将古代的算法和现代的理论一一加以对照，使读者可以很清楚地看出古代的算法其每一步的意义和依据是什么，尤其是秦九韶、黄宗宪等人创立的算法的最后一步，本书给予了严格的证明。

(2) 在复数得到了广泛的应用后，古代的数学家如哈密尔顿以及现代的初学者都曾思考过是否可以把复数推广为三元数。关于创立三元数的问题，许多科普读物都明确无误地告诉读者，这是不可能的，但是为什么不可能就语焉不详了。本书以比较浅显的方法对此作了论证。

(3) 费马大定理一直是几百年来数学家们和科普读物中的热门话题，虽然这一问题现在已经获得解决，但是人们对一些初等的证明还是十分感兴趣，其中比较难的一个是 $n=3$ 时的费马大定理的证明。一般的数论书籍通常只介绍 $n=4$ 时的费马大定理的证明，即使介绍 $n=3$ 时费马大定理的证明，也大都把它放在 $n=4$ 时的费马大定理的证明之后。这就足以说明 $n=3$ 时费马大定理的初等证明是有一定难度的。对这一比较难的问题，为使读者看懂，本应证明得更加详细，然而一些书在谈到这一问题时往往一开始就让读者看不下去了，其中最明显的一个地方是一开始就设 z 是偶数，很多人问过作者这个问题，后来经过作者反复钻研才发现在通常的 $x>0, y>0, z>0$ 的条件下是不能做这一假设的，只有在允许 x, y, z 可以是任意整数(即允许他们为负数)的条件下，才可以做这一假设。这一点在潘承洞、潘承彪先生的《初等数论》一书中交代得最清楚。本书对这一问题的证明力求详尽易懂，因此虽然篇幅长了一些，但是相信读者看起来会感到思路顺畅。

(4) 无理数小数部分的分布性质是无理数和有理数的一大本质差别，本书对此介绍得比较详细，并介绍了华东师范大学王金龙先生近年来获得的最新成果。

(5) 混沌理论是近年来的热门话题，本书用初等的方法证明了逻辑斯梯映射周期三窗口的出现参数和稳定的周期三轨道的消失参数。

(6) 关于多项式理论的应用，本书收集并重新证明了关于多项式系统的胡尔维茨判据和 **Hopf**(霍普夫)分支的代数判据。这些材料在一般的书中已不多见。

(7) 本书还给出了作者关于四次函数的根的完全判据和正定性条件，这些结果是有一定实用意义的可操作的判据，需要时应用这些结果还是比较方便的。

(8) 在整数的函数这一部分中，介绍了欧拉求和公式、贝努利数和戴德金和等概念，并证明了它们的相关性质。这些材料一般都分散在各种文献中，本书将它们收集在一起，对读者阅读本书和今后查找都是比较方便的。在这一部

分,还给出了一个数论中经常使用的不等式 $d_n<3^n$ 的初等证明,其中 d_n 表示前 n 个自然数的最小公倍数。

(9) 在本书第十二章中给出了几个著名的数的无理性和超越性的证明,其中包括法国数学家阿皮瑞 1978 年的最新结果——$\zeta(3)$无理性的证明。相信会有读者对这些材料感兴趣。

(10) 本书最后介绍了几个尚未解决的问题,其中包括著名的 $3x+1$ 问题,并给出了作者所获得的一些结果。还有一些结果在习题中给出,这些材料目前在其他书中还不多见。

本书在写法上尽量追求易懂性,为此,甚至不惜多费篇幅。这是因为当年作者在看某些书时,曾经因为有些地方被"卡住"而深感苦恼,所以作者特别能理解那种因各种原因而找不到人问以至心中的疑问长期不能获得解答的苦恼。为了避免本书再给读者造成这种苦恼,本书在讲解和证明时特别注意了这个问题,宁可显得啰嗦,也不愿语焉不详。从这个意义上来说,本书比较适合自学。

