课程与教学论
系列教材

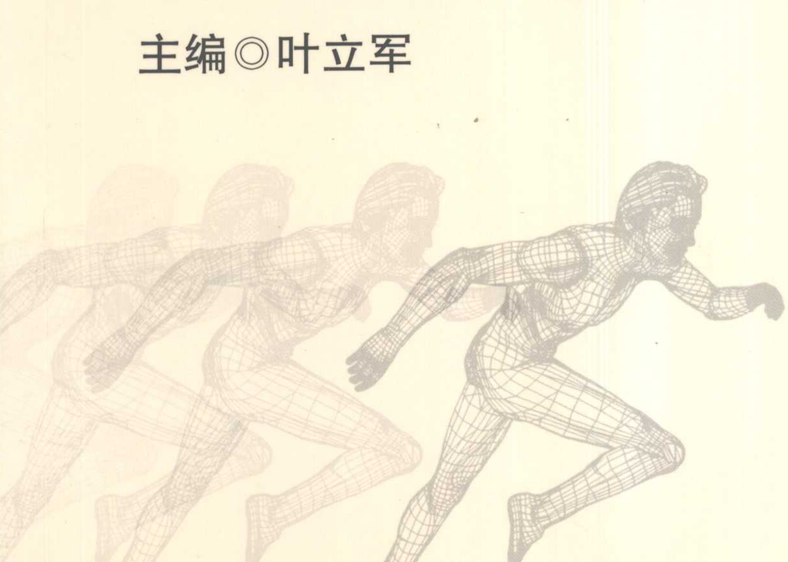
另配学习指导

初等数学研究

高等师范院校教材

GaoDengShiFan YuanXiaoJiaoCai

主编◎叶立军



华东师范大学出版社

课程与教学论系列教材

初等数学研究

主编　叶立军
编著　叶立军　石赛英
　　　林永伟　夏卫锋

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究/叶立军主编.—上海：华东师范大学出版社，2008
(课程与教学论系列教材)
ISBN 978-7-5617-5980-6

Ⅰ.初… Ⅱ.叶… Ⅲ.①初等数学—教学研究—师范大学—教材②初等数学—教学研究—中小学 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第050448号

课程与教学论系列教材
初等数学研究

主　　编　叶立军
责任编辑　朱建宝
审读编辑　徐　金
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司印刷
开　　本　787×1092　16开
印　　张　17.75
字　　数　352千字
版　　次　2008年5月第1版
印　　次　2008年5月第1次
印　　数　4100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5980-6/G·3464
定　　价　29.80元

出 版 人　朱杰人

前 言

时代已经步入21世纪，义务教育阶段的数学课程标准已经开始全面实施，《高中数学课程标准(实验)》也已经于2004年9月在山东、海南、宁夏、广东开始实验.在这场史无前例的课程改革中，数学教师是实施数学课程标准的主体，是推行数学课程改革的关键.新的数学课程需要新型的数学教师.教师教育要为基础教育课程改革与发展提供良好的师资保证.2001年6月，教育部颁布的《基础教育课程改革纲要(试行)》特别强调:"师范院校和其他承担基础教育师资培养和培训任务的高等院校和培训机构应根据基础教育课程改革的目标与内容，调整培养目标、专业设置、课程结构，改革教学方法."

"初等数学研究"是数学与应用数学专业的专业课.它是在学生掌握了一定的高等数学理论知识的基础上，继心理学、教育学之后而开设的.本课程从中学数学教学的需要出发，将基本问题分成若干专题进行研究，在内容上适当加深和拓广，在理论、观点、思想、方法上予以总结提高，并着重解决理论方面的问题.通过本课程的学习，广大数学教师和师范生，能够把这些基本精神和理念创造性地落实到今后的教育教学实践中去，能够从时代所赋予的历史使命出发，切实理解基础教育课程改革的精神，努力学习新课程的内容，为开创基础教育课程改革和教师教育改革发展的新局面作出自己应有的贡献.

随着高等教育改革的不断深入，大多数师范院校都把初等代数与初等几何合并成"初等数学研究"一门课程来授课，而当前许多教材仍把初等代数和初等几何分开编写，为此，我们在编写过程中，在系统研究初等数学的内容、体系、方法的同时，将"初等代数"、"初等几何"这两部分内容进行有机整合，以便于在"初等数学研究"教学中合理安排课时.同时，本书将式与不等式编成一章，还把方程与函数编成一章，以便于利用数学思想处理初等数学问题.

