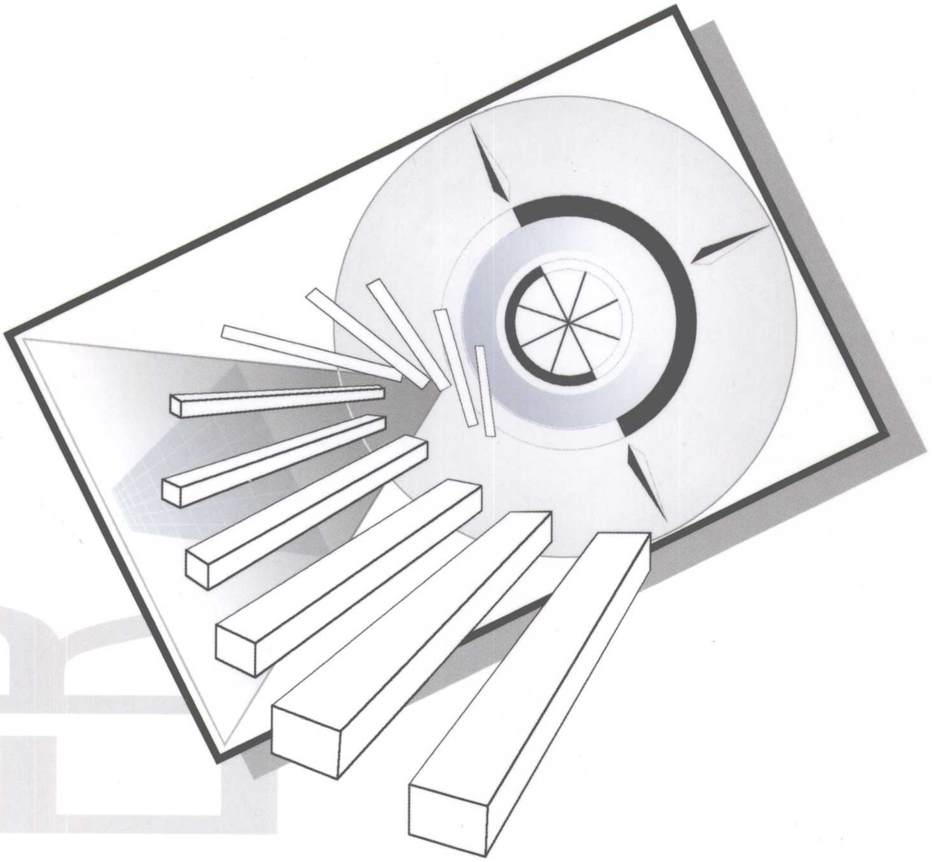
高等职业教育计算机专业推荐教材



网上免费提供
电子教案

计算机数学基础

COMPUTER

王元元 李清 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等职业教育计算机专业推荐教材

计算机数学基础

王元元　李　清　编著

机械工业出版社

本书从计算机求解问题的实际需要出发，介绍与计算机专业相关的数学基础知识. 内容包括：数论初步、组合论原理、数理逻辑、集合论、图论等. 本书既注重知识的系统性与完整性，又注重与计算机专业的密切联系，结构合理，取材得当，通俗易懂，具有区别于其他同类书籍的特点.

本书可作为高等职业教育计算机、通信等专业的教材.

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学基础/王元元，李清编著. —北京：机械工业出版社，2008.1

高等职业教育计算机专业推荐教材

ISBN 978-7-111-23023-6

Ⅰ. 计…　Ⅱ. ①王…②李…　Ⅲ. 电子计算机－数学基础－高等学校－教材　Ⅳ. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 194737 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：刘亚军　版式设计：冉晓华

责任校对：李秋荣　责任印制：杨　曦

北京机工印刷厂印刷

2008 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 12.75 印张 · 314 千字

0 001—4 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-23023-6

定价：21.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643

编辑热线电话：（010）88379753　88379739

封面无防伪标均为盗版

高等职业教育计算机专业推荐教材

编委会成员名单

编 者 的 话

根据有关部门对我国信息产业发展的客观需求及劳动力市场现状的调查，在计算机应用和软件专业领域培养技能型紧缺人才，是当务之急．近年来，不仅高等职业技术院校，而且相当一部分本科工程技术院校（特别是相当数量高等学校的二级学院、民办院校），都把招收和培养计算机专业技能型紧缺人才列为教育改革的重要举措．为一些院校提供“适时、适度、优选、优质”的计算机专业的高等职业教育系列教材，正是我们组织编写这套“高等职业教育计算机专业推荐教材”（以下简称“推荐教材”）的目的．“推荐教材”由四个模块的30多本教材组成．这些模块是：基础知识模块、程序设计模块、实用技术模块、实践模块．

