21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

复变函数论

第三版

全程导学及习题全解

主编 王玉玉 王健波

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院……辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYU……BUFUDAO

复变函数论

第三版

全程导学及习题全解

主编 王玉玉 王健波

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

复变函数论（第三版）全程导学及习题全解 / 王玉玉，王健波主编. —北京：中国时代经济出版社，2008.3

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 978-7-80221-524-5

Ⅰ.复…　Ⅱ.①王…②王…　Ⅲ.复变函数论-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.0174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 197405 号

复变函数论（第三版）全程导学及习题全解

王玉玉　王健波　主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地　　址	北京市西城区车公庄大街乙 5 号 鸿儒大厦 B 座
邮政编码	100044
电　　话	(010) 68320825（发行部） (010) 88361317（邮购）
传　　真	(010) 68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　　本	880×1230　1/32
版　　次	2008 年 3 月第 1 版
印　　次	2008 年 3 月第 1 次印刷
印　　张	7.5
字　　数	140 千字
印　　数	1~5000 册
定　　价	10.00 元
书　　号	ISBN 978-7-80221-524-5

内容提要

本书是四川大学数学系钟玉泉先生编写的《复变函数论》(第三版)的参考用书。钟玉泉先生的这本书是本科生在复变函数学习中的经典之作。因此本书也力求从各个方面做的更适合学生课外使用,对复变函数的学习起到指导作用。

为了便于献计献策的阅读使用,本书严格按钟玉泉先生的《复变函数论》(第三版)各章顺序对应编写,每章分以下三个方面。

本章学习指导 全书对每一章进行了系统细致的总结,帮助读者理清整个章节的思路,更好的理解知识点之间的联系,从大局上把握每一章的知识脉络,学后能够很轻松的做到把书本由厚读薄再由薄读厚。

习题全解 本书面通知习题解答方面最大的不同就是对教材中每个习题给出了详细的解题过程,小到相对简单的计算题大到复杂的证明题,并且有的题目还提供多种解法,以此开拓读者的思路。

同步练习题及解析 每章最后,我们给出了一些很基础的练习题,这部分习题是为读者检验自己掌握知识的程度而编写,为每一章最基础同时也是很重要、应当熟练理解掌握的知识点而设的题目,习题之后有很详细的解答供读者参考。

序　言

复变函数论是数学专业的一门重要的基础课，是数学分析的后继课程。复变函数论在应用方面，涉及的面很广，有很多复杂的计算都是用它来解决的。比如物理学上有很多不同的稳定平面场，所谓场就是每点对应有物理量的一个区域，对它们的计算就是通过复变函数来解决的。复变函数论不但在其他学科得到了广泛的应用，而且在数学领域的许多分支也都应用了它的理论。它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展影响深远。复变函数论无论在实际应用，还是理论上都有很好的指导作用。

要想比较好的掌握复变函数论，真正理解它的内涵，做到游刃有余的程度，还是很不容易的。因为它的逻辑性不亚于其他任何一门数学课程，并且复变函数是以复数作为自变量的函数，这本身就不同于我们熟知的实数，这就使思维一时间很难转变。针对这一问题，为了使读者更好的掌握这门课，我们编写了这套辅导用书。在本书的编写过程中得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的支持与帮助，在此表示感谢！对《复变函数论》教材作者钟玉泉老师表示衷心感谢！

限于编者的水平有限，错误在所难免，恳请读者批评指正。同时也希望读者能合理利用本书，达到“提高自学能力，培养数学修养”的目的。

E-mail：wangboyu@gmail. com

目　录

第一章　复数与复变函数

本章学习指导

§1. 复数

(一)复数域

1. 复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数,称为复数,其中 x 和 y 是任意实数. 实数单位为 1, i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$,称为复数单位.

实数 x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为 $x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$.

2. 复数相等概念

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等,是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等,即 $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$ 必须且只须 $x_1=x_2, y_1=y_2$.