由于在讲解上不惜笔墨和追求材料的封闭性,所以目前本书的篇幅已不小。为了不再增加篇幅,有些材料就坚决舍去。例如,本书完全不包含有关素数以及素数分布方面的结果。关于特征和把一个整数表为平方和的方法的数目也都舍去了。在作者看来,这些材料太过专业,并不适合初学者阅读。当然有些作者认为从本书的体系看应该包含的材料也因为篇幅的原因不得不割爱了。例如,本书专有一章说明有理数性质和无理数性质之间的差别,而这种差别也可以从遍历论的观点得到反映,而不变测度等内容由于和连分数有关,因此适当介绍一些遍历论方面的基础知识似乎也是顺理成章的;然而,最终出于篇幅方面的考虑,作者还是不得不舍去了这方面的材料。这样一来,可以说,本书只包含了有关学科的最初等的材料,就数论方面来说,可以说是真正的初等数论了。

虽然本书舍去了不少材料,但是只要讲到的问题都争取讲透,因此,每一个问题几乎都会讲到最后完全解决,而不会使读者有虎头蛇尾的感觉。如果由于内容所限实在不能再讲下去,文中会特别声明。

本书包含了大量的习题,作者选取习题的用意是认为这些结果都是有一定趣味的和值得注意的,因此即使不知道答案也至少应该知道这些结果。

本书没有给出习题解答。这一方面是为了使读者永远有一种未知感以保持积极的思考,另一方面也在于本书的很多习题都取自书末的参考资料,特别是潘承洞、潘承彪先生的《初等数论》,杜德利的《基础数论》和北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编写的《高等代数讲义》等书,而这些书中都有答案。当然有些习题是取自近期的《美国数学月刊》和作者的笔记,因而在其他参考文献中并没有现成的答案。

大部分习题的解答方法和所需的数学知识都与它所在的章节有关。然而，请读者不要受这一点说明的约束。这只是作者当初安排习题的动机之一，但是等全书写完之后，作者发现，有一些题目完全可以用另外的方法解出。所以，如果读者发现，他解题的方法似乎与这一题目所在的章节无关，请不要奇怪。这反而说明这位读者的思维是很灵活的。

至于最终是否会出一本本书的习题解答，还要看读者的反映。

最后，作者特别借此机会对教导过我的已过世的颜同照先生、闵嗣鹤教授、方企勤教授表示怀念，对孙增彪先生、叶予同先生、周民强教授、钱敏教授和朱照宣教授表示感谢，因为他们各位在做人、做事和做学问等方面给予我的教诲，都使我终身受益。

作者也对同事朱尧辰教授和同学王国义先生在讨论各种数学问题时给予的帮助表示感谢。

最后作者对妻张清真在生活方面的照顾，女冯南南在写作及计算机方面的帮助，弟冯方回在计算机方面的帮助以及他们对作者写作的理解和支持表示感谢。没有这些帮助，作者的写作将增加许多额外的困难，也不会有愉快的写作心境。

作者不是数论方面的专家，只是一个感兴趣者，因此殷切期望读者将本书的缺陷和不足之处反映给作者。有任何意见和建议请发电子邮件至 fby@amss.ac.cn.

冯贝叶

2007 年底于燕园 6 公寓

目录

数是什么以及它是如何产生的?

第一章

我们每个人每天大到工作需要,小到买菜算账都要和数字打交道,但是对于数究竟是什么以及它是如何产生的这些问题,恐怕不是每个人都想过的。其实认真地思考一下这个问题就会发现如果你的数学课学得不错的话,那么你其实已具有了很了不起的本领了,尽管你自己并不一定意识到。

人类是从动物进化来的,能够感觉到客观世界中某种同类事物的数量是某些动物的一种本能。比如有的鸟类能够发现自己鸟窝中的鸟蛋少了,哺乳类动物也能发现自己生下的幼崽少了,这恐怕就是最初级的识别数量的能力了。也有证据表明一些比较聪明的动物已经不仅能识别事物的多和少,对一定数量之内(比如说,3个以内或5个以内)的物体还能具体分辨出究竟有多少个。但是动物对于数量的感觉恐怕也就到此为止了,数量一多,它们就分辨不清了(至多有一种多的感觉),对于数的更深刻性质就更谈不上有感觉了。中国有一句成语叫"朝三暮四"就相当准确地反映了即使是进化已经比较高级的动物对于数量的感觉。《庄子·齐物论》中说有个人养了一群猴子,他对猴子说,早上给每个猴子三个橡子,晚上给四个,猴子都不干,很生气,结果他又说,那好我早上给四个,晚上给三个,结果猴子就都高兴了。这说明猴子对于数量有感觉,而且已经能分辨到四了,但是猴子不懂加法交换律。

