"十一五"规划教材

概率论与数理统计教程(上册)

——概率论

魏平 王宁 符世斌 编著

4

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十一五"规划教材

概率论与数理统计教程（上册）

——概率论

"十一五"规划教材

概率论与数理统计教程（上册）
——概率论

魏平 王宁 符世斌 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教程是随机量数学的改革教材，为教学方便分为《概论率》和《数理统计与随机过程》两册出版。本册内容包括随机事件及其概率，一维随机变量及其分布，二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理。《数理统计与随机过程》内容包括数理统计学的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析，回归分析，随机过程的基本知识和平稳过程等内容。

本书可作为工科各专业的本科生教材，也可作为工程技术人员及报考工科类硕士研究生人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程. 上册，概率论/魏平，王宁，符世斌编著. —西安：西安交通大学出版社，2008.4

ISBN 978-7-5605-2674-4

Ⅰ.概… Ⅱ.①魏… ②王…③符… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 200013 号

书　　名　概率论与数理统计教程——概率论(上册)
编　　著　魏平　王宁　符世斌
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安建筑科技大学印刷厂

开　　本　727mm×960mm　1/16　　**印张** 11　　**字数** 201 千字
版次印次　2008 年 4 月第 1 版　　2008 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-2674-4/O·272
定　　价　16.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy31@126.com

前　言

概论率、数理统计和随机过程是高等院校一门重要的基础课，由于它在工农业生产、科学技术、经济及教育研究等领域中有着十分广泛的应用，所以这门课程越来越受到重视。《概率论》、《数理统计与随机过程》是姐妹篇，为教学方便分册出版。各用32课时教学。

根据教育部关于教材建设要适应于社会发展，要服务于经济建设和有利于培养人才的要求，我们编写了这本教材。在编写过程中，着重注意了以下几个方面。

(1) 在内容选取上，遵循“少而精，广而浅”的原则，加强了理论与实际的联系，注重了该学科知识在社会经济与工程技术方面的具体应用。略去了一些较为繁杂的定理证明和冗长的理论推导，在多处内容标题上注有星号“*”，这部分内容教师在讲课中，可以根据教学对象的不同灵活取舍，不影响整体结构。

(2) 在教材的讲解上，基本遵循传统习惯，但对概念的叙述力求更为朴实、简明和自然，尽可能从读者身边熟悉的问题引入，理论推导尽可能严谨，但不拘泥于此，直观说明和解释也同时并用。

(3) 本教材在每个章节中安排了内容丰富的例题，同时在每章安排了一节典型例题分析。这些例题的选择遵循典型性、代表性和趣味性的原则，是本教材的重要组成部分。每章之后配有适量的习题，学生通过这些习题的练习，可以进一步加深理解和巩固本课程的基本概念和基本理论。

(4) 本教材在处理上避免使用较深的数学知识，只要具备高等数学和线性代数的基本知识即可，书中的所有推导论证都是在这一范围内进行的。

为了帮助读者更进一步地学好本课程，同时出版与本教材配套使用的辅导书，此书除对该课程的疑难问题进行分析解答外，重点讲解本课程的主要方法，并给教材的习题配了解答。

本教材由魏平统一策划并编写第4、5章，王宁编写第1章，符世斌编写第2、3章，最后由魏平统稿。

由于我们水平有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正，以使教材不断完善。

编者于古城西安

2007年11月

目 录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机现象与随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

概率论研究的对象是随机现象。什么是随机现象呢？顾名思义，它是指一个随机的、偶然的自然现象或社会现象，它是与确定性现象相对应的。某地区夏季一定要下雨，是确定性现象，但降雨量的多少却是随机的。向空中抛一枚硬币一定要落向地面是确定性现象，但最后是出现正面还是出现反面却是随机的。这种在一定的条件下，并不出现相同结果的现象称为**随机现象**。随机现象有两个显著特点：一是结果不止一个；二是人们事先并不知道要出现哪一个结果。尽管随机现象结果的出现具有不确定性，但当大量观察或重复时，就会发现随机现象的结果的出现具有规律性。这种规律性称为**统计规律性**。概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门学科。

