现代数学基础丛书 4

数理统计引论

陈希孺 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 4

数理统计引论

陈希孺 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是以青年科研工作者作为主要对象而编写的. 本书严格而系统地阐明了数理统计的基本原理，并尽量反映本学科的现代面貌. 关于应用方面只作为解释原理和方法的手段，而不是本书的目的.

本书主要内容有：点估计，假设检验，线性模型和非参数统计等. 书末附有习题.

本书的对象是：数理统计和概率论的青年研究工作者和大学本专业教师、研究生和高年级学生.

现代数学基础丛书；4

数理统计引论

陈希孺 著

责任编辑 黄 南

封面设计 黄华斌 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1981年11月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007年 1 月第三次印刷 印张：45 1/2

印数：12 621—14 620 字数：601 000

ISBN 978-7-03-006047-1

定价：85.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

序　言

本书的目的是用严格的数学语言，对数理统计学的基础，作一个较为详细和较能反映本学科现代面貌的介绍．近几十年来，数理统计学有了长足的进展，出现了不少论述各种分支的严格而内容充实的著作．但是，一般的初等引论性教本，无论在数学的严格性方面，还是在内容的深度和广度方面，都与这些专著和杂志文献有颇大的距离．这种情况给初学者造成了很大的不便．本书的写作就是希望有助于解决这个问题．

本书设想的主要读者是数理统计和概率论的青年研究工作者，大学本专业教师、研究生和高年级学生．有些部分也可以作为统计专业的有关课程的教学参考书．另外，对于那些主要兴趣在于统计的应用而又具备了较好数学基础的人，本书可以作为在理论上提高的参考．

作为一种包含许多统计分支的著作，为使内容不流于空泛，较能反映现代面貌且要将篇幅限制在合理的范围内，在材料的选取上有着一些不大好处理的问题．本书的作法是依据如下的考虑：当一个青年研究工作者进入某一统计专门分支时，他不仅应当具备为阅读该分支的专著和文献所必需的基础，而且应当对其它重要的统计分支的基本内容有切实而非空泛的了解．因此，材料的选择，以普遍需要的公共基础部分为主，对于那些只有在专著中才能妥善处理的问题，则不作过分深入的讨论．例如，线性模型的理论对于回归分析、方差分析和多元分析等统计分支都有重要的意义，本书在线性模型一章中，提供了这个理论的比较广泛和深入的基础．掌握了这个基础就可以顺利地进入上述几个分支．但是，对上述分支的更加专门和特殊的问题的讨论，则不属于本书的范围．同时需要指出，关于哪些内容应列为基础的问题，其看法多少有些因人而异．作者的偏好也难免影响到对某些材料的处理．因此，本书中的某些材料也可能越出了多数人认为是必备基础的范围．例如，

§ 4.3, § 5.5, § 5.6, § 6.1, § 6.3, § 6.4 等节的大部分或一部分.

本书是一本数学著作，在基本概念的表述、问题提法及定理论证上，力求符合现代数学的严格性标准；另一方面，统计又是一门应用性很强的学科，在学习统计理论时，不能仅以数学的严格性为满足，还应当尽量了解其实际背景. 本书因性质所限，不便于涉及过多的直接来自实际的问题. 但是，在概念的统计背景的解释上，也给予了一定程度的注意. 例如，关于无偏估计和 Bayes 估计，其数学定义是简单的，而我们则花了相当的篇幅去解释其统计背景.

为了配合学习，我们选编了一些习题，附于全书之末. 其中一部分比较容易，其它的，除了少数例外，也不需要特殊的技巧. 但要求读者对书中内容有清楚的了解，并在一定程度上能灵活使用. 对初学者来说，在开始时作这种题会有困难，但不要灰心，一定要下最大的功夫，反复思考，尽可能多地解决一些问题.

作为一本基础著作，本书没有编制详尽的参考文献目录. 这一方面是为了节省篇幅，也因为，当读者深入到某一分支的专著时，会在那里找到有关的详细目录. 在正文的叙述中，根据问题的性质有必要征引某一文献时，就在提到的地方注明. 除此之外，我们在书末列举了在写作中参考过的一些著作. 读者会注意到，我们在一些问题上运用了这些著作的叙述方法，采用了其中一些例题、习题，所有这些都不一一加以说明了.