3. 共轭复数

复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$, $\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$.

4. 复数的运算法则

由于实数是复数的特例,则规定复数运算的一个基本要求就是,复数运算法则施行于实数特例时,能够和实数运算的结果相符合.

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相加(减)的法则是

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$

相乘：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)$

相除：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)$

复数的加法遵守交换律与结合律.

复数的乘法遵守交换律与结合律，且遵守乘法对于加法的分配律.

(二)复平面

1. 一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 惟一确定，(x,y) 就称为复数 z 的实数对形式. 因此，我们可以借助于横坐标为 x，纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$.

注 引进了复平面之后，我们在“数”和“点”之间建立了联系，以后在研究复变函数时，常可借助于几何直观，还可采用几何术语.

2. 在复平面上，从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量)，这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

(三)复数的模与辐角

1. 模的定义

我们用向量$\overrightarrow{Oz}$来表求复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 其中 x,y 顺次等于$\overrightarrow{Oz}$沿 x 轴与 y 轴的分量，向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为复数 z 的模或绝对值，以符号 $|z|$ 或 r 表示，因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant0$$

且 $|z|=0$ 的充要条件是 $z=0$.

注 模的概念与实数的绝对值概念是一致的.

(1) $|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$.

(2) 三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|$$

(3) $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的距离，记为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

2. 辐角的相关知识

实轴正向到非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量$\overrightarrow{Oz}$间的夹角 θ 合于

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

称为复数 z 的辐角，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$.

注　任一非零复数 z 有无穷多个辐角，现以 $\arg z$ 表示其中的一个特定值并称合条件 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的一个为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，或称之为 z 的主辐角. 于是 $\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

现总结复数的三种形式

$z=x+\mathrm{i}y$　（代数形式）

$z=re^{\mathrm{i}\theta}$　（指数形式）

$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$　（三角形式）

（四）复数的乘幂与方根

作为乘积的特例，我们考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n，它是 n 个相同因子的乘积，设 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^n=r^ne^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$.

从而有　$|z^n|=|z|^n,\ \mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z.$

当 $r=1$ 时，则得棣莫弗公式　$(\cos\theta+\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$

求非零复数 z 的 n 次方根，相当于解二项方程　$w^n=z$　（$n\geqslant z$，整数）.

记其根的总体为$\sqrt[n]{z}$，则 $w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\cdot\sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ 这里 k 表面上可以取 $0,\pm1,\pm2,\cdots$，但实际上只要取 $k=0,1,\cdots,n-1$ 就可得出 $w^n=z$ 的总共 n 个不同的根.

（五）共轭复数

(1) $\overline{(\bar{z})}=z,\ \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2.$

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0).$

(3) $|z|^2=z\bar{z},\ \mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$ 表示对于复数 $a,b,c,\cdots$ 的任一有理运算，则

$$\overline{R(a,b,c,\cdots)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$$

§2. 复平面上的点集

定义 1.1　由不等式$|z-z_0|<\rho$所确定的平面点集(以后平面点集均简称点集).就是以z_0为心,以ρ为半径的圆,称为点z_0的ρ—邻域,常记为$N_\rho(z_0)$;并称$0<|z-z_0|<\rho$为点z_0的去心ρ邻域,常记为$N_\rho(z_0)-\{z_0\}$,它们是复数列和复变函数极限论的基础.

定义 1.2　考虑点集E,若平面上一点z_0.(不必属于E)的任意邻域都有E的无穷多个点,则称z_0为E的聚点或极限点;若z_0属于E,但非E的聚点,则称z_0为E的孤立点;若z_0不属于E,又非E的聚点,则称z_0为E的外点.

定义 1.3　若点集E的每个聚点皆属于E,即$E'\subseteq E$,则称为E为闭集;若点集E的点z_0有一邻域全含于E内,则称z_0为E的内点;若点集E的点皆为内点,则称E为开集;若在点z_0的任意邻域内,同时有属于点集E和不属于E的点,则称z_0为E的边界点,点集E的全部边界点所组成的点集称为E的边界.