其实我们人类一开始也比动物好不了多少。我这里说的一开始是指早期的人类和人类自身成长的一开始。那么我们怎么知道人类的一开始对数的概念的认识程度呢?原来进化论的研究告诉我们,人的胚胎的发育过程就浓缩了人的进化过程,而人诞生后的婴儿时期也浓缩了人类的智力发展过程,同时现存的一些处于封闭环境中的原始部落也可让我们知道早期人类的智力程度。

有不少非洲探险家证实,在某些原始部落里,不存在比 3 大的数词。如果问一个人他有几个儿子,或杀死过多少敌人,而这个数字大于 3,他就只会回答“许多个”,因此,要说数数(第一个数念 shǔ,第二个数念 shù) 这个本事,这些部落的勇士们甚至还不如我们幼儿园里的小朋友呢,因为这些小朋友都可以从一数到十。

但是为什么幼儿园中的小朋友都会从一数到十呢?那是因为有大人从小就教他们。如果情况不是这样,那么他们的命运就不同了。据文献记载,从小被狼攫取并由狼抚育起来的人类幼童,世界上已知的狼孩已有 10 多个,其中最有名的是印度发现的两个。1920 年,在印度加尔各答东北部的一个山村附近,居民们常在傍晚时分看见一头母狼走出山林,后面跟着两个似人非人、似狼非狼的怪物。为了弄清事情的真相,人们伺机把母狼打死,在狼窝里发现那两个怪物原来是两个女孩,于是人们把她俩抱回到村子里。大女孩估计有七八岁,给她取名叫卡玛拉;小女孩大约两岁左右,取名阿玛拉。

卡玛拉和阿玛拉被人们从狼窝中救出来以后,由米德纳波尔孤儿院收养。这两个女孩的行为方式和生活习惯同狼一样,不会说话,没有人的思想意识,也没有人的复杂和丰富的情感。走路时四肢着地,坐卧如犬状。饥餐渴饮像狗那样趴在地上舔食,活动规律呈昼伏夜出的特点,白天吃饱了就睡。饿了就引颈长嚎。夜晚来临时即表现得躁动不安,因为不能随意到旷野里去,便在黑暗中于室内或院子里来回游荡,并又东闻西嗅地寻找可食之物,时时刻刻总想出逃。给她们穿衣或围上腰布,她俩便粗野地撕扯下来。

在这两个狼孩刚回到人的周围时,她们的智力只相当于初生婴儿的水平。在孤儿院里将近一年的生活期间,她俩皆未改变自己身上原有的那种狼的习性。大狼孩卡玛拉在进入孤儿院的第二年里,仍然寻食死鸡的内脏,第三年里依旧在晚上东游西荡,大声嚎叫,寻机逃跑。小狼孩阿玛拉由于染患重病,在孤儿院里生活了 11 个月便死去了。而卡玛拉却在以后将近 9 年的时间里,受到了精心的照料和培养。

为了帮助卡玛拉尽快恢复人性,有关人员对她进行了各种教育尝试,以促其早日学会人的生活。但是学习对于这个女孩来讲,是相当艰难和困苦的事,很少有所收获。每一少许的进步,都需要教养人员花费特别大的代价。比如教她说话,仅教她呼唤照料她的波拉夫人的“波” 字发音,她就足足用了两年的时间才

勉强算是学会。后来又教她说些简单的词句,6 个单词她用了 4 年的学习时间。经过7年的教育,她一共学会使用45个单词。教她直立行走也很因难,在有关人员的耐心示范和训练下,她用了1年零4个月的时间学会用两膝行走,花了2年7个月的时间学会两腿站立,大约经历5年的努力才学会用两脚步行,而且很不习惯,每当需要快速行走时,她仍喜欢用四肢着地而行。

尽管如此,回到人类中的卡玛拉经过几年的教育和训练,还是开始改变她初时狼的生活习性,并逐步适应人类的社会生活。在进入孤儿院第 4 年以后,卡玛拉的智力发展已达到一岁半幼儿的水平。从此以后,她的心理和行为变化较前几年有了显著的进步和提高,到第 7 年的时候,她的生活习惯同其他孩子相比已相差无几。例如她也像其他孩子一样注意自己的穿着,并以自己整洁漂亮的服装而高兴。同时也产生了羞耻心,穿衣系带不愿接受别人的帮助,常因自己动作缓慢而感到焦急。她还希望得到别人的夸奖,一次由于她及时地报告了一个婴儿发生的一点问题而受到称赞,她兴奋得两眼闪出喜悦的光芒。她能知晓一些简单的数目,拒绝接纳多于定量的饼干或点心。后来因为身患重病而死亡。死时年龄大约 17 岁。据心理学家对她死前心理活动状态及社会行为表现确认,她的智力已达到三岁半幼儿的水平。如果她能继续活下去的话,可以断定她的智力还会得到发展和提高。