随机现象在我们的日常生活中随处可见，下面再看一些随机现象的例子。

例 1.1　掷一颗均匀骰子，每次可能出现的点数为 1,2,…,6，但事前不能肯定会出现哪种结果。

例 1.2　袋中装有 $m+n$ 个形状完全相同的球，其中 m 个红球，n 个白球，从袋中任取一球，取得球的颜色在取球前并不能确定。

例 1.3　某商场在一天内接待的顾客数量可能是 0,1,2,…,1 000,…，但事先无法确定其顾客数量。

例 1.4　某品牌电脑的寿命，事先是无法预知的。

例 1.5　向半径为 R 的圆形靶子射击，弹着点的位置在射击前是不能确定的。

为了研究随机现象的统计规律性，必须对所述随机现象进行观察或试验。今后，我们把对随机现象所进行的观察或试验统称为**试验**。抛一枚均匀硬币，看它落地时是否正面朝上；在一批产品中随机抽取 10 个产品时抽到的正品的次数；考察某品牌电脑的寿命等等，都是在做随机试验。一个试验，如果在相同的条件下可重复进行，试验的所有可能结果是明确可知的，并且结果不止一个，但在一次试验之前不能肯定会出现哪一个结果，我们称这样的试验为**随机试验**。为方便起见，也简称**试验**，常用字母 E 表示。随机试验所代表的现象称为随机现象，例 1.1 至例 1.5

都是随机试验的例子。

1.1.2 样本空间与随机事件

随机试验的每一个可能的结果称为**基本事件**，因为随机试验的所有可能结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的。它们的全体称作**样本空间**。常用字母 Ω 表示。Ω 中的点，即基本事件，又称为**样本点**，常用 ω 表示。认识随机现象或随机试验首先要能列出它的样本空间。下面给出例 1.1 至例 1.5 中随机试验的样本空间。

令 $i=\{$掷骰子时出现 i 点$\}$，$i=1,2,\cdots,6$，则掷一颗均匀骰子的随机试验的样本空间 $\Omega_1=\{1,2,\cdots,6\}$。

令 $\omega_1=\{$取出红色球$\}$，$\omega_2=\{$取出白色球$\}$，则摸球模型的随机试验的样本空间 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2\}$。

令 $i=\{$某商场在一天内接待的顾客的人数为 $i\}$，$i=0,1,2,\cdots$，则一天内进入某商场人数的样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$。由于不能确切地说出一天内进入该商场的最多人数，所以该样本空间用非负整数集表示，既不脱离实际，又是合理抽象，也便于数学上的处理。

某品牌电脑的寿命的样本空间 $\Omega_4=\{t,t\geqslant 0\}=[0,\infty)$。

向半径为 R 的圆形靶子射击，弹着点的位置可用 (x,y) 表示，因而弹着点的位置的样本空间 $\Omega_5=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$。

需要注意的是：

(1) 样本空间中的元素可以是数也可以不是数。

(2) 样本空间至少有两个样本点，仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间。

在随机试验中，我们有时关心的是带有某些特征的事件是否发生。如在掷骰子的试验中，可以研究：

$A=\{$出现的点数为 2$\}$

$B=\{$出现的点数为偶数$\}$

$C=\{$出现的点数不超过 5 点$\}$

这些结果是否发生？其中 A 是一个基本事件，而 B 和 C 则由多个基本事件所组成，相对于基本事件，就称它们是复杂事件。无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否都带有随机性，所以都叫做**随机事件**，简称为**事件**。习惯上用大写字母 A,B,C 等表示事件。在随机试验中，如果出现事件 A 中所包含的某一个基本事件 ω，则称作事件 A 发生。事件 A 发生当且仅当 $\omega\in A$。如果不出现事件 A 中所包含的任意一个基本事件 ω，则称作事件 A 不发生。事件 A 不发生当且仅当 $\omega\notin A$。

我们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件，而随机事件不过是有某些特征的基本事件所组成。所以从集合论的观点来看，**随机事件**就是样本空间的子集合。又如在掷骰子的试验中，$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$，显然前述的随机事件 A,B,C 都是 Ω 的子集合，它们可以简单地表示为 $A=\{2\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,3,4,5\}$。