本书分为上下两篇，上篇为初等代数研究，下篇为初等几何研究.通过本课程的学习，了解初等数学的研究对象，明确初等数学在数学学科中的地位、作用以及本课程与中学数学的联系;理解初等数学中的概念、原理、法则、方法等;掌握初等数学的理论体系和结构以及初等数学中的重要的思想方法;学会运用高等数学的理论和观点分析研究初等数学，熟练地运用重要的思想方法解决初等数学中的问题.

本书的框架设计、内容安排、呈现方式及陈述方式均体现数学新课程标准的理念，内容力求反映数学理论前沿. 同时，本书定位明确、内容丰富、选材合理、结构严谨、叙述通俗，具有科学性、实用性、时代性、学术性等特点.

本书可作为高等师范院校培养全日制本科生、研究生、教育硕士的教材或参考书，也可作为数学教师培训的教材，也适合中小学数学教师、教研员、中小学数学爱好者阅读.

本书由杭州师范大学叶立军老师任主编，第 1 章、第 2 章、第 8 章由石赛英编撰，第 3 章、第 6 章由叶立军编撰，第 4 章、第 5 章由湖州师范学院夏卫锋编撰，第 7 章、第 9 章、第 10 章、第 11 章由林永伟编撰，全书由叶立军统稿.

本书在编撰过程中得到了杭州师范大学理学院领导的支持和帮助，在此深表衷心的感谢. 也感谢华东师范大学出版社朱建宝编辑为本书付出的辛勤劳动.

本书在编撰的过程中，参考了许多专家学者的著作和研究成果，在此深表衷心的感谢.

由于本书作者学识有限，时间仓促，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正.

叶立军

于杭州西子湖畔

2008 年 1 月

目录

第4章 数 列

第5章 排列与组合

第6章 算 法

下篇 初等几何研究

第7章 平面几何问题与证明

第8章 初等几何变换

第9章 几 何 轨 迹

第10章 几何作图问题

第11章 立 体 几 何

上篇

初等代数研究

绪　言

“代数”这个词在公元九世纪初阿拉伯人阿尔·花拉子密的一本数学著作中第一次出现. 顾名思义，代数就是用字母代数，但这仅仅是代数狭义的内容. 随着数学的发展，代数这一概念有了进一步拓广，人们把代数看成是研究代数结构的科学. 即给出某些对象(如向量、矩阵、张量、旋量、超复数等)的集合，给出对象之间的一些运算及这些运算所满足的规律、法则，然后研究这些代数系统的代数性质. 进一步，将对象再抽象化，即研究满足某些运算法则及规律的代数系统，如群、环、域等. 总之，代数的研究内容可表示为

$$\text{代数}\begin{cases}\text{初等代数}\\\text{高等代数}\\\text{抽象代数.}\end{cases}$$

我们为什么要开设初等代数研究这门课呢？这本书中的许多东西我们在中学里或多或少地学到过，但是我们必须注意到这一点，中学代数为了适应中学生的特点，许多地方仅用描述的方法引进数学概念，而许多数学命题未作证明或证明不严格，内容的深度与广度都有一定的局限性，例如圆的面积公式，$2^{\sqrt{2}}$是一个实数等. 未来的中学教师仅仅具备中学代数中所涉及的知识是远远不够的，为了更好地掌握和处理中学教材中的代数知识，必须在理论上了解这些内容的来龙去脉. 当然学习高等数学可以帮助我们理解这些理论性的问题，但是也有一些理论性问题，高等数学中的处理方法与中学代数距离较远，不能直接搬用. 中学教师的重要任务之一是给学生作解释指导，在教学中，主要还是运用初等数学的方法来处理初等数学，因此在这方面的技能与技巧，还得作专门的训练.

第 1 章 数　系

数学研究最基本的对象是现实世界中的数量关系和空间形式. 而数系是研究数量关系的起点,也是初等代数最基础的内容.

本章主要介绍数系的扩展及相关知识,这些知识对中学代数教材的透彻理解十分必要.

§1.1 数的概念的扩展

初等代数研究的基本对象是数,数的概念的历史几乎和人类历史一样久远. 人们最早认识的数是自然数. 自然数的产生,源于人类在生产和生活中计数的需要. 那么怎样由它逐步扩充为整数、有理数、实数、复数呢? 在这一章里,我们将从数学结构的角度,系统精确地从理论上概括数系的形成过程.