这套“推荐教材”是“适时”的，因为它努力适应我国信息产业发展和劳动力市场的客观需求，适应计算机行业技术的现状，强调教学内容的先进性和实用性．这套教材十分关注信息技术的最新发展、突出本专业领域的新知识、新技术、新流程和新方法．其中程序设计模块和实用技术模块充分体现了这一特色，所涉及的19本教材既有基础的平台、语言，如《Linux 操作系统》、《C 语言程序设计与实践》，也有最新的《Visual C#. NET 面向对象程序设计教程》、《XML 实用教程》、《JSP 应用教程》等教材，还有十分接近实际工作需要的《Oracle 数据库应用教程》、《计算机网络管理》、《电子商务概论》等实用教材．

这套“推荐教材”是“适度”的，因为它不是简单地摒弃基础理论，而是注意强调理论联系实际，使读者能从中学习到必要和相对系统的基础理论知识，把各种能力的培养和全面素质的提高放在首要的位置．“推荐教材”中基础知识模块的设置，充分体现了这一特色，它包括了数学、电子技术、计算机硬件、软件和应用技术、网络技术、信息安全等基础教材．

这套“推荐教材”是“优选”的，因为充分考虑了现有高中毕业生的认知水平和已有知识，为学生提供适应劳动力市场需要和有职业发展前景的、模块化的教材体系．在学习内容、教学组织等方面留给教师和学生选择和创新的空间，便于教师组织和构建开放式的课程体系，适应学生个性化发展的需要，在灵活的模块化课程结构中自由发展．“推荐教材”的四个模块对重要内容都安排了看似重复的多种教材，供教师和学生去选择．例如，可以在《C 语言程序设计与实践》、《Java 程序设计教程》中任意选择一到两门，也可以在《ASP 基础及应用教程》、《JSP 应用教程》中任选一门．

这套“推荐教材”是“优质”的，因为它们的作者多数是从事高等职业教育的计算机专业教师，具有长期的计算机实际工作和教育工作经验．这套教材的优质，还体现在它的改革和创新精神上．其中《计算机电路基础》对传统的模拟电路和数字电路课程教材作了重大的改变，《计算机组装与维修教程》则是一门纯实践的课程教材．我们欢迎使用这套教材的师生，指出教材中存在的问题并提出修改意见．

高等职业教育计算机专业推荐教材

编委会

前　　言

计算机技术作为当今信息社会信息技术的核心，已成为知识经济强有力的技术支持. 计算机求解问题的基本模式是：实际问题—数学建模—算法设计—编程实现.

本书从计算机求解问题的实际需要出发，介绍计算机专业学生需要掌握的数学基础知识，并重点介绍了数学建模与算法设计必须掌握的数学知识. 内容包括：数论初步、组合论原理、数理逻辑、集合论、图论等基础知识.

本书既注重知识的系统与完整，又注重与计算机专业的密切联系，结构合理，取材得当，通俗易懂，具有区别于其他同类书籍的特点，适合作为高等职业教育计算机、通信等专业的教材.

本书共10章：

第1章集合论基础，主要介绍集合的基本概念、运算和集合的归纳定义.

第2章整数的性质，主要介绍整除、同余及相关概念和性质.

第3章矩阵初步，主要介绍矩阵的基本概念、运算和性质.

第4章组合论原理，主要介绍两个重要的基本原理、排列与组合的概念和生成、容斥原理、鸽笼原理、递归的概念及求解.

第5章命题逻辑，主要介绍命题、命题公式、逻辑等价式、逻辑蕴涵式和范式.

第6章一阶谓词逻辑，主要介绍谓词的基本概念、谓词公式、谓词演算永真式的基本原理.

第7章关系，主要介绍二元关系的定义和性质、等价关系及等价类的划分、序关系.

第8章函数，主要介绍函数的基本概念和性质、函数的合成和性质.