我们把样本空间 Ω 也可作为一个事件。因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某些样本点，也即 Ω 必然发生，所以称 Ω 为**必然事件**。必然事件就是在一次试验中必然出现的事件。类似地，我们把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，在任意一次试验中，不可能有 $\omega\in\varnothing$，也就是说 $\varnothing$ 永远不可能发生，所以称 $\varnothing$ 是**不可能事件**。不可能事件就是在一次试验中不可能发生的事件。

必然事件在一次试验中必然发生，不可能事件在任何试验中不可能发生。必然事件与不可能事件可说都不是随机事件，但为了今后研究的方便，我们还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端情形来处理。

1.1.3 随机事件的关系与运算

在一个样本空间上显然可以定义不止一个事件。概率论的任务之一，就是研究随机事件的规律，通过对简单事件规律的研究去掌握更复杂的事件的规律。为此需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算。

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 **B 包含事件 A**。记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）。即事件 A 的每一个样本点都属于事件 B。如图 1.1。

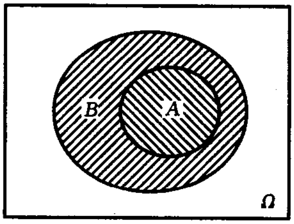

图 1.1

例如：在掷骰子的随机试验中，若 A 表示“出现的点数小于 3”，B 表示“出现的点数小于 6”，则 $A\subset B$。

显然，对任意事件 A，必有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$。

2. 事件的相等

对于两个事件 A、B，若 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$。相等的两个事件同时发生，因此可看作是一样的。

3. 和事件

由“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”得到的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$。事件 $A\cup B$ 表示事件“或者 A 发生，或者 B 发生，或者 A、B 都发生”。即 $A\cup B$ 由至少属于事件 A 或 B 中的一个的所有样本点所组成的集合。如图 1.2。

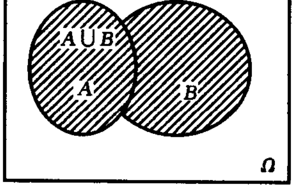

图 1.2

例如：在掷骰子的随机试验中，事件“出现偶数点

数"是事件"出现点数2"、"出现点数4"、"出现点数6"的和事件。

一般地,"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$;"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生"称为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件,记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

4. 积事件

由"事件 A 与事件 B 同时发生"得到的新事件,称为事件 A 与事件 B 的**积事件**。记作 $A \cap B$,简记为 AB。事件 $A \cap B$ 表示同时属于事件 A 及事件 B 的样本点组成的集合。如图1.3。

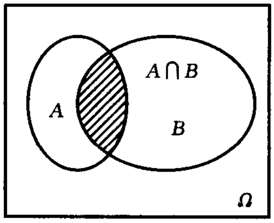

图1.3

例如,在掷骰子的随机试验中,事件"出现点数2"是事件"出现偶数点数"和事件"出现的点数不大于3"的积事件。积事件有下述运算性质:

一般地,"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件,记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"称为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件,记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$。

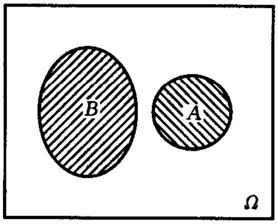

图1.4

若事件 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B **互不相容或互斥**,事件 A 与事件 B 互不相容,表示事件 A 与事件 B 没有共同的样本点,即 $AB = \varnothing$,如图1.4。

若 $AB = \varnothing$,将 $A \cup B$ 记为 $A + B$,若事件 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互斥,即 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n$,则称此 n 个事件所组成的事件组两两互斥,此时 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$。类似地若事件列 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥,即 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots$,则记 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$。

5. 差事件

由"事件 A 发生而事件 B 不发生"得到的事件,称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记作 $A - B$。$A - B$ 表示包含在事件 A 中而不包含在事件 B 中的样本点所组成的集合。如图1.5,$A - B = A\bar{B}$。