在现行的中小学数学教材中,数的扩张过程一般如下:

$$\mathbf{N}\xrightarrow{\text{添 }0}\mathbf{N}_0\xrightarrow{\text{添正分数}}\mathbf{Q}_0^+\xrightarrow{\text{添负分数}}\mathbf{Q}\xrightarrow{\text{添无理数}}\mathbf{R}\xrightarrow{\text{添虚数}}\mathbf{C}.$$

每次扩张都是从测量某种量的实际需要来说明扩张的必要性. 从数学学科本身发展的需要来看,扩张的必要性常从以下两个方面来说明:

(1) 某一运算的逆运算在原有数集中不能完全实施;

(2) 某一方程在原有数集中无解 (例:$x^2=-1$ 在 $\mathbf{R}$ 中无解).

数系扩张的方式一般有两种:

(1) 添加元素法　即把新元素添加到已建立的数系中去,形成新的数系,中小学数学教科书中就是采用这种方式实现数系的扩张的.

(2) 构造法　这是按照代数结构的观点和比较严格的公理系统扩张数系的方法. 一般做法是先从理论上构造一个集合,然后指出这个集合的某个真子集与已知数系是同构的.

设数系 A 扩张后得到新的数系 B,不论采用哪种扩张方法,都应遵循以下原则:

(1) $A\subset B$(A 是 B 的真子集);

(2) 集合 A 中所定义的元素间的一些运算和基本关系,在集合 B 中也有相应

的定义，并且集合 B 中的定义，对于 B 的子集 A 中的元素来说，与原来集合 A 中的定义完全一致；

(3) 在 A 中不是总能施行的某种运算或无解的某类方程，在集合 B 中总能施行或有解；

(4) 在同构的意义下，集合 B 应当是集合 A 的满足上述三条原则的最小扩张.

§1.2 自然数的序数理论

自然数是最简单的，因而也是最早发现并使用的数，自然数是一切其他数系逐步扩充并得以实现的基础. 人类对数系的研究，直到 19 世纪末、20 世纪初才有了严格的基础. 19 世纪，在公理法的影响下，许多数学家为了给自然数加以严格的定义做了许多工作，其中两位著名的数学家康托、皮亚诺分别提出了自然数基数理论和序数理论. 这里我们仅介绍皮亚诺提出的自然数序数理论.

什么叫做公理法呢？在数学上，总要求每出现一个新概念，都必须加以严格的定义，以使人明白所指的是什么. 每一个定律，无论它多么明显，都必须加以严格的证明，追究它成立的理由. 但是新概念都要用以前明确的旧概念来解释. 旧概念又必须有它自己的定义，如此一直下去是不可能的. 同样，新定理成立必须追究它的前提，而此前提所以成立又需它的原因，如此往上追究，何时终止呢？因此我们不得不事先选定一组基本概念，不加定义，作为解释其余一切概念的本源，同时，事先选定一套基本命题，不加证明，作为其他一切定理的基础. 有了这些以后，我们就可以借助于纯粹的逻辑推理推演出一系列定理，以建立起整个系统. 这就是所谓的公理法思想. 它的要求如下：

(1) 完备性：有了这些定义、公理可推出所有其他性质.

(2) 纯粹性：不容许渗透直观、默契.

(3) 独立性：相互之间不能推出，足够少.

(4) 和谐性：相互不矛盾.

基数理论是以集合作为基本概念，它过多地依赖于集合论的原理，皮亚诺为了克服这些缺陷，在 1889 年提出了自然数的公理，建立了自然数的序数理论.

序数理论采用公理化结构，对自然数的一些最基本的性质作为不加定义的公理，把“后继”作为不加定义的关系，用一组公理来刻划它.

定义 1 集合 $\mathbf{N}$ 中的元素叫做自然数，如果 $\mathbf{N}$ 的元素之间有一个基本关系“后继”(用“$+$”来表示)，并满足下列公理：

(1) $0 \in \mathbf{N}$，且 $\forall a \in \mathbf{N}$，$a^+ \neq 0$；

(2) 对 $\forall a \in \mathbf{N}$，有唯一的 $a^+ \in \mathbf{N}$；

(3) 对 $\forall a \in \mathbf{N}$，a^+ 不是 0；

(4) 对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$,若 a^+ 与 b^+ 相同,则 a 等于 b,记为 $a = b$;

(5) 归纳公理:如果 $M \subseteq \mathbf{N}$, 且

1° $0 \in M$;

2° 对 $\forall a \in M$,有 $a^+ \in M$,则 $M = \mathbf{N}$.