第9章图，主要介绍图的基本概念、路径和回路、图的连通性和图的矩阵表示.

第10章特殊图，主要介绍欧拉图和欧拉路径、哈密顿图和哈密顿通路、二分图及其匹配、平面图和欧拉公式、树的基本概念和相关性质.

本书免费提供电子教案和部分习题答案，需要者可到机械工业出版社网站（http://www.cmpedu.com）下载.

作　者

目　　录

第1章　集合论基础

集合理论产生于16世纪末，目的是为了探求微积分学的理论基础. 到了19世纪末，即1876～1883年间，德国数学家康托尔(Georg Cantor，1845～1918)提出了基数、序数等概念，为集合论奠定了基础，被公认为集合理论的创始人. 集合理论是一门研究数学基础的学科，它从一个比“数”更简单的概念——集合出发，定义数及其运算，进而发展到整个数学，成为各数学分支的基础. 同时，它还渗透到各个科学技术领域，成为不可缺少的数学工具和表达语言.

集合不仅可用来表示数值及其运算，而且可用于非数值信息及离散结构的表示和处理. 例如，数据的删除、插入、排序，数据间关系的描述，数据的组织和查询等都很难用传统的数值计算来处理，但却可以用集合运算来实现. 随着计算机科学技术应用的发展，集合论被广泛应用于计算机科学，如数据结构、操作系统、数据库、知识库、编译原理、形式语言、程序设计、人工智能、信息检索等. 因此，对于从事计算机科学技术工作的人来说，集合论也是必备的基础知识.

1.1　集合的概念及运算

1.1.1　集合的基本概念

在日常生活中，我们常把各种不同的东西进行分类，每一类组成一个集合. 实际上，这是对集合的一种比较通俗的理解. 在中学的数学课程中，我们已对集合及其元素的意义有所了解，那么，什么是集合呢？

定义1-1　集合是由确定的、互相区别的、并作整体识别的一些对象组成的总体. 组成集合的对象称为集合的成员或元素.

严格地说，这不是集合的定义，因为“总体”只是“集合”一词的同义反复. 实际上，在集合论中，集合是一个不作定义的原始概念，就像几何学中的点、线、面等概念. 不过，上述关于集合概念的描述和定义，能帮助我们更直观地理解和认识它的内涵和外延.

【例1-1】

(1)“南京外国语学校全体学生”为一集合，集合元素是南京外国语学校的学生.

(2)“大于零的整数”为一集合，集合元素是正整数.

(3)“26个英文字母”的集合，集合元素就是26个英文字母.

(4)“既是偶数又是质数的正数”也构成一个集合，尽管它只有一个集合元素2.

(5)“解放军理工大学所有学员队”的集合，集合元素是学员队，而不是学员，因为集合中的对象是整体识别的，尽管学员队又是学员的集合.

(6)“好人”不构成集合，因为难以对一个人的好坏作出确定的判断.

(7)“方程$(x-3)(x^2-4x+4)=0$的所有根”组成一个集合，虽然此方程有3个根，即3、2、2，但2是重根，而集合中的对象是相互区别的，因此该集合只有两个元素3和2.

(8)“方程 $x^2+x+1=0$ 的实根”组成一个集合. 由于此方程没有实根，因此该集合不含有任何元素，是一个特定的集合.

注意，组成集合的“对象”，这个“对象”的概念是相当普遍的，既可以是具体的，又可以是抽象的，还可以是集合，因为人们有时以集合为其讨论的对象，而又需涉及它们的一个总体——以集合为其元素的集合. 如例 1-1 中(5)的集合，以学员队集体为其元素；又如集合 $\{1, \{1, 2\}, \{1\}, 2\}$，数 1、2 是它的成员，集合 $\{1\}$ 和 $\{1, 2\}$ 也是它的成员. 因此，尽管集合与其成员是两个截然不同的概念，但一个集合完全可以成为另一个集合的元素. 因此必须注意，a 不同于 $\{a\}$，前者为一对象 a，后者为仅含该对象 a 的单个元素的集合；同样，$\{a\}\neq\{\{a\}\}$，$\{\{a\}\}$ 是仅含 $\{a\}$ 的单元素集.

通常，用大写拉丁字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素. 例如：

$a\in A$，表示 a 是集合 A 的成员，称为 a 属于 A；

$a\notin A$，表示 a 不是集合 A 的成员，称为 a 不属于 A.