注　点集E的孤立点必是E的边界点.

定义 1.4　若有正数M,对于点集E内的点z皆合$|z|\leqslant M$,即若E全含于一圆之内,则称E为有界集,否则称E为无界集.

以下五种说法是彼此等价的:

(1)z_0为E的聚点或极限点;

(2)z_0的任一邻域含有异于z_0而属于E的一点;

(3)z_0的任一邻域含有E的无穷多个点(z_0不必属于E);

(4)z_0的任一邻域含有E的两个点;

(5)可从E取出点列$z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$,而以$z_0$为极限,即对任给$\varepsilon>0$,存在正整数$N=N(\varepsilon)$,便当$n>N$时,恒有$|z_n-z_0|<\varepsilon$.

定义 1.5　具备下列性质的非空点集D称为区域:

(1)D为开集;

(2)D中任意两点可用全在D中的折线连接.

定义 1.6　区域D加上它的边界C称为闭域,记为$\overline{D}=D+C$.

注　区域都是开的，不包含它的边界点.

定义 1.7　设 $x(t)$及 $y(t)$是实变数 t 的两个实函数，在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续，则由方程组$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$　$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

或由复数方程　$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$　$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$　（简记为 $z=z(t)$）

所决定的点集 C，称为 z 平面上的一条连续曲线. $z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$称为 C 的参数，$z(\alpha)$及 $z(\beta)$分别称为 C 的起点和终点.

定义 1.8　设简单(或简单闭)曲线 C 的参数方程为

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

又在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上，$x'(t)$及 $y'(t)$存在、连续且不全为零，则 C 称为光滑(闭)曲线.

定义 1.9　由有限条光滑曲线衔接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线.

定理 1.1(若尔当定理) 任一简单闭曲线 C 将 z 平面惟一地分成 C，$I(C)$及 $E(C)$三个点集(如图 1-1 所示)，它们具有如下性质：

(1)彼此不交；

(2)$I(C)$是一个有界区域(称为 C 的内部)；

(3)$E(C)$是一个无界区域(称为 C 的外部)；

(4)若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$，另一个端点属于 $E(C)$，则 P 必与 C 有交点.

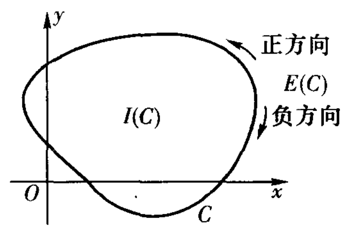

图 1-1

定义 1.10　设 D 为复平面上的区域，若在 D 内无论怎样画简单闭曲线，其内部仍全含于 D，则称 D 为单连通区域，非单连通的区域称为多连通区域.

§3. 复变函数

（一）复变函数的概念

定义 1.11　设 E 为一复数集，若对 E 内每一复数 z，有惟一确定的复数 w 与之对应. 则称在 E 上确定了一个单值函数 $w=f(z)$ $(z\in E)$. 如对 E 内每一复数 z，有几个或无穷多个 w 与之对应，则称在 E 上确定了一个多值函数 $w=$

$f(z)(z\in E)$. E 称为函数 $w=f(z)$ 的定义域. 对于 E,w 值的全体所成集 M 称为函数 $w=f(z)$ 的值域.

定义 1.12 如对 z 平面上点集 E 的任一点 z,有 w 平面上点集 F 的点 w,使得 $w=f(z)$,则称 $w=f(z)$ 把 E 变(映)入 F(简记为 $f(E)\subseteq F$),或称 $w=f(z)$ 是 E 到 F 的入变换.

定义 1.13 如果 $f(E)\subseteq F$,且对 F 的任一点 w,有 E 的点 z,使得 $w=f(z)$,则称 $w=f(z)$ 把 E 变(映)成 F(简记为 $f(E)=F$)或称 $w=f(z)$ 是 E 到 F 的满变换.