注:这个公理系统一般叫做皮亚诺(　·Peano)公理系统. 公理(1)说明 0 是自然数,而且是最前面的数. 公理(2)、(3)、(4)说明 $\mathbf{N}$ 中任何数都有唯一的后继数,而且不同数的后继数也不同. 公理(5)是第一条数学归纳法原理的理论依据. 有了这一公理系统,就能把自然数集的元素完全确定下来. 例如从 0 出发,$0^+ = 1$, $1^+ = 2$, …, 这样继续下去,就得到自然数集 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

注:(Ⅰ) 由(2)可知,若 $a = b$,则 $a^+ = b^+$,再由(4) 可知若 $a^+ = b^+$,则 $a = b$,故 $a = b \Leftrightarrow a^+ = b^+$;

(Ⅱ) 由 $1 \in \mathbf{N}$,得 $1^+ \in \mathbf{N}$,记 1^+ 为 2,又由(2) 可知 $2^+ \in \mathbf{N}$,记为 3, …,得 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$.

有了上面的五条公理,我们就可以用纯粹的逻辑推理,得到自然数的其他所有性质.

定义 2　自然数的加法是一种对应关系"+",由于它对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$,有唯一确定的 $a + b \in \mathbf{N}$, 且满足

(1) $a + 1 = a^+$;

(2) $a + b^+ = (a + b)^+$.

这样的关系是否唯一,是否存在? 我们有:

定理 1　自然数的加法是唯一存在的.

证　1° 唯一性

假设存在两种对应关系"+"与"$\oplus$"都满足定义 2,即对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$,都有唯一确定的 $a + b \in \mathbf{N}$ 及 $a \oplus b \in \mathbf{N}$, 且分别满足

(1) $a + 1 = a^+$, $a \oplus 1 = a^+$;

(2) $a + b^+ = (a + b)^+$, $a \oplus b^+ = (a \oplus b)^+$.

下证关系 "+" 与"$\oplus$" 是一致的,即证对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$, $a + b = a \oplus b$.

下面用归纳公理证之.

固定 a,设使 $a + b = a \oplus b$ 成立的所有 b 组成的集合为 M,显然 $M \subseteq \mathbf{N}$.

由(1)可知, $a + 1 = a \oplus 1$,所以 $1 \in M$.

假设 $b \in M$,即 $a + b = a \oplus b$,下证 $b^+ \in M$,即证 $a + b^+ = a \oplus b^+$.

由公理(2)知 $(a + b)^+ = (a \oplus b)^+$,又由(2) 知$(a + b)^+ = a + b^+$, $(a \oplus b)^+ = a \oplus b^+$,所以 $a + b^+ = a \oplus b^+$,所以 $b^+ \in M$.

由归纳公理得 $M = \mathbf{N}$,即对 $\forall b \in \mathbf{N}$, $a + b = a \oplus b$,由于 a 的任意性,知对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$,有 $a + b = a \oplus b$.

2° 存在性

我们规定对 $\forall a \in \mathbf{N}$, $a+1 \triangleq a^{+}$，显然结果唯一. 假设 $a+b$ 已唯一规定，则令 $a+b^{+} \triangleq (a+b)^{+}$.

注：这种定义称为递归定义. 根据归纳公理，我们对所有 $b \in \mathbf{N}$ 都已定义，由 a 的任意性，对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$; $a+b$ 都已定义.

显然如此定义的关系"+"满足定义 2 的所有条件.

例 1 证明：$2+3=5$.

证 略.

定理 2(加法结合律) 对 $\forall a$、b、$c \in \mathbf{N}$，总有 $a+(b+c)=(a+b)+c$.

证 固定 a、b，设使上式成立的所有 c 组成的集合为 M, $M \subseteq \mathbf{N}$.

由于 $a+(b+1)=a+b^{+}=(a+b)^{+}=(a+b)+1$，得 $1 \in M$.

假设 $c \in M$，即 $a+(b+c)=(a+b)+c$，下证 $c^{+} \in M$，即证 $a+(b+c^{+})=(a+b)+c^{+}$.

由于 $a+(b+c^{+})=a+(b+c)^{+}=[a+(b+c)]^{+}=[(a+b)+c]^{+}=(a+b)+c^{+}$，故 $c^{+} \in M$.

