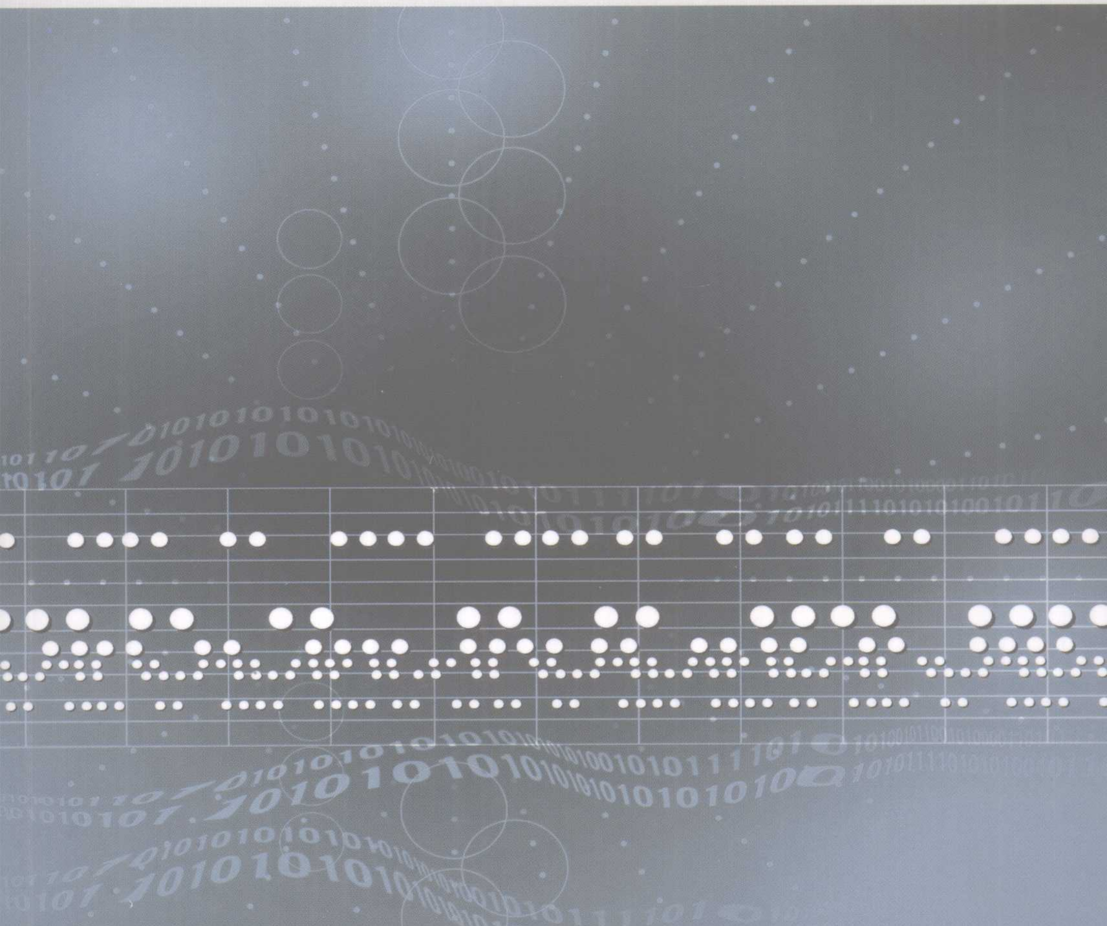
黄时中 著

GAOZIXUAN
ZIYOU LIZI HE CHANG

高自旋自由粒子和场



安徽人民出版社

GAOZIXUAN
ZIYOU LIZI HE CHANG

高自旋自由粒子和场

黄时中 著

安徽人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高自旋自由粒子和场/黄时中著．—合肥：安徽人民出版社，2006．12

ISBN 7－212－02659－X

Ⅰ．高…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．高自旋态—粒子—研究
Ⅳ．O572．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 144474 号

高自旋自由粒子和场

黄时中　著

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：安徽合肥市金寨路 381 号九州大厦　　邮　编：230063
发 行 部：0551－2833066　0551－2833099（传真）
组　　编：安徽师范大学编辑部　电话：0553－3883578　3883579
经　　销：新华书店
印　　制：安徽芜湖新华印务有限责任公司
开　　本：965×1270　1/32　印张：6．25　　字数：146 千
版　　次：2006 年 12 月第 1 版　　2006 年 12 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 7－212－02659－X
定　　价：17．50 元