定义 1.14 若 $w=f(z)$ 是点集 E 到 F 的满变换,且对 F 中的每一点 w,在 E 中有一个(或至少有两个)点与之相对应,则在 F 上确定了一个单值(或多值)函数,记作 $z=f^{-1}(w)$,它就称为函数 $w=f(z)$ 的反函数或称为变换 $w=f(z)$ 的逆变换;若 $z=f^{-1}(w)$ 也是 F 到 E 的单值变换,则称 $w=f(z)$ 是 E 到 F 的双方单值变换,则称 $w=f(z)$ 是 E 到 F 的双方单值变换或一一变换.

(二)复变函数的极限与连续性

定义 1.15 设函数 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义,z_0 为 E 的聚点,如存在一复数 w_0,使对任给的 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$,只要 $0<|z-z_0|<\delta$,$z\in E$,就有

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 有极限 w_0,并记为

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=w_0.$$

注 极限 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}$ 与 z 趋于 z_0 的方式无关. 通俗地说,就是指在 E 上,z 要沿着从四面八方通向 z_0 的任何路径趋于 z_0.

定理 1.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 于点集 E 上有定义,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为 E 的聚点,则 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=\eta=a+\mathrm{i}b$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in E}} u(x,y)=a,\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in E}} v(x,y)=b.$$

定义 1.16 设函数 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义,z_0 为 E 的聚点,且 $z_0\in$

E,若$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=f(z_0)$,即对任给的$\varepsilon>0$,有$\delta>0$,只要$|z-z_0|<\delta, z\in E$,就有$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$,则称$f(z)$沿$E$于$z_0$连续.

定理 1.3　设函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$于点集$E$上有定义,$z_0\in E$,则$f(z)$沿$E$在点$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$连续的充要条件是:二元实变函数$u(x,y)$,$v(x,y)$沿$E$于点$(x_0,y_0)$连续.

定义 1.17　如函数$f(z)$在点集E上各点均连续.则称$f(z)$在E上连续.

定理 1.4　**[波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理]**　每一个有界无穷点集,至少有一个聚点.

定理 1.5　**(闭集套定理)**　设无穷闭集列$\{\overline{F}_n\}$,至少一个为有界且$\overline{F}_n\supset\overline{F}_{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}d(\overline{F}_n)=0$,($d(\overline{F}_n)$是$\overline{F}_n$的直径),则必有惟一的一点$z_0\in\overline{F}_n$($n=1,2,\cdots$).

定理 1.6　**[海涅—波莱尔覆盖定理]**　设有界闭集E的每一点z都是圆k_z的圆心,则这些圆$\{k_z\}$中必有有限个圆把E盖住,换句话说,E的每一点至少属于这有限个圆中的一个.

§4. 复球面与无穷远点

考虑z平面上一个以原点为中心的圆周C,在球面上对应的也是一个圆周Γ(即是纬线)当圆周C的半径越大时,圆周Γ就越趋于北极N.因此,北极N可以看成是与z平面上的一个模为无穷大的假想点相对应,这个假想点称为无穷远点,并记为∞.复平面加上点∞后被称为扩充复平面,常记作$\mathbf{C}_\infty$.

习题全解

(一)

1. 设$z=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,求$|z|$及$\mathrm{Arg}z$.

【解】 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}z&=\arg z+2k\pi\\&=\arctan\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+2k\pi\\&=\arctan(-\sqrt{3})+2k\pi\\&=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{aligned}$$

2. 设 $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数形式表 z_1z_2 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

【解】 因为　$z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$

$$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

所以　$z_1\cdot z_2=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot 2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}=2e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}=\frac{1}{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}}=\frac{1}{2}e^{\frac{5}{12}\pi\mathrm{i}}$$

3. 解二项方程 $z^4+a^4=0\quad(a>0)$.