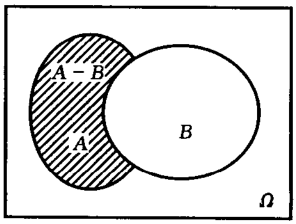

图1.5

例如,在掷骰子的随机试验中,A 表示事件"出现

点数 4 或 6”，事件 B 表示“出现偶数点数”，事件 C 表示“出现的点数不大于 3”，则 $A=B-C$。

6. 对立事件

若两事件 A、B 中有且仅有一个发生，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**(或逆事件，余事件)。A 的对立事件记作 $\overline{A}$，B 是 A 的对立事件，则 $B=\overline{A}$。A 的对立事件就是 A 不发生的事件。对立事件 $\overline{A}$ 是由所有不包含在 A 中的样本点组成的集合，如图 1.6。

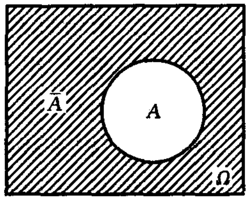

图 1.6

由对立事件的定义，A 与 $\overline{A}$ 之间有下列关系：

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

例如在掷骰子的随机试验中，事件“出现点数 1”与事件“出现点数 2”互斥，但前者的对立事件为“出现点数 2,3,4,5,6”构成的集合。

特别要注意互逆事件与互斥事件的区别：两事件 A 与 B 互逆。须满足两个关系式：$A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\varnothing$，而两事件 A 与 B 互斥，只须满足 $AB=\varnothing$ 即可。即当 A、B 互逆时，A、B 两事件不能同时发生，但二者必须有一个发生；而当 A，B 互斥时，仅要求两事件不能同时发生，也可能两者都不发生，互斥与互逆的关系是：若两事件互逆，则它们一定互斥；反之，若两事件互斥，它们却未必互逆。

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律。设 A、B、C 为事件，则有

(1) $A\cup B=B\cup A$ (和的交换律)

(2) $A\cap B=B\cap A$ (积的交换律)

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (和的结合律)

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (积的结合律)

(5) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ (积对和的分配律)

(6) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (和对积的分配律)

(7) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(7)称为德·莫根对偶规则，该性质可以推广到任意多个事件的情形。

以下证明定律(5)，其余同理可得。

事件$(A\cup B)\cap C$ 发生$\Leftrightarrow A\cup B$ 与 C 同时发生$\Leftrightarrow$“A、C 同时发生”与“B、C 同时发生”中至少有一个发生$\Leftrightarrow A\cap C$、$B\cap C$ 中至少有一个发生$\Leftrightarrow(A\cap C)\cup(B\cap C)$发生。

事件间的关系及运算与集合论中集合的关系及运算是完全相似的。但是，我们应该学习应用概率论的语言来解释这些关系与运算，并且会用这些关系将一些复杂事件表示为一些简单事件的代数式，为以后计算概率作必要准备。

例 1.6 甲、乙、丙三人对同一靶子射击，用 A、B、C 分别表示事件“甲击中”、“乙击中”和“丙击中”，试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) 甲乙都击中而丙未击中；

(2) 只有甲击中；

(3) 靶子被击中；

(4) 三人中最多有两人击中；

(5) 三人中恰好有一人击中。

解　(1) 事件“甲乙都击中而丙未击中”表示 A、B 与 $\bar{C}$ 同时发生，即 $AB\bar{C}$。

(2) 事件“只有甲击中”，表示 A 发生而 B、C 均未发生，即为 $A\bar{B}\,\bar{C}$。

(3) 事件“靶子被击中”，即 A、B、C 至少一个发生，可表示为 $A\cup B\cup C$。

(4) 事件“三人中至多两人击中”，即“三人中至少有一人未击中”，可表示 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$。

(5) 事件“三人中恰好一人击中”，即“三人中只有一人击中其余两人未击中”，可表示为 $A\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C$。 ▌

1.2　概率的定义及其计算方法

在这一节中，我们要给出概率的定义及其计算方法，这是概率论中最基本的一个问题。在考察一个事件是否会发生时，人们常常关心的是它发生的可能性大小。我们用概率来度量随机事件发生可能性的大小，这好比一根木棒有长度，一块土地有面积一样。概率是随机事件自身的一个属性，是客观存在的。一个根本的问题是，对于一个给定的随机事件，它发生的可能性大小的度量——概率，它究竟有多大?