这就说明,即使我们的大脑已经具有了接受现代知识的结构,但是如果不生活在现代环境中和接受教育,那么我们的智力也只能停留在很原始的程度。

现在我们可以回答数是怎样产生的这个问题了。数(shù) 是产生于数(shǔ)。最开始,人们会数 1,然后是 2,再然后是 3,… 并且发明了表示这些数字的符号。下面分别是是 1 ~ 10 的汉字、罗马数字和阿拉伯数字的符号:

一,二,三,四,五,六,七,八,九,十

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

实际上,罗马数字的表示法还更复杂,在这个体系中,首先用以下符号表示几个特殊的数字:

I, V, X, L, C, D, M

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000

把 I, II, III,放在 V 和 X 的左边就表示从 V 和 X 分别减去 I, II 和 III,而把它们放在右边,就表示从 V 和 X 分别加上 I, II 和 III。于是十、十一等数即可以分别写成

X, XI, XII, XIII, XIV, XV…

二十,三十则写成 XX, XXX。

要表示四十及四十以上的数，就要利用符号 L。例如四十一写成 XLI(即五十减去十加上一)。九十就要利用符号 C 来表示，即写成 XC，另外 49 和 99 并不写成 XLIX 和 XCIX，而是写成 IL 和 IC。一百零二写成 CII，三百七十四写成 CCCLXXIV 等等。大的数，如 29 635 写成 XXIXmDCXXXV(小写字母 m 表示千，即 29 个千加上 500，再加上 100，再加上 35)。数字的这种记法很经济(只用七个数字就可写出一百万以内的数)，但却不方便。因为不太大的数就要写得很长，而计算时并不能得到任何便利。用汉字来进行计算也不是很方便，因为毕竟笔画较多，书写不如阿拉伯数字流利，因此目前世界上通用阿拉伯数字来记数和进行笔算。(虽然用汉字表示的数字在计算方面并没有什么优越性，但是我们的祖先却发明了算盘，这一简易的计算工具由于其实用性，一直流传到现在。)不过由于阿拉伯数字容易被改写或辨认不清，因此各国在比较正式的经济活动中和票据中还要对数字使用所谓的大写来表示郑重和正式。下面是汉字中，数字 1 ~ 10 的大写：

壹，贰，叁，肆，伍，陆，柒，捌，玖，拾

比如人民币 36 745.12 元用大写就要写成叁万陆仟柒佰肆拾伍圆壹角贰分；而在英语中，英镑 36 745.12pound 用大写就要写成 thirty - six thousand, seven hundred and forty - five point one two pounds 或 thirty - sixthousand, seven hundred and forty - five pounds and twelvepennies。人民币 21 536 745.12 元用大写就要写成贰仟壹佰伍拾叁万陆仟柒佰肆拾伍圆壹角贰分；而在英语中，同样数目的英镑数用大写就要写成 twenty - one million, five hundred and thirty - six thousand, seven hundred and forty - five point one two pounds 或 twenty - one million, five hundred and thirty - six thousand, seven hundred and forty - five pounds and twelve pennies。怎么样，朋友？你可能对数字不感兴趣，但无论如何，你是离不开数字的。如果你发了财或出国了，可是却连一张支票都写不成，那可是有点尴尬哦！

一旦把数字用一种符号表示出来，人类就完成了一次认识上的飞跃，因为数字 1 已经是一个抽象的概念了，它既可以表示一个人，也可以表示一头牛或是任何数量是一的对象。数字的抽象概念就极大地延伸了它的作用，因为从此之后，人类在进行计算时就再也不用去考虑数字所代表的各种具体对象的与数字无关的性质，而只要考虑数字本身的性质就行了。