中文摘要

低自旋(自旋为 0、1/2 和 1)量子场论是物理学中揭示微观运动奥秘的重要理论,将这一理论体系拓展到高自旋情形一直是人们关注的问题。这是因为人们希望在理论上能够建立起一个完整的场论体系,在应用上能够利用相关的结论来对众多的高能和中能物理过程进行计算和分析。本书系统地论述了高自旋自由粒子和场的基本理论,包括高自旋自由粒子的波动方程、波函数、投影算符和传播子理论,其中每一个主要部分都包含了作者近几年来的研究成果。更具体地说,本书的主要内容由如下四个部分组成。

首先,我们论证了几种典型的高自旋自由粒子的波动方程之间的等价性。我们从 Bargmann-Wigner(B-W)方程组出发,严格导出了自旋为整数的自由粒子所满足的 Klein-Gordon(K-G)方程和自旋为半整数的自由粒子所满足的 Rarita-Schwinger (R-S)方程,同时导出了所有的辅助条件。这一工作扩展了 Salam 关于自旋为 3/2 的 B-W 方程与 R-S 方程等价的结论,一般地证明了:对于自旋为整数的粒子,B-W 方程与 K-G 方程等价;对于自旋为半整数的粒子,B-W 方程与 R-S 方程等价。Salam 证明自旋为 3/2 的 B-W 方程与 R-S 方程等价时所用的方法是先考虑波函数的对称性再考虑波函数所满足的方程,这种方法很难推广到自旋为任意半整数或整数的情形。我们的方法是先考虑波函数所满足的

方程再考虑波函数的对称性。采用这一方法后不仅解决了困难，而且简化了计算工作量。我们的具体的做法是从低自旋情形开始，一步一步地从 B-W 方程出发严格导出 K-G 方程和 R-S 方程。这一推导过程的特色是能够严格地、逐步地从 B-W 方程导出 K-G 方程和 R-S 方程中所含的一系列辅助条件(或约束条件)。

其次，我们给出了严格求解 K-G 方程和 R-S 方程的方法，解出了自旋为任意整数和任意半整数的粒子在坐标表象和动量表象中的波函数(既包含正能部分又包含负能部分)。与 Auvil 和 Brehm 以及 Chung 等采用先构造波函数形式再验证它满足 K-G 方程或 R-S 方程的做法不同，我们是在坐标表象和动量表象中严格地系统地求解 K-G 方程和 R-S 方程，从低自旋情形出发一步一步地导出自旋为任意整数和半整数的粒子的波函数的一般形式，即自旋为整数 n 的波函数由 n 个自旋为 1 的波函数 $e^{\mu_i}_{\nu_i}$ 按照角动量耦合方式来表示；自旋为半整数 $n+1/2$ 的波函数由自旋为 n 的波函数和自旋为 1/2 的波函数 u_r 及 ν_r 按照角动量耦合方式来表示，耦合中只保留合成自旋角动量的最大值。我们所解出的正能波函数与 Auvil 和 Brehm 以及 Chung 所构造的波函数形式一致，但我们同时解出了负能波函数。在求解过程中，我们已清楚地展示出如何利用 K-G 方程和 R-S 方程中的辅助条件去掉在角动量耦合中出现的除最大自旋外的其它自旋部分(实际上它们满足波动方程但不满足辅助条件)。

再次，我们利用所解出的波函数，在运动系中导出了自旋为任意整数和半整数的投影算符的表达式，所得结果与 Behrends 和 Fronsdal 依据投影算符的性质所构造出的投影算符形式一致，从而肯定了 Behrends-Fronsdal 投影算符形式的正确性。由于 Chung 以及 Filippini、Fontana 和 Rotondi 等已认定：对于早先构造出的两种投影算符形式(Behrends-Fronsdal 形式和 Zemach 形

式),Zemach 形式是不正确的,所以我们从高自旋粒子的波函数出发直接在运动系中导出高自旋粒子的投影算符实际上是对投影算符的 Behrends-Fronsdal 形式提供了一个必要的、可靠的验证方式。