对任何对象 a 和任何集合 A，或者 $a\in A$ 或者 $a\notin A$，两者仅居其一. 这正是集合论对其元素的“确定性”要求.

要研究集合，首先要弄清楚如何表示一个集合. 其实，表示集合的方式有很多，常用的方式主要有以下三种.

1. 列举法

此方式在表示一个集合 A 时，将 A 中的所有元素一一列举，或列出足够多的能反映 A 中成员特征的元素，其表示形式如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ 或 } A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

2. 描述法

此方式在表示一个集合 A 时，将 A 中元素的特征用一个性质来描述，其表示形式如

$$A=\{x \mid P(x)\}$$

其中，$P(x)$ 表示“x 满足性质 P”或“x 具有性质 P”. $A=\{x \mid P(x)\}$ 的意义是：集合 A 由且仅由满足性质 P 的那些对象所组成，也就是说，

$$x\in A \text{ 当且仅当 } x \text{ 满足性质 } P(\text{或 } P(x) \text{ 真})$$

例 1-1 中的集合都是采用这种方式表示的.

3. 归纳法

将在 1.2 节中详细介绍.

【例 1-2】 以下是常用的一些集合及其表示.

(1) $\{0, 1\}=\{x \mid x=0 \text{ 或 } x=1\}$.

(2) 自然数集合 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}=\{x \mid x \text{ 是自然数}\}$.

  正整数集合 $\mathbf{N}_+=\{1, 2, 3, \cdots\}=\{x \mid x \text{ 是正整数}\}$.

(3) 整数集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}=\{x \mid x \text{ 是正整数，或零，或负整数}\}$.

(4) 偶数集合 $E=\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}=\{x \mid x \text{ 是偶数}\}$

$$=\{x \mid x\in\mathbf{Z} \text{ 且 } 2 \mid x\} \quad (2 \mid x \text{ 表示 } 2 \text{ 整除 } x).$$

(5) 前 n 个自然数的集合 $\mathbf{N}_n=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$

$$=\{x \mid x\in\mathbf{N} \text{ 且 } 0\leqslant x<n\}.$$

(6) 前 n 个自然数集合的集合 $=\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\cdots\}$

$$=\{\mathbf{N}_n \mid n\in\mathbf{N}\}.$$

(7) 有理数集合 $\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$.

(8) 实数集合 $\mathbf{R}=\{x \mid x$ 是实数$\}$.

(9) 复数集合 $\mathbf{C}=\{x \mid x$ 是复数$\}$.

定义 1-2 没有任何元素的特定集合称为空集，记为$\varnothing$，即$\varnothing=\{\}=\{x \mid P(x)$恒假$\}$;由全体对象组成的集合称为全集，记为 U，即 $U=\{x \mid P(x)$恒真$\}$.

定义 1-3 空集和只含有有限多个元素的集合称为有限集，否则称为无限集. 有限集合中成员的个数称为集合的基数. 集合 A 的基数表示为 $\mathrm{card}(A)$.

例 1-2 之(1)和(5)是有限集，其他为无限集. $\mathrm{card}(\{0,1\})=2$，$\mathrm{card}(\varnothing)=0$，$\mathrm{card}(\{\varnothing\})=1$. $\varnothing$不同于$\{\varnothing\}$，$\varnothing$是没有任何元素的集合，而$\{\varnothing\}$是恰含一个元素——空集的单元素集.

1.1.2 集合间的关系与子集

在研究集合间的相互关系时，首先需要弄清集合间的相等关系. 下面的外延性公理是规定集合相等意义的重要约定.

外延性公理:集合 A 和集合 B 相等，当且仅当它们具有相同的元素. 也就是说，$A=B$，当且仅当对任意对象 x，若 x 属于 A，则 x 属于 B;反之，若 x 属于 B，则 x 也属于 A.

【例 1-3】 根据外延性公理，

$$\{0,1\}=\{1,0\}=\{x \mid x(x^2-2x+1)=0\}=\{x \mid x=1 \text{ 或 } x=0\}$$

因此，外延性公理事实上也确认了集合中的元素都不相同，而且没有先后次序，即集合成员的“相异性”、“无序性”，及集合表示形式的多样性.

定义 1-4 若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若元素 x 属于 A，那么 x 属于 B，称集合 A 为集合 B 的子集合(或子集).