在本书写作过程中，曾与中国科学院数学研究所统计组一些同志交换过意见，参考和使用过他们的某些讲稿. 初稿写成后，成平、项可风、陶波、戴树森、方开太、吴传义、李国英和吴启光等同志进行了仔细的审阅，改正了不少错误和提出了一些改进意见，这对于提高本书质量有很大的帮助，作者谨在此对他们表示衷心的感谢. 由于作者水平所限，书中存在的问题肯定还是不少的，作者恳切地希望专家和读者提出宝贵的批评意见.

陈希孺

1978 年 12 月 10 日

目　录

第一章 预备知识

本章内容分为两部分：第一部分包括前三节，是关于概率论的若干补充知识．这些内容对数理统计很重要．其中第一节的大部分内容，是通常初等教本中也有的，为适应本书需要，我们作了若干补充；第二、三节的内容在一般初等教本中是没有的，但在本书中很常用，不熟悉的读者应多加注意．第二部分包括后三节，都是数理统计基础的重要课题．其中关于判决函数的一节，是对这个理论的一个最初步的介绍，而具体细节将在后面各章作一定的充实．最后两节对统计中应用很广的重要概念——充分统计量与完全统计量，作了较为系统的讨论．切实掌握这个内容对阅读以后各章是很重要的．

§1.1. χ^2 分布，t 分布，F 分布

（一）χ^2 分布的定义及其密度函数的推导

定义 1.1.1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立，$X_i \sim N(a_i, 1)$，$i=1, \cdots, n$，则 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的分布称为具自由度 n、非中心参数

$$\delta=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2_{n,\delta}$．当 $\delta=0$ 时，分布称为中心的，且记为 $X \sim \chi^2_n$．

杨

必须证明，X 的分布只与 n 和 δ 有关，为此先证

引理 1.1.1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 满足定义 1.1.1 中的条件，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶正交阵，$Y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$，$i=1, \cdots, n$，则 $Y_1, \cdots, Y_n$

独立，$Y_i \sim N(b_i, 1)$，$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j$，$i=1, \cdots, n$.

证. 由假定知$(X_1, \cdots, X_n)$的联合密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}.$$

由于 A 的正交性，变换的 Jacobi 为 1，于是由密度函数变换的公式，注意到

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2 = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 = \|A'\boldsymbol{y}-A'\boldsymbol{b}\|^2$$
$$= (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})'AA'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\|^2,$$

此处[1] $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_n)'$，$\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n)'$，$\boldsymbol{b}=(b_1, \cdots, b_n)'$，立即得到$(Y_1, \cdots, Y_n)$的联合密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_i)^2},$$

这就证明了引理中的全部论断.

现在记 $\boldsymbol{T}$ 为一正交方阵，其第一行为$(a_1, \cdots, a_n)/\delta$. 作变换$(Y_1, \cdots, Y_n)' = \boldsymbol{T}(X_1, \cdots, X_n)'$. 依引理 1.1.1，$Y_1, \cdots, Y_n$ 独立，正态，方差为 1，而 $E(Y_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2/\delta = \delta$，当 $i>1$ 时，由 T 的造法知 $E(Y_i)=0$. 于是，由

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = Y_1^2 + Z, \quad \left(Z = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2\right) \qquad (1.1.1)$$

看出 X 的分布只与 n 和 δ 有关.

下面考虑 $X \sim \chi^2_{n,\delta}$ 的概率分布. 以 $k(x|n, \delta)$ 和 $K(x|n, \delta)$ 记 $\chi^2_{n,\delta}$ 的密度和分布函数. 当 $\delta=0$ 时，简记为 $k(x|n)$ 和 $K(x|n)$. 先讨论 $\delta=0$ 的情况. 显然，当 $x \leqslant 0$ 时，$K(x|n)=0$，而当 $x>0$ 时，

$$K(x|n) = P(X<x) = (2\pi)^{-n/2} \int \cdots \int_B \exp\left(-\frac{1}{2}y'y\right) dy.$$

这里 B 是 n 维欧氏空间 R_n 的球体 $\{y: y'y<x\}$，而 $dy = dy_1 \cdots dy_n$. 转化到球坐标，不难看出被积函数将变为 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) e^{-r^2/2} r^{n-1}$

1) 今后总是以不加“′”的向量为列向量.