最后,我们利用所求出的波函数和投影算符,在坐标表象和动量表象中导出了自旋为任意整数和半整数的费曼传播子的表达式,从而将低自旋(自旋为 0、1/2、1、和 3/2)传播子理论推广到了一般情形。我们所给出的高自旋传播子的定义和计算方法与低自旋传播子的定义和计算方法相同,也与 Scadron 的定义和计算原则相一致,但与 Weinberg 的定义和计算方法不同,因而传播子的表达形式与 Weinberg 的表达形式不同。由于 Scadron 并没有导出高自旋费曼传播子的表达式,因而我们是首次导出了这种与低自旋传播子一脉相承的高自旋传播子的表达式。在自由粒子传播子的计算中,一个很重要的困难是,当自旋大 1/2 时,传播子表达式中出现附加项,此附加项的计算相当繁琐,我们已探索出一种逐步计算的方法来解决此困难。对于自旋为 2、3、5/2、7/2 等比较常用的情形,我们给出了传播子及其附加项的具体、实用表达式。

ENGLISH ABSTRACT

The well-established quantum field theory that describe spins 0, 1/2 and 1 has become an important theory in the micro world, to extend this theory to a general theory that could describe arbitrary spin has turned out to be a significant work. Theoretically, such a work is helpful in completing the Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics and the field theories. Practically, the established relativistic wave functions, projection operators and propagators can be applied to the calculation of Feynman diagrams and to amplitude analyses for higher and middle energy physics processes. In this book, basic theory that describes free particles of arbitrary spin is presented systematically; the theory includes higher spin wave equations, wave functions, projection operators and propagators, which have been investigated by the author in recent years. Concretely, the main content in this book are as follows. Firstly, the Klein-Gordon (K-G) equations for an arbitrary integral spin and the Rarita-Schwinger (R-S) equations for an arbitrary half integral spin are derived rigorously from the Bargmann-Wigner(B-W) equations, which have been regarded as the simplest, and the least restrictive (though in many ways the most profound) set of equations.

A profound property of the present derivation is to demonstrate clearly that all the subsidiary conditions imposed on the K-G and R-S equations are included in the B-W equation. This derivation extends the conclusion, recognized by Salam, that the B-W equation is equivalent to the R-S equation in the case of spin 3/2, to a general case that includes any spin, that is, the B-W equation is equivalent to the K-G equation for an arbitrary integral spin, and to the R-S equation for an arbitrary half-integral spin. Such a conclusion could not be followed up by using the method employed by Salam, in which the symmetric conditions are considered first and then the wave equations are considered, because it makes the calculation so difficult that an extension to an arbitrary spin is almost impossible. In our derivation, an alternative procedure is used, namely, the wave equations are considered first and then the symmetric conditions are considered. This procedure could not only overcome the above difficulty and also make the calculation much easier.

Secondly, a systematic method of solving the K-G and the R—S equations derived from the B-W equations is developed, and the explicit helicity wave functions, corresponding to positive and negative energy solutions both in momentum and in coordinate representation for arbitrary integral and half integral spins are deduced in a step-by-step way. The wave functions for an arbitrary integral spin n are expressed by $n\, e^{\mu_1}_{\lambda_1}$ (the wave functions of spin 1) coupled by C. G coefficients, and the wave functions for an arbitrary half-integral spin n+1/2 are expressed by the wave functions of spin n and the Dirac spinors u_r and v_r coupled by C. G coefficients, in which only the coupling correspond to the maximum possible spin is kept. For the positive energy wave functions in momentum representations, our expressions are consistent with those constructed by Auvil and Brehm and S. U. Chung. Except the negative energy wave functions, which do not appear in the Auvil-Brehm formulation, are now deduced, what's new here is the procedure used to solve the K-G and the R-S equations. The method utilized by Anvil and Brehm is that the wave functions are constructed first based on preconceived ideas, and are then found to satisfy the K-G or R-S equations. In our procedure, the wave functions are derived rigorously from these equations themselves both in coordinate and in momentum representation, starting from the lowest spin cases. In this way, it can be shown clearly how the non-maximum spin components are removed by the subsidiary conditions contained in the K-G and R-S equations.

