21 世纪高等院校教材

线性代数

太原理工大学数学系 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线性代数

太原理工大学数学系　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以教育部高等教育面向二十一世纪教学内容和课程体系改革计划为编写依据，结合近年来国内外《线性代数》教材改革、发展的形势及取得的教学成果编写而成. 全书共分为 6 章，主要内容为行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换.

本书可作为大学本科非数学类各专业基础课程线性代数的教材，也可作为非数学类各专业教师、学生及相关工程技术人员线性代数知识方面的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/太原理工大学数学系 编. —北京：科学出版社，2007
21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-020725-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.太…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 188304 号

责任编辑：王　静 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 12 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2007 年 12 月第一次印刷　印张：10
印数：1—7 000　字数：187 000

定价：14.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

众所周知,线性问题广泛存在于科学技术的各个领域,而实际上许多非线性问题,在一定条件下,也可以转化为线性问题.因此,线性代数的理论和方法已成为从事科学研究与技术工作者必不可少的数学知识.特别是随着计算机技术的高速发展与广泛应用,使许多科学技术问题可以通过离散化的数值计算得到定量分析.从而使得以处理离散变量为主的线性代数课程在大学教育中占有越来越重要的地位.

本书是在太原理工大学数学系编写出版的《线性代数》教材的基础上,经过多年使用后,由太原理工大学数学系的三位教授修改而成的.其中第1、2章由杨晋编写,第3、4章由刘进生编写,第5、6章由张建文编写.书中融入了近十年来线性代数教学改革的新成果与教学实践的经验与体会,吸收了许多教师及学生的有益建议.

鉴于线性代数具有较强的抽象性与逻辑性,为帮助读者理解、掌握其中的概念、定理及相互间的关系,从教与学的实际出发,书中对各部分内容作了详尽的说明,并配置了适量的例题与习题,书末给出了部分习题的参考答案.

由于作者水平有限,书中不妥与谬误之处再所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2007年11月

目　　录

第 1 章　行　列　式

本章通过求解线性方程组的消元法引出二阶行列式与三阶行列式的定义. 在此基础上重点介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，并给出行列式的一个重要应用，即用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则. 行列式也是以后各章中常用的基本工具之一.

1.1　行列式的定义

这一节首先通过求解线性方程组的消元法引出二阶行列式与三阶行列式的定义，并在此基础上进行讨论分析，然后给出 n 阶行列式的定义.

1.1.1　二阶与三阶行列式

对二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases}$$

用加减消元法求解，即由 $a_{22}\times$①$-a_{12}\times$②消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

由 $a_{11}\times$②$-a_{21}\times$①消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这个结果可以作为二元一次线性方程组的求解公式. 为了容易记忆和便于推广，我们引入了二阶行列式的概念.

二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

左端记号中有二行二列的 4 个数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，每个元素 a_{ij} 有两个下标 i 和 j. 第一个下标 i 表示该元素所在的行，称为行指标；第二个下标 j 表示该元素所在的列，称为列指标.

上述二阶行列式定义的展开式可用对角线法则来记忆，把 a_{11} 到 a_{22} 连线称为

主对角线，a_{12}到 a_{21}连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积与副对角线上的两元素之积的差. 如图 1.1 所示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

利用二阶行列式的概念，二元一次线性方程组的求解公式中 x_1，x_2 的分母可写成二阶行列式

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

分子也可分别写成二阶行列式

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由线性方程组的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}所得的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1.1 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=4, \\ 2x_1+3x_2=7. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3\times 3-(-2)\times 2=9+4=13,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=4\times 3-(-2)\times 7=12+14=26,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-4\times 2=21-8=13,$$

所以解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{26}{13}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{13}{13}=1.$$

类似地,如果用消元法解三元一次线性方程组,可得出三阶行列式的概念.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

左端记号中有三行三列 9 个数,定义的展开式可用类似对角线法则来记忆,如图 1.2 所示. 即实线相连的 3 个数乘起来前面赋予正号,虚线相连的 3 个数乘起来前面赋予负号,其代数和就是三阶行列式的值.