的形状，且$(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$的积分范围与$r$无关．由此可知

$$K(x|n)=C_n\int_0^{\sqrt{x}} e^{-r^2/2}r^{n-1}dr, \tag{1.1.2}$$

其中C_n只与n有关，为求C_n，令$x\to\infty$，得

$$1=C_n\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}r^{n-1}dr=C_n 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

由此得出C_n，代入(1.1.2)式，两边对x求导，得出，当$x>0$时，

$$k(x|n)=\left(2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}e^{-x/2}x^{\frac{n}{2}-1}. \tag{1.1.3}$$

对$\delta\neq 0$的情况，利用(1.1.1)，可转化为算独立和的密度：以$g(x)$记Y_1^2的密度，则因$Y_1\sim N(\delta, 1)$，有$g(x)=0$，当$x\leqslant 0$，而当$x>0$时，

$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}[\exp(-(\sqrt{x}-\delta)^2/2)\\
&\qquad+\exp(-(\sqrt{x}+\delta)^2/2)]\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}e^{-\delta^2/2}e^{-x/2}(e^{\delta\sqrt{x}}+e^{-\delta\sqrt{x}})\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}e^{-\delta^2/2}e^{-x/2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(\delta\sqrt{x})^i+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(-\delta\sqrt{x})^i\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\delta^2/2}e^{-x/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)!}\delta^{2i}x^{i-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

利用公式

$$\begin{aligned}
k(x|n, \delta)&=\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y|n-1)g(y)dy\\
&=\int_0^x k(x-y|n-1)g(y)dy.
\end{aligned}$$

将(1.1.3)（n改为$n-1$）和(1.1.4)代入，逐项积分，利用关系

$$\begin{aligned}
\int_0^x y^a(x-y)^b dy&=x^{a+b+1}\int_0^1 t^a(1-t)^b dt\\
&=x^{a+b+1}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.
\end{aligned}$$

经过一些简单的整理，得

$$k(x|n,\ \delta)=e^{-\delta^2/2}e^{-x/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^i\frac{x^{i+n/2-1}}{2^{i+n/2}\Gamma(i+n/2)},\quad x>0. \tag{1.1.5}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，当然有 $k(x|n,\ \delta)=0$.

（二）χ^2 分布的基本性质

a）若 $X\sim\chi_n^2$，则 $E(X)=n$，$\mathrm{Var}(X)=2n$.

b）若 $Y_1,\ \cdots,\ Y_m$ 独立，$Y_i\sim\chi^2_{n_i,\delta_i}$，$i=1,\ \cdots,\ m$，则

$$Y=Y_1+\cdots+Y_m\sim\chi^2_{n,\delta},$$

此处
$$n=\sum_{i=1}^m n_i,\quad 而\quad \delta^2=\sum_{i=1}^m\delta_i^2.$$

c）若 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 独立，$X_i\sim N(a_i,\ \sigma^2)$，$i=1,\ \cdots,\ n$，则

$$X=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\sim\chi^2_{n,\delta},\quad \delta^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n a_i^2$$

这些都极易由 χ^2 分布的定义直接证明.

d）若 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 独立同分布，$X_1\sim N(a,\ \sigma^2)$ 而 $n\geqslant 2$，则

$$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$$

（此处及以后我们总用 $\overline{X}$ 表示 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，类似地有 $\overline{Y}$，$\overline{Z}$ 等等），为 χ^2_{n-1}.

证. 作正交方阵

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}, \tag{1.1.6}$$

记 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ \cdots,\ X_n)'$，作变换 $\boldsymbol{Z}=(Z_1,\ \cdots,\ Z_n)'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 则由引理 1.1.1，知 $Z_1,\ \cdots,\ Z_n$ 独立，$Z_i\sim N(b_i,\ \sigma^2)$，$i=1,\ \cdots,\ n$. 由于 $E(\boldsymbol{X})=(a,\cdots,a)'$，由方阵 A 的形状易知 $b_2=\cdots=b_n=0$，又 $Z_1=\sqrt{n}\,\overline{X}$. 所以，由 A 的正交性，有

$$\sigma^2 Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2-Z_1^2=\sum_{i=2}^{n} Z_i^2.$$

于是由 χ^2 分布的定义，知 $Y=\sum_{i=2}^{n} Z_i^2/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$.

e) 若 $X_n\sim\chi_n^2$, $n=1, 2, \cdots$, 则当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow{L} N(0, 1)$$

($\xrightarrow{L}$ 表示依分布收敛)，且 $\sqrt{2X_n}-\sqrt{2n}\xrightarrow{L} N(0, 1)$.