Thirdly, based on the above solutions, a direct derivation of the projection operators for an arbitrary integral and half-integral spin is performed in an arbitrary frame. The results are in agreement with those constructed by Behrends and Fronsdal, who carried out this construction first in a rest system and then generalized to an arbitrary frame, thus the Behrends-Fronsdal formalism is confirmed. Since it has been recognized by Chung and by Filippini and Fontana and Rotondi that among the earlier works of constructing the higher spin projection operators by Behrends and Fronsdal and by Zemach, the Zemach formulation is incorrect because it is essentially a non-relativistic one, our direct calculation performed in an arbitrary frame and based on the explicit formula of the wave functions has provided an independent and necessary and reliable check.

Finally, based on the wave functions and projection operators, the Feynman propagator for an arbitrary spin is calculated both in coordinate and in momentum representation. This calculation extended the theory of Feynman propagators for spins 0, 1/2, 1, and 3/2 to a general one. The definition and the method of calculation for the Feynman propagator of higher spin is consistent with that of lower spin and with that suggested by Scadron, but is different from that proposed by Weinberg, thus the formulas for the propagators are different from that derived by Weinberg in form. Since Scadron did not work out explicit expressions for the propagators, our formulas for the propagators are thus the first direct extensions of the lower spin propagators. As is well known in the theories of free-fields, when the spin is larger than 1/2, an additional non-covariant term inevitably appears in the expression of the propagator. The calculation for this additional term is quite complex; however, we have found a systematic way to overcome this difficulty. Explicit expressions for the propagators for spins 2, 3, 5/2 and 7/2, which are often useful for experimentalists, are provided.

引 言

自旋为 0、1/2 和 1 的低自旋量子场论已相当完善，并且早已成为许多应用领域里强有力的工具. 将这一理论体系推广到高自旋情形无论在理论上还是在应用上都是有意义的. 在理论上，它有助于完善玻色—爱因斯坦和费米—狄拉克统计、建立完整的场论体系；在应用上，许多高能物理过程，例如：

$$b_1(1235) \to \omega + \pi, \bar{p}p(^3P_2) \to f_2(1270) + \pi,$$

$$a_3(2050) \to f_2(1270)\pi,$$

$$H \to W^+W^-, J/\Psi \to a_2(1320)\rho\cdots$$

的振幅分析都依赖于高自旋波函数、投影算符和传播子[1-4]. 在建立高自旋理论方面人们已进行了不懈的努力，取得了丰硕的成果. 但是，仍然存在许多问题有待于进一步研究. 本书将系统地论述高自旋自由粒子和场的基本理论，包括高自旋自由粒子的波动方程、波函数、投影算符和传播子理论，其中的每一个主要部分都包含了作者等近几年来的研究成果. 这里，我们先对高自旋粒子波动方程、波函数、投影算符和传播子理论的发展概况作一个扼要的回顾，然后简要介绍本书各部分的主要内容和目的.

1. 高自旋粒子波动方程、波函数、投影算符和传播子理论发展概况

关于高自旋粒子的相对论性波动方程，主要有 Dirac[5]、Fierz

和 Pauli[7]、Rarita 和 Schwinger[8]、Moldauer 和 Case[9]、Bargmann 和 Wigner[10] 以及 Salam[11] 等人的工作.

1936 年,Dirac[5] 建议:在相对论理论中,粒子的自旋角动量可以用六-矢 S 表示,S 的分量是反对称的,$S_{jk}=-S_{kj}$,且满足如下对易关系:

$$
\begin{aligned}
&S_{xy}S_{yz}-S_{yz}S_{xy}=iS_{zx}\\
&S_{xy}S_{xt}-S_{xt}S_{xy}=iS_{yt}\\
&S_{xy}S_{yt}-S_{yt}S_{xy}=-iS_{xt}\\
&S_{xy}S_{yt}-S_{zt}S_{xy}=0\\
&S_{xt}S_{yt}-S_{yt}S_{xt}=-iS_{xy}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

……(将 xyz 进行循环置换得到的对易关系).