A 是 B 的子集，表示为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”). A 不是 B 的子集用 $A\not\subseteq B$ 来表示.

集合之间的子集关系或包含关系是集合之间最重要的关系之一. 读者必须彻底弄清集合之间的子集关系以及集合元素与集合之间的隶属关系这两个完全不同的概念.

【例 1-4】 $\{a,b\}\subseteq\{a,c,b,d\}$，$\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$，$\{a\}\subseteq\{a,b\}$，但 $a\not\subseteq\{a,b\}$，只有 $a\in\{a,b\}$. 不过，存在这样两个集合，其中一个既是另一个的子集，又是它的元素. 例如，$\{1\}\in\{1,\{1\}\}$，且$\{1\}\subseteq\{1,\{1\}\}$.

关于子集关系我们有以下定理和定义.

定理 1-1 对任意集合 A，B，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 特别地，对任意集合 A，$A\subseteq A$.

证明 由外延性公理和子集定义立即可得.

定理 1-2 对任意集合 A，$A\subseteq U$(U 表示全集).

此定理显然成立.

定理 1-3 设 A、B、C 为任意集合，若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

证明 设 x 为 A 中任一元素. 由于 $A\subseteq B$，因此 $x\in B$;又因为 $B\subseteq C$，故 $x\in C$. 这就是说，A 的所有元素都是 C 的成员，故 $A\subseteq C$.

定理 1-4 对任何集合 A，$\varnothing \subseteq A$.

证明 假设$\varnothing \not\subset A$，即$\varnothing$不是集合 A 的子集，于是有元素 $x \in \varnothing$，但 $x \notin A$，而 $x \in \varnothing$与$\varnothing$是空集矛盾，因此$\varnothing \subseteq A$.

定理 1-5 空集是唯一的.

证明 设有空集$\varnothing_1$，$\varnothing_2$. 据定理 1-4，应有$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 和$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，从而由定理 1-1 知$\varnothing_1 = \varnothing_2$.

定理 1-6 设 A 为一有限集合，$\mathrm{card}(A) = n$，那么 A 的子集个数为 2^n.

证明 因为集合 A 的子集有：

没有元素的子集$\varnothing$，有 C_n^0 个($C_n^0 = 1$)；

恰含 A 中一个元素的子集，有 C_n^1 个；

恰含 A 中两个元素的子集，有 C_n^2 个；

……

恰含 A 中全部 n 个元素的子集，有 C_n^n 个.

因此 A 的所有子集个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

设集合 $A = \{1, \varnothing, \{1,3\}\}$，因为 $\mathrm{card}(A) = 3$，则 A 有 $2^3 = 8$ 个子集，分别为:$\varnothing$，$\{1\}$，$\{\varnothing\}$，$\{\{1, 3\}\}$，$\{1, \varnothing\}$，$\{1, \{1, 3\}\}$，$\{\varnothing, \{1, 3\}\}$，$\{1, \varnothing, \{1, 3\}\}$.

定义 1-5 对于集合 A 和 B，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称集合 A 为集合 B 的真子集，记为$A \subsetneq B$.

显然，空集$\varnothing$是所有非空集合的真子集.

1.1.3 集合运算

同数值一样，集合也可进行运算，只不过集合运算是指以集合为运算对象、以集合为值的运算.

本书中的符号"$\Leftrightarrow$"表示术语"当且仅当".

在集合运算中，并、交、差、补运算是最基本的运算.

定义 1-6 设 A，B 为任意集合.

(1) $A \cup B$ 称为 A 与 B 的并集，定义为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$\cup$ 称为并运算；

(2) $A \cap B$ 称为 A 与 B 的交集，定义为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$\cap$ 称为交运算；

(3) $A \backslash B$ 称为 A 与 B 的差集，定义为

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

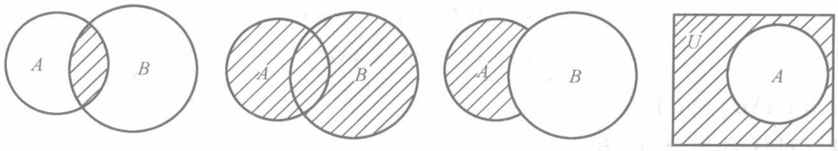
$\backslash$称为差运算；

(4) $\complement_U A$ 称为 A 的补集，定义为

$$\complement_U A = U \backslash A = \{x \mid x \notin A\}$$

$\complement$称为补运算，它是一元运算，是差运算的特例.