所以 $M=\mathbf{N}$，即对 $\forall c \in \mathbf{N}$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$，又由 a、b 的任意性，知对 $\forall a$、b、$c \in \mathbf{N}$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$.

定理 3(加法交换律) $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$，总有 $a+b=b+a$.

定义 3 自然数的乘法是一种对应关系"·"，由于它对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$，有唯一确定的 $a \cdot b \in \mathbf{N}$，并且

(1) $a \cdot 1=a$;

(2) $a \cdot b^{+}=a \cdot b+a$.

定理 4 自然数的乘法是唯一存在的.

例 2 证明：$2 \cdot 3=6$.

证 略.

定理 5(右分配律) 对 $\forall a$、b、$c \in \mathbf{N}$，总有 $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

证 取定 a、b，设使上式成立的所有 c 所成的集合为 M, $M \subseteq \mathbf{N}$.

因为 $(a+b) \cdot 1=a+b=a \cdot 1+b \cdot 1$，所以 $1 \in M$.

假设 $c \in M$，即 $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$，则

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot c^{+} &= (a+b) \cdot c+(a+b)=(a \cdot c+b \cdot c)+(a+b) \\ &= (a \cdot c+a)+(b \cdot c+b)=a \cdot c^{+}+b \cdot c^{+},\end{aligned}$$

所以 $c^{+} \in M$，由归纳公理知 $M=\mathbf{N}$. 又由 a、b 的任意性，知 $\forall a$、b、$c \in \mathbf{N}$，有

$$(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c.$$

定理 6(乘法交换律) 对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$，总有 $a \cdot b=b \cdot a$.

证 固定 b，设使上式成立的所有 a 组成的集合为 M, $M \subseteq \mathbf{N}$. 下证 $1 \in M$，即证

$$1 \cdot b = b \cdot 1.$$

设使上式成立的所有 b 组成的集合为 M', $M' \subseteq \mathbf{N}$,因为 $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$, 所以 $1 \in M'$,

假设 $b \in M'$,即 $1 \cdot b = b \cdot 1$;下证 $b^+ \in M'$,因为 $1 \cdot b^+ = 1 \cdot b + 1 = b \cdot 1 + 1 = b + 1 = b^+ = b^+ \cdot 1$,所以 $b^+ \in M'$,所以 $M' = \mathbf{N}$,即对 $\forall b \in \mathbf{N}$,有 $1 \cdot b = b \cdot 1$,即 $1 \in M$.

假设 $a \in M$,即 $a \cdot b = b \cdot a$,下证 $a^+ \in M$,即证 $a^+ \cdot b = b \cdot a^+$.

因为 $a^+ \cdot b = (a+1) \cdot b = a \cdot b + b = b \cdot a + b = b \cdot a^+$,所以 $a^+ \in M$,即$M = \mathbf{N}$,即对 $\forall a \in \mathbf{N}$,有 $a \cdot b = b \cdot a$.

由于 b 的任意性,知对 $\forall\ a、b \in \mathbf{N}$,有 $a \cdot b = b \cdot a$.

定理 7 自然数的乘法满足结合律.

自然数公理中的"后继"已经指出了 a 与 a^+ 的顺序,我们可以对任意两个自然数规定它们的顺序,使之与两个相邻数已有的顺序一致.

定义 4 设 $a、b \in \mathbf{N}$,若存在 $k \in \mathbf{N}$,使得 $a = b + k$,则称 a 大于 b,记为 $a > b$,也称 b 小于 a,记为 $b < a$.

定理 8 自然数的顺序关系具有对逆性、传递性和全序性.

(1) 对逆性:对 $\forall a、b \in \mathbf{N}$,当且仅当 $a < b$ 时,$b > a$;

(2) 传递性:对 $\forall a、b \in \mathbf{N}$,若 $a < b$, $b < c$,则 $a < c$;

(3) 全序性:对 $\forall a、b \in \mathbf{N}$,在 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 中有且仅有一个成立.

证 (仅证(3))先证 对 $\forall a、b \in \mathbf{N}$,在 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 中有且仅有一个成立.

假设 $a < b$, $a = b$ 同时成立,由定义 4 知,若 $a < b$,则存在 $k \in \mathbf{N}$,使 $b = a + k$,而 $a = b$,所以得 $a = a + k$,这是不可能的. 同理可证 $a = b$ 与 $a > b$ 及 $a < b$ 与 $a > b$ 也都不能同时成立.