证. 考虑到性质 a)，第一个断言由 χ^2 的定义及古典中心极限定理直接推出. 为证第二个断言，注意

$$P(\sqrt{2X_n}-\sqrt{2n}<x)=P\left(\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}<x+\frac{x^2}{2\sqrt{2n}}\right),$$

再由 $\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow{L} N(0, 1)$, $\frac{x^2}{2\sqrt{2n}}\to 0$ 及正态分布函数的连续性，即得要证的结果.

我们通常用 $\chi_n^2(\alpha)$ 记由关系式 $K(t|n)=1-\alpha$ 确定的 $t(0<\alpha<1)$. 当 n 较大时，性质 e) 可使我们通过正态分布表得到 $\chi_n^2(\alpha)$ 之近似值.

为了讨论下一个性质，定义如下的概念：设 X, Y 的分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(x)$. 若对一切 x 有 $F(x)\leqslant G(x)$ 即 $P(X\geqslant x)\geqslant P(Y\geqslant x)$，则称 X 随机地大于 Y，记为 $X\stackrel{s}{>}Y$.

f) 若 $X_i\sim\chi_{n,\delta_i}^2$, $i=1, 2$, 而 $\delta_1>\delta_2$, 则 $X_1\stackrel{s}{>}X_2$.

证. 容易看出，这个性质当 $n=1$ 时成立. 这只要注意 $N(0, 1)$ 的密度为 $|x|$ 的下降函数就可以知道. 这说明当 $\delta_1>\delta_2$ 时 $K(x|1, \delta_1)\leqslant K(x|1, \delta_2)$（实际成立严格不等号）. 再由

$$K(x|n, \delta)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y|1, \delta)\,dK(y|n-1),$$

推出此性质对任何 n 成立.

（三）正态变量的二次型（χ^2 分布的其它性质）

从定义 1.1.1 看到，χ^2 变量被定义为一些正态变量的平方

和. 平方和是一种特殊的二次型. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立,

$$X_i \sim N(a_i, \sigma^2), \ i=1, \cdots, n.$$

而 A 为一个 n 阶对称方阵, 一般地我们可以考虑二次型 $Y=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的分布问题, 此处 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_n)'$. 显然, 不失普遍性可设 $\sigma^2=1$. 这种二次型在很多统计问题中有重要应用, 此处我们只介绍与 χ^2 分布有关的结果, 较仔细的讨论可参看 R. L. Plackett, Principles of Regression Analysis (Oxford, 1960) 一书第二章.

以下仍继续上一段的编号.

g) 设 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_n)'$, $X_1, \cdots, X_n$ 独立,

$$X_i \sim N(a_i, 1), \ i=1, \cdots, n,$$

记 $\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n)'$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称方阵. 则 $\boldsymbol{Y}$ 服从 χ^2 分布的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 为幂等方阵, 即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 这时 $\boldsymbol{Y}\sim\chi^2_{r,\delta}$, 其中 $r=\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 之秩, 而 $\delta^2=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$.

证. 充分性很容易: 若 $\boldsymbol{A}$ 为幂等, 则因其特征根只能为 0 和 1, 且 1 的个数为 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})=r$, 故存在正交阵 $\boldsymbol{P}$, 致

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

作正交变换 $\boldsymbol{Z}=(Z_1, \cdots, Z_n)'=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$.

由引理 1.1.1, 知 $\boldsymbol{Z}\sim N(\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{I}_n)$. 但

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{Z}=\sum_{i=1}^{r} Z_i^2.$$

由此知 $\boldsymbol{Y}\sim\chi^2_{r,\delta}$, 其中

$$\begin{aligned}\delta^2=\sum_{i=1}^{r}(EZ_i)^2 &= (E\boldsymbol{Z})'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'(E\boldsymbol{Z}) \\ &= (E(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{Z}))'\boldsymbol{A}(E(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{Z})) \\ &= (E\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}(E\boldsymbol{X})=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

必要性的证明要利用特征函数. 首先, 算出 $\lambda\xi^2$ 的特征函数为 $(1-2i\lambda t)^{-1/2}\exp\left(\frac{i\lambda t}{1-2i\lambda t}a^2\right)$, 此处 λ 为常数, 而 $\xi\sim N(a, 1)$.