另外有了最基本的数字 1 之后，通过合并两个 1 就可以产生 2，再把 2 和 1 合并就可以产生数字 3，原则上，这个过程可以无限地进行下去。正如中国的一部名著，老子的《道德经》中所说的："道生一，一生二，二生三，三生万物。" 这就是人类思维上的又一次飞跃，就是从有限到无限的飞跃。原则上，我可以想象要多大就多大的数的存在，这只要把 1 这个数无限次地相加下去就可以得到，但是在实际操作中，我们又不可能无限次地相加，所以无限这一概念只能通过抽象

的思维来认识。

这就又产生了一个矛盾或问题，即如何来表示这无限多个数字的问题。显然，对每一个数字给予一个特别的符号是一种无法实现的方案。有一个民间故事反映了这一问题。据说有一个姓万的财主特别吝啬，给他儿子请了一个教书先生。先生教了一天后，财主问他的儿子，今天学了什么字，儿子说，今天我学会写“一”字了，第二天说我学会写“二”字了，第三天说我学会写“三”字了。这个财主一看，学字也不难啊，一个字多一划，以后肯定也差不多。学这几个字也就够用了。没必要花那么多冤枉钱请先生。结果就把先生给辞了。过了几个月，这位财主准备为儿子过生日请一次客，同时也趁机显示一下自己的儿子会写字了。就让他的儿子在请帖上代他签字。结果过了一天，这个财主来问儿子名字签完了没有，儿子说：“爹呀，还早着呢，光你这个姓就要划一万道，现在我才划了几百道。”其实这个财主的儿子还不算笨，不但数数得清，而且对没有学过的数字还能用类推的办法给出一个表示的方案，只不过这个方案无法实现罢了。(其实罗马计数法也不比这个财主的儿子高明多少，如果要写一个很大的数，比如说一百万，罗马人所能使用的最好的办法，就是接连不断地写上一千个 M，这虽然用不了一天，却也得花费好几个钟头。)

各个不同的文明，如巴比伦、印度和中国都各自独立地发明了进位法，用这种方法，我们就能用有限多的符号表示无限多的数字。最常用的进位法是十进制，而且各个不同的文明几乎不约而同地都产生了十进制的计数法。这大概不是偶然的。有的专家认为，这可能和人类最初是借助于手指来计数(想一下儿童最初是如何数数的)，而与我们的双手一共有十个手指有关，的确，我们的双手就是一个天然的十以内的计算器。当然除了十进制之外，还有其他的进位制。例如在中国的重量计量中，采用16进位制，在计算时间时，我们又采取60进位制。

但是即使有了进位制，我们在表示很大的数时，原则上仍要发明无限多的单位，而刚才已说过，这是不现实的。大概在两千年之前，一位不知名的印度数学家发明了一种表示数的方法，这种方法可以使我们写出任意大的数字。例如目前可以观测到的宇宙中所有原子的数目约为 300 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 个，这个数字要让你念出来恐怕都很困难，因为没有那么大的单位。但是用那位不知名的印度数学家发明的办法，这一数字就可以写得很短，即写成

$$3 \times 10^{74}$$

这里，10 的右上角的小号数字 74 表示 3 后面有 74 个零，即要 10 自乘 74 次再去乘 3。用这种方法，我们就可以表示出任意大的数。例如，下面是一些物理常数：

地球的半径：6 37 1 km;

地球的质量：5.98×10^{27} g;

太阳的质量：2×10^{33}g；

月球的半径：1 740 km;

月球的质量：7.35×10^{25} g;

下面是一则关于发现最大质数的新闻报道：

美国州立中密苏里大学的一个团队利用 700 多台计算机通过分布式运算发现了迄今为止最大的质数，一个 9 152 052 位的天文数字。这一数字是在 2005 年 12 月 15 日被发现的，并已得到了确认。

他们发现的这个 900 多万位的数字是第 43 个梅森质数，为 $2^{30\,402\,457} - 1$。

由此可见，这种表示数字的方法现在已深入到我们的生活中。在上面的表示法中，我们已见过数字零。发明和使用数字零也是人类认识上的一次飞跃。零可以表示没有，同时使用数字零可以使我们区分像 12，120，102 这些不同的数字，零的使用极大地方便了我们的思维和计算，在我们的生活中，如果没有零这个数字，那将是不可想象的。