集合运算也可用另一种很直观的图——文氏图来表示. 例如，在图 1-1 中，圆圈 A、B 表示集合 A 和 B，方框 U 表示全集，图中阴影部分为相应的集合运算结果.



$A\cap B$　　$A\cup B$　　$A\backslash B$　　$\complement_U A$

图　1-1

【例 1-5】 设 $U=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$，$A=\{2,4\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，$C=\{0,8,9\}$，$D=\{1,2,3\}$，则

$$A\cup B=\{2,4,5,6,7\}$$

$$A\cup B\cup C\cup D=U$$

$$A\cap B=\{4\},\ A\cap C=\varnothing$$

$$A\backslash B=\{2\},\ B\backslash A=\{5,6,7\},\ A\backslash C=\{2,4\}$$

$$\complement_U A=\{0,1,3,5,6,7,8,9\},\ \complement_U B=\{0,1,2,3,8,9\}$$

定理 1-7 设 A、B、C 为任意集合，$*$ 代表运算 $\cup$ 或 $\cap$，那么

(1) $A*A=A$（等幂律）；

(2) $A*B=B*A$（交换律）；

(3) $A*(B*C)=(A*B)*C$（结合律）；

(4) $A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap U=A$；

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（分配律）；

(6) $A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$（吸收律）.

证明　(1)，(2)，(3)由定义立得，(5)，(6)的证明留给读者.

现证(4). 对任意 x，

$$x\in A\cup\varnothing\Leftrightarrow x\in A \text{ 或 } x\in\varnothing$$

$$\Leftrightarrow x\in A(x\in\varnothing\text{为假})$$

故 $A\cup\varnothing=A$. 而

$$x\in A\cap\varnothing\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in\varnothing$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing(x\in\varnothing\text{为假})$$

故 $A\cap\varnothing=\varnothing$. 其余两式请读者补证.

定理 1-8 对任意集合 A、B、C，

(1) $A\backslash A=\varnothing$，$A\backslash\varnothing=A$，$A\backslash U=\varnothing$；

(2) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$，

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

证明　我们只证(2)中第一式，其余留给读者.

对任意 x，

$$x\in A\backslash(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B \text{ 且 } x\notin C$$

$$\Leftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\notin B)\text{ 且 }(x\in A \text{ 且 } x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \text{ 且 } (x \in A \setminus C)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

故 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

定理 1-9 对任意集合 A、B,

(1) $\complement_U \complement_U A = A$, $\complement_U U = \varnothing$, $\complement_U \varnothing = U$;

(2) $A \cup \complement_U A = U$, $A \cap \complement_U A = \varnothing$;

(3) $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$,

$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$;

(4) $A \setminus B = A \cap \complement_U B$.

证明 (1)、(2)、(4)易证,现证(3)的第一式.

证法一:对任意 x,

$$\begin{aligned} x \in \complement_U (A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_U A \text{ 且 } x \in \complement_U B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_U A \cap \complement_U B \end{aligned}$$

证法二:

$$\begin{aligned} \complement_U (A \cup B) &= U \setminus (A \cup B) \\ &= (U \setminus A) \cap (U \setminus B) \\ &= \complement_U A \cap \complement_U B \end{aligned}$$

定理 1-10 对任意集合 A、B、C、D,

(1) $A \subseteq A \cup B$;

(2) $A \cap B \subseteq A$;

(3) $A \setminus B \subseteq A$;

(4) $A \subseteq B$, $A \setminus B = \varnothing$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ 四命题等价;

(5) 若 $A \subseteq B$, 则$\complement_U B \subseteq \complement_U A$.

证明 (1),(2),(3),(5)易证,我们仅证明(4).

设(4)中 4 个命题为 P、Q、R、S,我们来证明 $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S \Rightarrow P$($\Rightarrow$表示"推出"),从而证明这四命题等价.

$(P \Rightarrow Q)$:设 $A \setminus B \neq \varnothing$, 则有 $a \in A \setminus B$, 即 $a \in A$, 但 $a \notin B$, 这与 $A \subseteq B$ 矛盾. 故 $A \setminus B = \varnothing$. 得证.