这不难直接由特征函数的定义算出．由此，利用独立和的特征函数等于各加项的特征函数之积，以及当 $X\sim\chi^2_{n,\delta}$ 时有 $X=Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2$，其中 $Y_1\sim N(\delta,\ 1)$，$Y_i\sim N(0,\ 1)$，$i\geqslant2$，易得 $\chi^2_{n,\delta}$ 之特征函数为

$$(1-2it)^{-n/2}\exp\left(\frac{i\delta^2t}{1-2it}\right), \tag{1.1.7}$$

现设 A 不为幂等，则 A 之非 0 特征根 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r$ 不全为 1．这时因 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\sum\limits_{j=1}^{r}Z_j^2\lambda_j$，$Z_1,\ \cdots,\ Z_r$ 独立，$Z_j\sim N(c_j,\ 1)$［此处 $(c_1,\ \cdots,\ c_n)'=\boldsymbol{P}\ (a_1,\ \cdots,\ a_n)'$］知 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的特征函数为

$$\prod_{j=1}^{r}(1-2i\lambda_jt)^{-1/2}\exp\left(\frac{i\lambda_jt}{1-2i\lambda_jt}c_j^2\right). \tag{1.1.8}$$

显然，要是 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r$（都不为 0）中即使有一个不为 1，(1.1.7) 和 (1.1.8) 决不可能相等．因而这时 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 也不服从 χ^2 分布．

h) 设 $Y=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$Y_1=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}$，分别服从自由度为 m 和 m_1 的 χ^2 分布（不必是中心的）．这里 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ \cdots,\ X_n)'\sim N(a,\ \boldsymbol{I}_n)$．如果 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1\geqslant0$（此处及以后以 $\boldsymbol{B}\geqslant0$ 表 $\boldsymbol{B}$ 为半正定方阵，$\boldsymbol{B}>0$ 表 $\boldsymbol{B}$ 为正定方阵)，且 $\boldsymbol{A}_2$ 不为零方阵，则

$$Y_2=Y-Y_1=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}$$

服从自由度为 $m_2=m-m_1$ 的 χ^2 分布，Y_1，Y_2 独立，且 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0$．

证．由假定知 $\boldsymbol{A}$ 为对称幂等且 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})=m$，故存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$，致 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$．其中 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶方阵．由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1\geqslant0$ 及 $\boldsymbol{A}_1\geqslant0$ 易知必有 $\boldsymbol{D}=0$．因而 $\boldsymbol{C}=0$，即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$．又由假定，$\boldsymbol{A}_1$ 为对称幂等且秩为 m_1，故 $\boldsymbol{B}$ 有同一性质．因此存在 m 阶正交方阵 $\boldsymbol{Q}_1$，致

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{n-m}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交方阵，且

$$\boldsymbol{QPAP'Q'}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{QPA}_1\boldsymbol{P'Q'}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\tag{1.1.9}$$

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{QP}$ 仍为正交阵. 作变换 $\boldsymbol{Z}=(Z_1, \cdots, Z_n)'=\boldsymbol{RX}$, 则由(1.1.9)易见

$$\boldsymbol{X'AX}=\boldsymbol{Z'RAR'Z}=\sum_{i=1}^{m}Z_i^2,$$

$$\boldsymbol{X'A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z'RA}_1\boldsymbol{R'Z}=\sum_{i=1}^{m_1}Z_i^2.$$

因此 $\boldsymbol{X'A}_2\boldsymbol{X}=\sum_{i=m_1+1}^{m}Z_i^2$, $\boldsymbol{A}_2\neq 0$ 表示必有 $m_1<m$. 依引理 1.1.1, $\boldsymbol{Z}\sim N(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{I}_n)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ra}$. 所以立即得出 Y_1, Y_2 独立及 Y_2 服从自由度为 $m-m_1=m_2$ 的 χ^2 分布. 至于 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0$, 可由 (1.1.9) 推出. 因由(1.1.9)显然

$$(\boldsymbol{RA}_1\boldsymbol{R'})(\boldsymbol{RA}_2\boldsymbol{R'})=0.$$

由此注意到 R 的正交性, 即得 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0$.