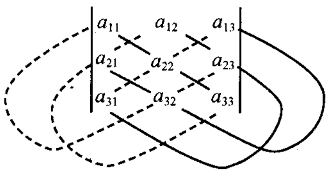

图 1.2

例如

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=(-2)\times 6\times(-1)+(-4)\times 5\times 1+6\times 3\times 4$$
$$-(-2)\times 5\times 4-(-4)\times 3\times(-1)-6\times 6\times 1$$
$$=12-20+72+40-12-36=56.$$

注 对角线法则只适用二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,需要有关全排列的概念及性质.

1.1.2 全排列及其逆序数

定义 1.1.1 自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照一定的次序排成一列,称为一个 n 级全排列,简称排列.

例如,321 是一个 3 级全排列,2413 是一个 4 级全排列.

若 n 级全排列的所有排列的个数用 P_n 表示,易知 $P_n=n!$,即 n 级全排列的总数为 $n!$.

为下面讨论方便,将任意一个 n 级全排列记为 $p_1p_2\cdots p_n$.

对自然数 $1,2,\cdots,n$,规定从小到大的次序为标准次序,这个排列我们称为标准排列(自然排列),即为 $12\cdots n$.

定义 1.1.2　在任一个 n 级全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若其中两个数的先后次序与标准次序不同，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的逆序数. 记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

下面一般地讨论排列逆序数的求法.

显然，标准排列的逆序数等于 0，即 $\tau(12\cdots n)=0$.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列，对于数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 来说，排在它前面比它小的数，与 p_i 不构成逆序；排在它前面比它大的数，与 p_i 构成逆序. 于是，若记排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n$ 中排在 p_i 前面且比 p_i 大的数有 t_i 个，则称 p_i 前面逆序有 t_i 个，那么按照定义 1.1.2 就有

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

这就是这一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

例 1.1.2　求排列 43152 的逆序数.

解　排列 43152 有 5 个元素，其中

4 排在首位，其前面逆序有 0 个，即 $t_1=0$；

3 前面比 3 大的数有 4，故前面逆序有 1 个，即 $t_2=1$；

1 前面比 1 大的数有 4、3，故前面逆序有 2 个，即 $t_3=2$；

5 是最大数，它的前面逆序有 0 个，即 $t_4=0$；

2 前面比 2 大的数有 4、3、5，故前面逆序有 3 个，即 $t_5=3$.

因此排列 43152 的逆序数为

$$\tau(43152)=0+1+2+0+3=6.$$

例 1.1.3　求排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 的逆序数.

解　该排列有 $2n$ 个数，其中前 $n+1$ 个数 $1,3,\cdots,(2n-1),2n$ 从小到大排列，故前面逆序均为 0，而数 $2n-2$ 前面比其大的有 2 个，数 $2n-4$ 前面比其大的有 4 个，……，数 2 前面比其大的有 $2n-2$ 个，故所求排列的逆序数为

$$\tau(13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1).$$

定义 1.1.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如排列 43152 是偶排列，排列 321 是奇排列，标准排列 $12\cdots n$ 是偶排列.

下面对排列中元素之间的位置关系作分析，引入对换概念.

定义 1.1.4　在一个排列中，把任意两个数的位置对调，而其他数的位置不变，就得到一个新的排列，对于排列所施行的这样一个变换叫做一个对换. 将相邻的两个数对换，叫做相邻对换.

例如，排列 3124，经过数 3 和 4 的对换，变成新排列 4123. 易知 3124 为偶排列，而 4123 为奇排列。一般地，我们有

定理 1.1.1　对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

根据定理 1.1.1 知，经过奇数次对换后，排列改变其奇偶性；经过偶数次对换后，排列不改变其奇偶性. 因标准排列是偶排列，于是有

推论 奇排列调成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

将所有 n 级全排列按照每个排列的奇偶性分类，可以得到

定理 1.1.2 所有 n 级全排列中($n\geqslant 2$)，奇排列和偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

1.1.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的结构，由三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.1.1}$$

我们容易得到(1.1.1)式右端是 6 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积. 因此每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中行指标的排列为标准排列 123，列指标的排列 $p_1p_2p_3$ 为数 1,2,3 的某个排列，这样的排列共有 $3!=6$ 个，正好对应三阶行列式中的各项.