$(Q \Rightarrow R)$:为证 $A \cup B = B$, 需证

1) $B \subseteq A \cup B$. 但由定理 1-10 之(1),得证.

2) $A \cup B \subseteq B$. 对任意 $x \in A \cup B$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$. 若 $x \in B$, 则 $A \cup B \subseteq B$;若 $x \in A$, 但 $x \notin B$, 则 $x \in A \setminus B$, 与 $A \setminus B = \varnothing$矛盾. 故 $x \in B$. 总之, $A \cup B$ 中元素 x 必为 B 中元素, 2)又得证. 综合 1)、2)可知 $A \cup B = B$.

$(R \Rightarrow S)$:因 $A \cup B = B$, 故

$$A \cap B = A \cap (A \cup B) = A (\text{吸收律})$$

$(S \Rightarrow P)$:设 $A \cap B = A$. 要证 $A \subseteq B$, 现设 x 为 A 中任一元素. 由 $A \cap B = A$, 可得 $x \in A \cap B$ 从而知 $x \in B$. 故 $A \subseteq B$ 得证.

定理 1-11 对任意集合 A、B, 若它们满足

(1) $A \cup B = U$;

(2) $A \cap B = \varnothing$,

那么 $B = \complement_U A$

证明 $B = B \cup \varnothing = B \cup (A \cap \complement_U A) = (B \cup A) \cap (B \cup \complement_U A)$

$= U \cap (B \cup \complement_U A) = (A \cup \complement_U A) \cap (B \cup \complement_U A)$

$= (A \cap B) \cup \complement_U A = \varnothing \cup \complement_U A = \complement_U A$

在本定理的证明中，利用已知等式进行推演，这种证明集合等式的方法简明，但难度有时较大. 需要熟悉一些已知的等式和定理。此外，本定理还可直接用外延性公理来证，这种方法虽较繁锁，但思路比较清晰，易于掌握. 此定理证明中，先证 $B \subseteq \complement_U A$. 设 $x \in B$，由于 $A \cap B = \varnothing$，故 $x \notin A$，即 $x \in \complement_U A$，$B \subseteq \complement_U A$ 得证. 再证 $\complement_U A \subseteq B$. 设 $x \in \complement_U A$，则 $x \notin A$；由于 $A \cup B = U$，故必有 $x \in B$，$\complement_U A \subseteq B$ 又得证. 因此 $B = \complement_U A$.

除了上述并、交、差、补四种基本的集合运算外，集合的幂集运算也是非常重要的集合运算.

定义 1-7 对任意集合 A，$\rho(A)$ 称为 A 的幂集，定义为

$$\rho(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

即 A 的全体子集组成的集合是 A 的幂集.

由于，$\varnothing \subseteq A, A \subseteq A$ 故必有 $\varnothing \in \rho(A), A \in \rho(A)$.

【例 1-6】

(1) $A = \{a, b\}$ 时，$\rho(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

(2) $A = \{0, \{1, 2\}\}$ 时，$\rho(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{\{1, 2\}\}\{0, \{1, 2\}\}\}$.

我们曾指出，当集合 A 的基数为 n 时，A 有 2^n 个子集，因此 $\mathrm{card}(\rho(A)) = 2^n$.

定理 1-12 设 A、B 为任意集合，则 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$.

证明 先证必要性.

设 $A \subseteq B$. 为证 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$，又设 X 为 $\rho(A)$ 中任一元素，从而 $X \subseteq A$. 由于 $A \subseteq B$，故 $X \subseteq B$，从而有 $X \in \rho(B)$. $\rho(A) \subseteq \rho(B)$ 得证.

再证充分性.

设 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$，反设 $A \subseteq B$ 不成立，那么至少有一元素 $a \in A$，但 $a \notin B$. 考虑单元素集合 $\{a\}$，$\{a\} \in \rho(A)$，但 $\{a\} \notin \rho(B)$，与 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$ 矛盾，$A \subseteq B$ 得证.

1.1.4 集合的笛卡儿积

定义 1-8 设 a，b 为任意对象，称 (a,b) 为二元有序组，或序偶. 称 a 为 (a,b) 的第一分量，b 为 (a,b) 的第二分量. 注意，第一、二分量可以相同. 对任意序偶 (a,b)，(c,d)，$(a,b) = (c,d)$ 当且仅当 $a = c$，且 $b = d$.