系 **1.1.1**. 若 $Y_i=\boldsymbol{X'A}_i\boldsymbol{X}$, $i=1, 2$, 都服从 χ^2 分布, 这里 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_n)'\sim N(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{I}_n)$, 则 Y_1 与 Y_2 独立的充要条件为

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0.$$

事实上, 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$, $Y=\boldsymbol{X'AX}$. 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0$, 则

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2'\boldsymbol{A}_1'=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)'=\boldsymbol{O}'=\boldsymbol{O},$$

因此由 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ 的幂等性

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)^2=\boldsymbol{A}_1^2+\boldsymbol{A}_2^2+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\\&=\boldsymbol{A}_1^2+\boldsymbol{A}_2^2=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

即 A 也为幂等的, 但 $A-A_1=A_2\geqslant 0$, 故由性质 h 知 Y_1, Y_2 独立. 反过来, 若 Y_1, Y_2 独立, 则 $Y=Y_1+Y_2$ 也服从 χ^2 分布. 注意到 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1\geqslant 0$, 仍由性质 h 得出 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=0$. 证毕.

值得注意的是, 系 1.1.1 的结论在去掉"Y_i, $i=1$, 2 都服从 χ^2 分布"的假定时仍成立. 证明可参看前面提到的 Plackett 的书.

下述性质在统计上有重要应用.

i) (Cochran 定理). 设 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}$ 则"$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}\sim\chi^2_{n_i,\delta_i}$ 对某个 n_i, δ_i, $i=1,\ \cdots,\ m$, 且

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X},\ i=1,\cdots,\ m$$

相互独立"的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}_i)=n, \tag{1.1.10}$$

当(1.1.10)成立时, 有 $n_i=\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}_i)$, $\delta_i^2=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{a}$, $i=1,\ \cdots,\ m$.

证. 充分性. 设(1.1.10)成立, 记

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}_i)=n_i,\ Q_i=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X},\ i=1,\ \cdots,\ m.$$

由 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}_i)=n_i$ 知 Q_i 可表为

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n_i}\pm(b_{j1}^{(i)}X_1+\cdots+b_{jn}^{(i)}X_n)^2\quad(i=1,\ \cdots,\ m) \tag{1.1.11}$$

的形状, 记号 $\pm$ 表示每项的系数可为 1 或 -1. 以 B 记 n 阶方阵, 其各行向量为

$$(b_{j1}^{(i)},\ \cdots,\ b_{jn}^{(i)}),\quad j=1,\ \cdots,\ n_i,\ i=1,\ \cdots,\ m,$$

则由(1.1.11)知

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{m}Q_i=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X},\ \text{因而}\ \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n,$$

此处 $\boldsymbol{\Delta}$ 为一 n 阶对角阵, 其主对角线上元素可为 1 或 -1. 由 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的行列式 $|\boldsymbol{B}|\neq0$, 故 $\boldsymbol{\Delta}=(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}>0$ (因 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'>0$), 这说明 $\boldsymbol{\Delta}$ 的主对角线上元素不取 -1, 故 $\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{I}_n$. 因而 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交阵. 而表达式 (1.1.11) 中各项系数必为 1. 故若作正交变换 $\boldsymbol{Z}=(Z_1,\ \cdots,\ Z_n)'=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, 则 $\boldsymbol{Z}\sim N(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}$, 而

$$Q_i=\sum_{j=e_{i-1}+1}^{e_i}Z_j^2,\ i=1,\ \cdots,\ m,\quad e_0=0,\ e_i=\sum_{j=1}^{i}n_j,\ i=1,\ \cdots,\ m.$$

由此推出 $Q_i\sim\chi^2_{n_i,\delta_i}$, $i=1,\ \cdots,\ m$. 其中 $\delta_i^2=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{a}$(据性质 g).

必要性 若 $Q_i\sim\chi^2_{n_i,\delta_i}$, $i=1,\ \cdots,\ m$, 则由

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=(Q_1+\cdots+Q_{m-1})+Q_m=\boldsymbol{X}'\left(\sum_{i=1}^{m-1}\boldsymbol{A}_i\right)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{X},$$

应用性质 h $\left(\text{注意由}\ Q_i\sim\chi^2_{n_i,\delta_i}\ \text{知}\ \sum_{i=1}^{m-1}\boldsymbol{A}_i\geqslant0\right)$知