再证在 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 中总有一个成立. 取定 a,设使它们中总有一个成立的所有 b 组成的集合为 M, $M \subseteq \mathbf{N}$. 当 $b = 1$ 时,若 $a = 1$,则 $a = b$ 成立,若 $a \neq 1$,则 $a = n^+ = n + 1 = n + b$, $n \in \mathbf{N}$,即 $a > b$ 成立,所以 $1 \in M$.

$\forall b \in M$,即在 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 中总有一个成立,下证 $b^+ \in M$.

(1) 若 $a < b$ 成立,因为 $b < b^+$,所以 $a < b^+$ 成立.

(2) 若 $a = b$ 成立,则 $a^+ = b^+$,即 $a + 1 = b^+$,所以 $a < b^+$ 成立.

(3) 若 $a > b$ 成立,即存在 $k \in \mathbf{N}$,使 $a = b + k$.

若 $k = 1$,则 $a = b^+$ 成立.

若 $k \neq 1$,则 $k = m^+ = m + 1$,所以 $a = b + m + 1 = m + b^+$,所以 $a > b^+$ 成立.

由(1)、(2)、(3)知 $b^+ \in M$,所以 $M = \mathbf{N}$.

定理 9(加法单调性) 若 $a、b、c \in \mathbf{N}$, 则

(1) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$;

(2) $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$;

(3) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

上述命题为分段式命题，它的条件分成若干个互不相容的部分，对应的结论也分成互不相容的部分，证分段式的命题只要证充分性即可.(证略)

定理 10 设 a、b、$c \in \mathbf{N}$，则

(1) 当且仅当 $a=b$ 时，$ac=bc$;

(2) 当且仅当 $a<b$ 时，$ac<bc$;

(3) 当且仅当 $a>b$ 时，$ac>bc$.

证 略.

下面我们来看自然数的三条性质.

定理 11(自然数列的离散性) 任意两个相邻自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b，使 $a<b<a^+$.

证 假设存在 $b \in \mathbf{N}$，有 $a<b<a^+$，由 $a<b$ 知，存在 $k \in \mathbf{N}$，使 $b=a+k \geqslant a+1=a^+$，因此与 $b<a^+$ 矛盾.

定理 12(阿基米得性质) 对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$，必有 $n \in \mathbf{N}$，使 $na>b$.

证 事实上取 $n=b^+$ 即可. 因为 $na=b^+a=ba+a>ba \geqslant b$.

定理 13(最小数定理) $\mathbf{N}$ 的任何一个非空子集 A 中必有最小数.

证 假设非空集合 $A \subseteq \mathbf{N}$，但在 A 中没有最小数. 令所有小于 A 中任何一个数的自然数组成的集合为 M，$M \subseteq \mathbf{N}$. 因为 $1 \notin A$，所以 $1 \in M$.

假设 $m \in M$，现证 $m^+ \in M$. 若 $m^+ \notin M$，则在 A 中必有 a_1，使得 $m^+ \geqslant a_1$. 但因 A 中无最小数，所以必有 $a_2 \in A$，使 $a_1>a_2$，即 $m^+>a_2$，由此得 $m \geqslant a_2$. 这与 $m \in M$ 矛盾，所以 $m^+ \in M$，所以 $M=\mathbf{N}$.

由于 A 非空，知存在自然数 $t \in A$，又因为 $t \in \mathbf{N}=M$，于是有 $t<t$，这不可能. 得证.

定理 14 最小数定理与归纳公理是等价命题.

最后，我们看自然数的减法与除法.

定义 5 设 a、$b \in \mathbf{N}$，若 $\exists x \in \mathbf{N}$，使 $b+x=a$，则称 x 为 a 减去 b 的差，记作 $a-b$. 这里 a 叫做被减数，b 叫做减数. 求两数差的运算叫做减法.

由定义知 $b+(a-b)=a$.

由定义 4 和定义 5，得

定理 15 对 $\forall a$、$b \in \mathbf{N}$，当且仅当 $a>b$ 时，$a-b \in \mathbf{N}$. 如果 $a-b$ 存在，那么它是唯一的.

证 若差 $a-b$ 存在，则 $b+x=a$ 有解，且 $x \in \mathbf{N}$，由定义 4 知 $a>b$. 若 $a>b$，则 $\exists k \in \mathbf{N}$，使 $a=b+k$，即 k 是 $b+x=a$ 的解，由定义 5 知 $a-b$ 存在.

下证唯一性:

若 $b+x=a$ 有两个解 x'、x''，即