【解】 由　$z^4+a^4=0$　得　$z^4=-a^4$

则二项方程的根为

$$\begin{aligned}w_k&=(\sqrt[4]{-1})_k\cdot a\quad(k=0,1,2,3)\\&=e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{4}}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot a\quad(k=0,1,2,3)\end{aligned}$$

因此　$w_0=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\cdot a=\frac{a}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$

$$w_1=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot a=e^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})$$

$$w_2=e^{\mathrm{i}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot a=e^{\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i})$$

$$w_3=e^{2\pi\mathrm{i}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=e^{\frac{9}{4}\pi\mathrm{i}}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})$$

4. 证明$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

【证明】 证法一　因为$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

两式相加得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

证法二　设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$　则

$$|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$

$$|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

于是　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

几何意义：平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和.

5. 设 z_1、z_2、z_3 三点适合条件：

$z_1+z_2+z_3=0$ 及$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

试证明 z_1,z_2,z_3 是一个内接于单位圆周$|z|=1$ 的正三角形的顶点.

【证明】 证法一　由第 4 题知$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

由题目条件　$z_1+z_2+z_3=0$ 知 $z_1+z_2=-z_3$

故　$$|z_1+z_2|=|z_3|$$

于是　$$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_3|^2=3$$

同理　$$|z_2-z_3|^2=|z_3-z_1|^2=3$$

所以　$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$$

因此　z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的等边三角形的顶点.

证法二　用复数的代数式来证明三边相等.

设　$z_j=x_j+iy_j$　(j=1,2,3)　因 $z_1+z_2+z_3=0$

所以　$x_1+x_2+x_3=0, y_1+y_2+y_3=0$

从而　$x_1=-x_2-x_3, y_1=-y_2-y_3$

又因为　$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

所以　三点 z_1,z_2,z_3 在单位圆上,且有

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2$$

而　$(x_1^2+y_1^2)=(x_2+x_3)^2+(y_2+y_3)^2$

所以　$(x_2+x_3)^2+(y_2+y_3)^2=1$

于是得到　$2(x_2x_3+y_2y_3)=-1$

同理可得　$2(x_1x_2+y_1y_2)=2(x_3x_1+y_3y_1)=-1$

故有　$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2$

$$=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$$

即　$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

证法三　我们证明每个边所对的圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$,为此只须证明 $\theta_2-\theta_1=\theta_1-\theta_3=\frac{2}{3}\pi$ 即可(如图 1-2 所示).

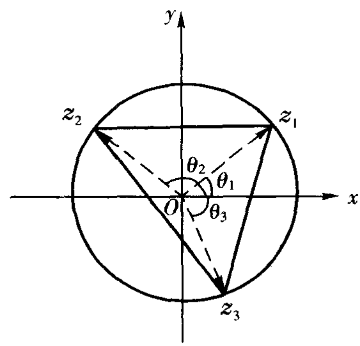

图 1-2

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)\quad(k=1,2,3)$

则　$r_k=1$,因 $z_1+z_2+z_3=0$

即　$\sum\limits_{k=1}^{3}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)=0$

所以　$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0$;

$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0$.

于是　$(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2$
$=(-\cos\theta_3)^2+(-\sin\theta_3)^2$

即　$2+2\cos\theta_1\cos\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2=1$

即　$\cos(\theta_2-\theta_1)=-\frac{1}{2}$

因此　$\theta_2-\theta_1=2\pi/3$,同理 $\theta_1-\theta_3=\frac{2}{3}\pi$

故 $z_k(k=1,2,3)$是内接于单位圆的一个等边三角形的顶点.

6. 下列关系表示的点 z 的轨迹的图形是什么?它是不是区域?

(1) $|z-z_1|=|z-z_2|,(z_1\neq z_2)$;　　(2) $|z|\leqslant|z-4|$;

(3) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$;　　(4) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$ 且 $2\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 3$;