要充分注意 (a,b) 与 $\{a,b\}$ 的区别，即当 $a \neq b$ 时，$(a,b) \neq (b,a)$，但 $\{a, b\} = \{b,a\}$；$(a,a) \neq \{a\}$，但 $\{a,a\} = \{a\}$.

定义 1-9 对任意集合 A_1，A_2，定义集合 A_1, A_2 的笛卡儿积 $A_1 \times A_2$：

$$A_1 \times A_2 = \{(u,v) \mid u \in A_1 \wedge v \in A_2\}$$

【例 1-7】 设 $A = \{1, 2\}$，$B = \{a, b, c\}$，$C = \{\varnothing\}$，$\mathbf{R}$ 为实数集，

那么

(1) $A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$,

$B\times A=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$;

(2) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$;

(3) $\mathbf{R}^2=\{(u,v)\mid u,v\text{ 是实数}\}$，$\mathbf{R}^2$ 为笛卡儿平面．显然 $\mathbf{R}^3$ 为三维笛卡儿空间．

我们注意到，一般 $A\times B\neq B\times A$．此外，$\varnothing$也用来表示不含任何序组的笛卡儿积．

笛卡儿积有以下性质．

定理 1-13 设 A，B，C 为任意集合，$*$ 表示$\cup$，$\cap$或$\setminus$运算，那么

$$A*(B\cup C)=(A*B)\cup(A*C),\ (B\cup C)*A=(B*A)\cup(C*A)$$
$$A*(B\cap C)=(A*B)\cap(A*C),\ (B\cap C)*A=(B*A)\cap(C*A)$$
$$A*(B\setminus C)=(A*B)\setminus(A*C),\ (B\setminus C)*A=(B*A)\setminus(C*A)$$

证明 仅证明 $A*(B\cup C)=(A*B)\cup(A*C)$和 $A*(B\setminus C)=(A*B)\setminus(A*C)$，对任意 x，y，

$$\begin{aligned}(x,y)\in A*(B\cup C)&\Leftrightarrow x\in A\text{ 且 }y\in(B\cup C)\\&\Leftrightarrow x\in A\text{ 且}(y\in B\text{ 或 }y\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\text{ 且 }y\in B)\text{ 或}(x\in A\text{ 且 }y\in C)\\&\Leftrightarrow(x,y)\in A*B\text{ 或}(x,y)\in A*C\\&\Leftrightarrow(x,y)\in(A*B)\cup(A*C)\end{aligned}$$

故 $A*(B\cup C)=(A*B)\cup(A*C)$

为证第二式，设(x,y)为 $A*(B\setminus C)$中任一序偶，那么 $x\in A,y\in B$，$y\notin C$，从而$(x,y)\in A*B$，$(x,y)\notin A*C$，即$(x,y)\in A*B-A*C$,$A*(B\setminus C)\subseteq(A*B)\setminus(A*C)$得证．另一方面，设$(x,y)$为$(A*B)\setminus(A*C)$中任一序偶，那么$(x,y)\in A*B$，$(x,y)\notin A*C$，从而 $x\in A$，$y\in B,y\notin C$(否则由于 $x\in A$，$(x,y)\in A*C$)，故可知 $y\in B\setminus C$，$(x,y)\in A*(B\setminus C)$，于是$(A*B)\setminus(A*C)\subseteq A*(B\setminus C)$得证．这就完成了 $A*(B\setminus C)=(A*B)\setminus(A*C)$的证明．

1.2 集合的归纳定义

1.2.1 集合的归纳定义

前面我们已经提到集合有三种表示方式，其中之一是归纳定义．下面介绍什么是集合的归纳定义．

集合的归纳定义由三部分组成．

(1) 基础条款:规定待定义集合以某些元素为其基本成员，集合的其他元素可以从它们出发逐步确定．

(2) 归纳条款:规定由已确定的集合元素去进一步确定其他元素的规则．于是，可以从基本元素出发，反复运用这些规则来确认待定义集合的所有成员．

(3) 终极条款:规定待定义集合只含有(1)和(2)条款所确定的成员．

条款(1)和(2)又称归纳定义的完备性条款，它们必须保证毫无遗漏地产生出待定义集合的全部成员;条款(3)又称归纳定义的纯粹性条款，它保证整个定义过程所规定的集合只包