若令

$$
\alpha_x=\frac{1}{2}(S_{yz}-iS_{xt}),\alpha_y=\frac{1}{2}(S_{zx}-iS_{yt}),
$$

$$
\alpha_z=\frac{1}{2}(S_{xy}-iS_{zt})\tag{2a}
$$

$$
\beta_x=\frac{1}{2}(S_{yz}+iS_{xt}),\beta_y=\frac{1}{2}(S_{zx}+iS_{yt}),
$$

$$
\beta_z=\frac{1}{2}(S_{xy}+iS_{zt})\tag{2b}
$$

则有

$$
\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=i\vec{\alpha},\vec{\beta}\times\vec{\beta}=i\vec{\beta},[\vec{\alpha},\vec{\beta}]=0\tag{3}
$$

这表明 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 类似于通常的三维空间中的两个独立的角动量.若用 k 和 l 表示这两个角动量的量子数,则有

$$
\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=k(k+1),\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2=l(l+1)\tag{4}
$$

在此基础上,Dirac 建立了一个普适的相对论性波动方程.结论如下:对于质量为 m 自旋不等于零的粒子,其相对论性波函数可以由两部分(Ψ_A 和 Ψ_B)构成,这里 Ψ_A 是具有 $2k$ 个不带点的下指标

和(2l—1)个带点的上指标的旋量 $A^{\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\kappa\lambda\mu\cdots}$，$\Psi_B$ 是具有(2k—1)个不带点的下指标和 2l 个带点的上指标的旋量 $B^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\lambda\mu\cdots}$，这两个旋量对于所有带点的指标是对称的，对于所有不带点的指标也是对称的. 波函数所满足的方程为

$$p^{\dot{\alpha}\kappa}A^{\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\kappa\lambda\mu\cdots} = m'B^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\lambda\mu\cdots} \tag{5a}$$

$$p_{\dot{\alpha}\kappa}B^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\lambda\mu\cdots}, = m''A^{\dot{\beta}\dot{\gamma}\cdots}_{\kappa\lambda\mu\cdots} \tag{5b}$$

其中 m' 和 m'' 是两个常数，且

$$m' = m\sqrt{\frac{k}{l}}, m'' = m\sqrt{\frac{l}{k}}, m'm'' = m^2 \tag{6}$$

$p_{\dot{\alpha}\kappa}$ 是动量算符，即

$$p_{\dot{1}1} = p_t + p_z, p_{\dot{1}2} = p_x - ip_y;$$

$$p_{\dot{2}1} = p_x + ip_y, p_{\dot{2}2} = p_t - p_z \tag{7}$$

1938—1939 年，Fierz 和 Pauli[7] 进一步发展了 Dirac 的理论，提出了改进后的方程. 对于质量为 m 自旋为 n 的粒子，在动量表象中，Fierz 和 Pauli 所给出的波动方程可以表示为

$$(k^2 + m^2)A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\vec{k}) = 0, (\nu_1 = 1,2,3,4) \tag{8a}$$

$$A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(\vec{k}) = A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(\vec{k}) \tag{8b}$$

$$k_\nu A^{\nu\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(\vec{k}) = 0 \tag{8c}$$

$$A^{\nu\nu\nu_3\cdots\nu_n}(\vec{k}) = 0 \tag{8d}$$

其中 $A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\vec{k})$ 为 n 阶张量，k_ν 为四维能—动量的分量，这组方程通常称为 Klein-Gordon 方程(简称 K-G 方程). 在坐标表象中，K-G 方程的形式为

$$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0 \tag{9a}$$

$$A^{\cdots\nu_i\nu_{i+1}\cdots}(x) = A^{\cdots\nu_{i+1}\nu_i\cdots}(x) \tag{9b}$$

$$\partial_{\nu_i}A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(x) = 0 \tag{9c}$$

$$A^{\cdots\nu\cdots\nu\cdots}(x)=0 \tag{9d}$$

对于质量为 m 自旋为 $n+1/2$ 的粒子，在动量表象中，Fierz 和 Pauli 所给出的波动方程为

$$p_{\mu\dot{\alpha}}A^{\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n}_{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n}=mB^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n}_{\mu\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n} \tag{10a}$$

$$p^{\mu\dot{\alpha}}B^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n}_{\mu\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n}=mA^{\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n}_{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n} \tag{10b}$$

1941 年，Rarita 和 Schwinger[8] 建议将质量为 m 自旋为 $n+1/2$ 的粒子的波函数用 n 阶张量一旋量 $\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$（隐去 Dirac 旋量指标）表示，并提出了 $\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 所满足的方程

$$(\partial\!\!\!/+m)\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=0 \tag{11a}$$

$$\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_n}=\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots\mu_n} \tag{11b}$$

$$\gamma_\nu\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=0 \tag{11c}$$

$$\partial_\nu\Psi^{\nu\mu_2\cdots\mu_n}=0 \tag{11d}$$

$$\Psi^{\nu\nu\mu_3\cdots\mu_n}=0 \tag{11e}$$

此即著名的 Rarita-Schwinger 方程（简称 R-S 方程）.