再来考察每一项的符号，(1.1.1)式右端中前面三项取正号，它们的列指标排列依次是 123,231,312，这些都是偶排列；后面三项取负号，它们的列指标排列依次是 132,213,321，这些都是奇排列. 因此各项所取的符号可写成$(-1)^t$，其中 t 是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，或写成$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

综合以上分析我们知道三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和.

于是三阶行列式(1.1.1)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中和号$\sum$表示对 1,2,3 这三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 进行求和.

根据三阶行列式这一定义形式，可以把行列式概念推广到 n 阶的情形.

定义 1.1.5 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，$n$ 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.1.2}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum$表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 进行求和.

一般行列式记为 D，或记为 $D=|a_{ij}|$，其中数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为行列式 D 的位于第 i 行第 j 列的元素.

用此定义所得到的二阶和三阶行列式，显然与前面给出的定义是一致的.

当 $n=1$ 时，一阶行列式$|a|=a$. 注意与数 a 的绝对值区别开.

下面看几个特殊行列式的例子.

例 1.1.4　证明

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中未写出的元素都是 0.

证明　(1) 显然，由定义可知此行列式除了$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项外，其他项都含有 0 元素，故其他项的值均为 0，由于 $\tau(12\cdots n)=0$，从而得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即该行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积.

(2) 类似于(1)，该行列式中除了$(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$一项外，其他项都为 0. 而此项的列指标排列为 $n(n-1)\cdots 21$，它的逆序数

$$t=\tau(n(n-1)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

应该注意的是乘积 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 所带的符号与行列式的阶数有关.

例 1.1.4 中的行列式,除了对角线上的元素以外,其他的元素全为 0,这种行列式我们称为对角行列式. 它的计算比较方便.

例 1.1.5 证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 对行列式 D 中的任意一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,当 n 个元素 a_{1p_1}, a_{2p_2}, $\cdots$, a_{np_n} 中有一个等于 0 时,则该项为 0,故只需计算那些可能不为 0 的项即可.

在 D 的第 n 行中除了 a_{nn} 外,其他元素均为 0,因此只能取 $p_n=n$;在第 $n-1$ 行中除了 a_{n-1n-1} 和 a_{n-1n} 两个元素外,其他元素均为 0,因此 p_{n-1} 可以取 $n-1$ 和 n,而前面已取 $p_n=n$,所以只能取 $p_{n-1}=n-1$,……,依次类推,只能取 $p_2=2$, $p_1=1$,这样 D 中可能不为零的项就只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,这里 $t=\tau(12\cdots n)=0$,故得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在例 1.1.5 中的行列式,它的主对角线以下的元素都为零,这种行列式称为上三角形行列式. 类似地,主对角线以上的元素都为零的行列式称为下三角形行列式. 用与上三角形行列式相仿的证明,对下三角形行列式我们也有相同的结果为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角形行列式与下三角形行列式统称为三角形行列式. 在计算行列式时,常常先把行列式化为三角形行列式,然后再用上述结果计算之.

例 1.1.6 求下列行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

解 在4阶行列式 D 的所有项中,除 $aceg$、$bcef$ 这两项外,其余项都为0. 而 $aceg$ 的列指标排列为1234是偶排列;$bcef$ 的列指标排列为4231,逆序数 $\tau(4231)=5$,它是奇排列,所以得到

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}=aceg-bcef.$$

为了使用起来方便,下面给出 n 阶行列式定义的另一种表示形式.

设

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

对 D 中的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$,行指标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列,列指标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 为某一个排列,$t=\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$. 现在交换乘积中的两个元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 的位置,则这一项的值不会变,可写成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这时该项的行指标排列为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$,列指标排列为 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$. 它们都是由原来的排列经过一次相应对换而得到的,所以排列的奇偶性同时改变,但它们的逆序数之和不会改变奇偶性,即有

$$(-1)^t=(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}.$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}. \tag{1.1.3}$$

将乘积中的两个元素交换一次有这样的结论,那么交换多次(1.1.3)式也是成立的. 于是经过若干次交换后,我们总可使得列指标排列由 $p_1p_2\cdots p_n$ 变为 $12\cdots n$,而行指标排列则由 $12\cdots n$ 变为某一排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 设 $s=\tau(q_1q_2\cdots q_n)$,那么就有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

这里

$$(-1)^t=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^s.$$

显然,这里的排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 是由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定,且不同的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应不同的排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 根据这样的对应,由 $n!$ 个项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 就对应得到 $n!$ 个项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$,即为 $q_1q_2\cdots q_n$ 所有可能排列对应的项,于是有

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

因此我们得到行列式的一个等价的定义

定义 1.1.6 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 可定义为

$$D=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中 $s=\tau(q_1q_2\cdots q_n)$，$\sum$表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 进行求和.