零和数字 1,2,3,⋯ 的全体已经组成了一个有着很好性质的计算整体，现在我们把零和数字 1,2,3,⋯ 的全体称为(非负) 整数。例如在这些数中可以进行两种运算，即加法和乘法，而且这两种运算还服从以下 5 个规律：

加法交换律 $$a + b = b + a$$

加法结合律 $$a + (b + c) = (a + b) + c$$

乘法交换律 $$ab = ba$$

乘法结合律 $$a(bc) = (ab)c$$

乘法分配律 $$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ab + ac$$

次序关系：对任意的 a,b，三个关系式 $a > b, a = b, a < b$ 之中，必有一个成立，且其他两个关系式不能同时成立，其中 a,b 是 0 或正整数；

$$1 > 0$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$$

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c\text{，其中 } a,b,c \text{ 是 0 或正整数}$$

(由于成立加法和乘法的交换律，所以乘法分配律中的两个式子实质上是一个式子。)

其实在整数范围中，乘法的地位没有加法那么基本，它是作为加法的简便算法而出现的，但是它一旦出现后，就有了独立性，而在数的范围扩大后，它就完全脱离了加法而独立了，因为在扩大的数中，乘法已完全不能用加法的简便运算来解释了。但是注意到乘法的起源还是有助于我们理解为什么乘法也遵循

与加法完全相同的运算规律,并且与加法协调得如此和谐,因为它本来就来源于加法。而且思考一下以下问题也会让我们感觉到这两种运算的基本重要性。就是尽管我们还可以模仿乘法而定义什么其他的简便算法,但是这些算法最终都可以归结到加法和乘法,所以至今我们的小学算术只须背诵九九表(也就是乘法运算表)就到头了,而不需再背诵什么其他的运算表了。而去掉了加法或乘法任何一种运算,我们就什么计算也无法完成了。

但是从实用的观点来看,光有整数是完全不够用的。因为在客观世界中存在着两种性质完全不同的对象。一种对象是完整的,不可分割的。即如果你把这种对象加以分割,它就已不再是它本来的样子了。再说得具体一些,例如一个人、一头牛、一只箭、一个盘子、一个瓶子等等,都是不能分割的对象,把这些对象分成哪怕仅仅是两半,它们就不再是人、牛、箭、盘子、瓶子等原来意义上的东西了。整数就是用来计数和计算这种不可分割的对象的。然而还有另一种对象,即连续的和均匀的量,这种对象既容易分开来也容易结合起来,而不失去它们原有的本性。例如长度、面积、体积还有时间都具有这样的性质,我们把这种性质称为连续性。连续性这一概念的本质就是所说的对象虽然实际上还没有被分割,但是潜在上却具有无限分割的可能性。要反映和计算这种量,光有整数是不够的,也就是说,必须对数的概念进行扩充。在人类的认识史上,这种扩充进行过不止一次。

数的第一次扩充来源于数的另一起源,即度量。从这个观点来看,数就是用叫做单位的量去度量同类的量的结果。当社会发展到需要对财产、战利品、土地的面积、物体的体积以及时间(因为和时间有关的历法是和农业紧密相关的,而农业长期以来是人类最基本的和最重要的生产形式之一)进行精确度量时,数就必然产生了。用度量的方法不仅能产生整数,而且必然产生分数。所以用度量方式产生的数包括了用数的方式产生的数。世界上几个比较重要的文明起源地,如古希腊、印度、埃及都在其文明发展的早期就已认识了分数。我们中国也是世界上一个重要的文明起源地,而且很重视数学的实用。因此中国人也很早就掌握了分数的实际应用。例如《管子》是春秋初期著名的政治家、军事家、经济学家、哲学家和音乐家所著的一本先秦时独成一家之言的最大的一部杂家著作。其中的地员篇里讨论音乐。说把发“宫”音的管子的长度“三分而益之以一”便得到能发“徵”音的管子的长度。另外一本在公元前三世纪左右写成的“考工记”在讲到制造车轮时,也有“六分其轮祟,以其一为之牙围”“参分牙围而漆其二”等说法。可见我们中国人远在秦朝以前,就已经能掌握分数的实际应用了。

《九章算术》是一本秦汉数百年间数学研究成果的总结性著作。其中有大量和分数有关的问题,例如有一个问题是:今有凫从南海起飞,7 日可到北海;雁从北海起飞,9 日可到南海。今凫雁同时起飞,问经几日相遇?其答案就是一