1956 年，Moldauer 和 Case[9] 证明了 R-S 方程(11)与 Fiere-Pauli 方程(10)的等价性. Moldauer 和 Case 指出：利用含有一个带点和一个不带点指标的旋量的变换性质与一个四-矢的变换性质相同的特点，通过将指标 $\dot{\beta}_i$ 和 ϵ_i 配对，可以将 Fiere-Pauli 方程中的旋量 A 和 B 中的 n 个带点的和 n 个不带点的旋量指标用 n 个对称无迹的四-矢指标来进行替换，由此可以将方程(10)转换为方程(11).

1948 年，Bargmann 和 Wigner[10] 提出了质量为 m 自旋为 $S\geqslant\frac{1}{2}$ 的粒子的波函数所满足的方程

$$\begin{aligned}
&(\partial\!\!\!/+m)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta\delta\cdots\tau}(x)=0\\
&(\partial\!\!\!/+m)_{\beta\beta'}\Psi_{\alpha\beta'\delta\cdots\tau}(x)=0\\
&\vdots\\
&(\partial\!\!\!/+m)_{\tau\tau'}\Psi_{\alpha\beta\delta\cdots\tau'}(x)=0
\end{aligned} \tag{12}$$

其中波函数 $\Psi_{\underbrace{\alpha\beta\cdots\tau}_{2S}}(x)$ 是 $2S$ 阶全对称旋量，这组方程称为 Bar-mann-Wigner 方程（简称 B-W 方程）.

1965 年，Salam[11] 等指出：B-W 方程是形式最简单、约束条件最少，从诸多方面来看意义是最为深刻的一组方程. 同时，Salam 等证明了对于自旋为 3/2 的粒子，B-W 方程与 R-S 方程是等价的.

关于对高自旋粒子的波动方程进行求解，主要有 Frishman 和 Gotsman[12]、Auvil 和 Brehm[13] 以及 Chung[1] 等人的工作. 这些工作有三个共同特点：一是普遍地采用 K-G 方程（自旋为整数）和 R-S 方程（半自旋为整数），因为这种形式的方程最易于求解；二是求解方案为先构造出一个波函数再验证此波函数满足 K-G 方程或 R-S 方程；三是只构造正能波函数而未构造负能波函数. 这些工作的要点如下：

1965 年，Frishman 和 Gotsman[12] 首先提出了高自旋粒子波函数的如下构造方案：先在静止系中构造出自旋投影量子数 $M=S$ 的波函数 $|SM\rangle=|SS\rangle$，在此基础上利用关系式

$$S_- \mid SM\rangle = \sqrt{S(S+1)-M(M+1)} \mid S, M-1\rangle$$

将降算符 S_- 反复作用于 $|SS\rangle$ 而得到静止系中其它分量的波函数 $|SM\rangle$；再通过 Lorentz 变换求得运动系中的波函数.

1966 年，Auvil 和 Brehm[13] 提出了比上述方法简单得多的波函数构造方案：利用自旋为 1 的波函数 $e_{\lambda}^{\mu_i}(\vec{k})$ 和自旋为 1/2 的波函数 $u_r(\vec{p})$，按照角动量耦合理论用 Clebsch-Gordan 系数（C-G 系数）进行耦合，在耦合中只保留合成自旋角动量的最大值，则可以构造出如下形式的正能波函数（动量表象）

$$e_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\vec{k}) = \sum_{\lambda} < n-1, m-\lambda, 1, \lambda \mid n-1, 1, n, m > \times e_{m-\lambda}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}(\vec{k}) e_{\lambda}^{\mu_n}(\vec{k}), \; (S=n) \tag{13a}$$

$$U_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\vec{p}) = \sum_r < n, m-r, \frac{1}{2}, r \mid n, \frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, m >$$

$$\times e_{m-\lambda}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}(\vec{p}) u_r(\vec{p}), (S = n+1/2) \qquad (13b)$$

Auvil 和 Brehm 发现如此构造出的波函数恰好自动满足 K-G 方程或 R-S 方程.