习 题 1.1

1. 用二阶行列式求解二元线性方程组

$$\begin{cases}5x_1+4x_2=22,\\2x_1-3x_2=-5.\end{cases}$$

2. 设三阶行列式为

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&x\\1&8&x^2\end{vmatrix},$$

计算 $f(x)$，并求方程 $f(x)=0$ 的全部根.

3. 求下列全排列的逆序数，并说明其奇偶性.

(1) 4312；

(2) 365412；

(3) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$.

4. 已知 n 阶全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 k，求 n 阶全排列 $p_np_{n-1}\cdots p_1$ 的逆序数，如果 k 是偶数，试讨论全排列 $p_np_{n-1}\cdots p_1$ 的奇偶性.

5. 写出由排列 315462 到排列 123456 所作的对换.

6. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}$ 的项.

1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，但根据行列式的定义，计算一个 n 阶行列式要求出 $n!$ 个项的代数和，而每一项要计算 n 个元素的乘积，显然当 n 比较大时，这样的计算量是很大的，因此我们有必要讨论行列式的其他计算方法.

在这一节，我们给出行列式的运算性质，并利用这些性质可以得到行列式一些简化的计算方法.

1.2.1 行列式的性质

设行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

记行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即把 D 的各行换成同序号的列(即行列互换),所得到的行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式. 显然,D 与 D^{T} 是互为转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 记 $D=|a_{ij}|$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=|\,b_{ij}\,|=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则有元素 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

由行列式定义即得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D.$$

由性质 1 知,行列式中“行”与“列”具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然,故下面的讨论中只对其中一种情形说明即可.

性质 2 互换行列式的其中两行(列),所得行列式与原行列式差一符号.

证明 设

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

是由行列式 $D=|a_{ij}|$ 交换 $i,j(i<j)$ 两行得到的,那么对 $p=1,2,\cdots,n$ 有

$$b_{ip}=a_{jp},\quad b_{jp}=a_{ip},\quad b_{kp}=a_{kp}\quad (k\neq i,j).$$

于是有

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $t=\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$,最后一式中的行标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是标准排列,列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 是由标排 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 经一次对换得到的. 设 $s=$

$\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$，则由对换性质有$(-1)^t=-(-1)^s$，从而

$$D_1=-\sum(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论 1 如果行列式中有两行(列)完全相同，那么行列式等于零.

证明 交换行列式 D 中相同的两行，由性质 2 有 $D=-D$，于是得 $D=0$.

性质 3 将行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以数 k，等于用数 k 乘此行列式.

证明 记行列式 $D=|a_{ij}|$，用数 k 乘以行列式 D 的第 i 行所有的元素，得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义即得

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 2 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

由推论 1 和推论 2 即得下列结论.

推论 3 如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例，那么行列式等于零.

性质 4 如果行列式的某一行(列)元素都是两个数之和，那么可以把行列式表示成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 根据行列式的定义即得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n}=\text{右端}. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式某一行(列)的元素同乘以数 k 加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 设原行列式为 D,变形后得到的行列式为 D_1,由性质 4 与推论 3 得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D+0=D.$$

利用行列式的以上性质,我们可以把给定的行列式化为一个三角行列式的形式,从而能够方便地求出行列式的值.

为了能反映出计算行列式过程中所用到的性质,我们给出一些记号,一般用 r_i 表示行列式的第 i 行,用 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$;第 i 行(列)提出公因子 k,记为 $r_i \times \frac{1}{k}\left(c_i \times \frac{1}{k}\right)$;用数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去,记为 $r_i + kr_j$ $(c_i + kc_j)$.

例 1.2.1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-r_2} 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{vmatrix}$$