1998 年,Chung[1] 指出,对于自旋为整数的情形,Auvil-Brehm 波函数(13a)可以改写成如下更为紧凑的形式:

$$e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(2n)!}}$$

$$\times \sum_{m_0} 2^{m_0/2} \sum_p \left\{ \prod_{i=1}^{m_+} e_1^{\nu_i}(\vec{k}) \prod_{j=m_++1}^{m_++m_0} e_0^{\nu_j}(\vec{k}) \prod_{k=m_++m_0+1}^{m_++m_0+m_-} e_{-1}^{\nu_k}(\vec{k}) \right\}$$

$$(14a)$$

其中

$$m_0 = \begin{cases} 1,3,5,\cdots,n-m & (for\ n-m = odd) \\ 0,2,4,\cdots,n-m & (for\ n-m = even) \end{cases}, \qquad (14b)$$

$$m_\pm = \frac{1}{2}(n \pm m - m_0) \qquad (14c)$$

在(14a)式中,第一个求和表示对 m_0 所有可能值求和,第二个求和表示对

$$\{(1)(1)\cdots(0)(0)\cdots(-1)(-1)\cdots\}$$

的所有置换求和.

关于高自旋粒子的投影算符,主要有 Behrends 和 Fronsdal[14] 以及 Zemach[16] 的工作. 1957-1958 年,Behrends 和 Fronsdal[14] 从 K-G 方程和 R-S 方程出发,给出了高自旋投影算符的基本性质(除归一化条件外,基本性质的数学形式与 K-G 方程和 R-S 方程相似),并且在此基础上提出了高自旋投影算符的构造方式,即先在静止系中进行构造,再推广到任意系. 其要点是利用自

旋为 1 的投影算符

$$P^{\mu\nu}(p)=\sum_{\lambda}e_{\lambda}^{\mu}(\vec{p})\bar{e}_{\lambda}^{\nu}(\vec{p})=\delta_{\mu\nu}-\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^{2}}$$

来构造自旋为任意半整数的投影算符. 利用自旋为整数的投影算符和自旋为 1/2 的投影算符

$$\Lambda_{+}=\sum_{r}u_{r}(\vec{p})\bar{u}_{r}(\vec{p})=\frac{p+im}{2iE},$$

$$\Lambda_{-}=\sum_{r}\nu_{r}(\vec{p})\bar{\nu}_{r}(\vec{p})=\frac{p+im}{2iE}$$

来构造自旋为任意半整数的投影算符. 对于自旋为整数 n 的情形,所构造的投影算符可以表示为

$$\begin{aligned}P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)&=\left(\frac{1}{n!}\right)^{2}\\&\times\sum_{\substack{p(\mu)\\p(\nu)}}\Big[\prod_{i=1}^{n}P^{\mu_i\nu_i}(k)+A_1P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)\prod_{i=3}^{n}P^{\mu_i\nu_i}(k)\\&+A_2P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\nu_3\nu_4}(k)\prod_{i=5}^{n}P^{\mu_i\nu_i}(k)+\cdots\\&+\begin{cases}A_{n/2}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)\cdots P^{\mu_{n-1}\mu_n}(k)P^{\nu_{n-1}\nu_n}(k)\\A_{(n-1)/2}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)\cdots P^{\mu_{n-2}\mu_{n-1}}(k)P^{\nu_{n-2}\nu_{n-1}}(k)P^{\mu_n\mu_n}(k)\end{cases}\\&\qquad\begin{matrix}(for\ even\ n)\\(for\ odd\ n)\end{matrix}\Big]\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$A_r(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{r}\frac{n!}{r!(n-zr)!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2r+1)}\tag{16}$$

对于自旋为整数 $n+1/2$ 的情形,所构造的投影算符可以表示为

$$P_{\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}\left(n+\frac{1}{2},p\right)=\Lambda_{\pm}Q^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}\left(n+\frac{1}{2},p\right)\tag{17a}$$