在概率论发展的历史上，曾有过概率的古典定义、概率的几何定义、概率的频率定义等，这些定义各适合一类随机现象。那么如何给出适合一切随机现象的概率的最一般的定义呢? 1900 年数学家希尔伯特(1862～1943)提出要建立概率的公理化定义以解决这个问题，即从最少的几条本质特性出发去刻画概率的概念。1933 年数学家柯尔莫哥洛夫(1903～1987)首次提出了概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率定义的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处，这一公理化体系迅速获得举世公认。从此，概率论有了坚实的理论基础并得到了很大的发展。

1.2.1　概率的公理化定义

定义 1.1　若 Ω 是一给定的样本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集所组成的集合类，且满足下列条件

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为**事件域**，$\mathscr{F}$ 中的元素称为**事件**。

如此定义的 $\mathscr{F}$ 可以保证对各种事件运算是封闭的，下述定理说明了这一点。

定理 1.1 设 $\mathscr{F}$ 是事件域，则有

(1) $\varnothing \in \mathscr{F}$;

(2) 若 A、$B \in \mathscr{F}$，则有 $A \cap B, A \cup B, A-B \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n=1,2,\cdots,n,\cdots$，则有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

证明 (1) 注意到 $\varnothing = \overline{\Omega}$ 即得；

(2) 因为 A、B、$\varnothing \in \mathscr{F}$，由定义 1.1 的(3)得

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cdots \in \mathscr{F}$$

(3) 由对偶原理，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}$，于是根据定义 1.1 的(3)和(2)即知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。特别地，

$A \cap B \in \mathscr{F}$ 而 $A-B = A \cap \overline{B}$，所以 $A-B \in \mathscr{F}$。

由此看到，事件域 $\mathscr{F}$ 包含了诸多事件，而对于事件的运算它具有封闭性，这恰是我们所需要的。下面我们可以给出在一般情形下概率的严格定义了。

定义 1.2 设 Ω 是一给定的样本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的事件域，$P(A)$ 是定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数，若它满足下列三个公理：

(1) 非负性 $P(A) \geqslant 0$，对一切 $A \in \mathscr{F}$;

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 若 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$，且 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j$，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

概率的公理化定义刻画了概率的本质，概率是集合(事件)函数。若在事件域 $\mathscr{F}$ 上给出一个函数，当这个函数能满足上述三条公理时，就被称为概率；当这函数不能满足上述三条公理中任一条时，就被认为不是概率。

虽然概率的公理化定义适合一切随机现象，但它没有告诉人们如何去确定随机事件的概率。历史上在公理化定义出现之前概率的频率定义、古典定义、几何定义都是在一定的场合下，有着各自确定概率的方法，所以在有了概率的公理化定义之后，把它们看作确定概率的方法是恰当的，下面分别加以介绍。

1.2.2 确定概率的频率定义

概率的频率定义的基础是随机试验可以重复进行。

定义 1.3 在 n 次重复试验中，记 $n(A)$ 为事件 A 出现的次数，又称 $n(A)$ 为事件 A 的频数，称

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n} \tag{1.1}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率。 ▌

事件的频率反映事件在一次试验中发生的可能性的大小。频率越大，事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大；频率越小，事件 A 在一次试验中发生的可能性就越小。但频率随着试验次数的不同而不同，亦即对同一试验及同一事件 A，不同的 n 次重复试验一般会得到不同的频率，这一特性称为频率的波动性。

事件的频率在生产实践中经常使用。例如，检验产品质量的标准之一的"产品合格率"$=\dfrac{\text{合格品个数}}{\text{产品总数}}$；检验射击技术标准之一的"命中率"$=\dfrac{\text{命中次数}}{\text{射击总次数}}$，等等。

从频率的定义可知，频率具有下列性质：

(1) 非负性 $f_n(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性 $f_n(\Omega) = 1$；

(3) 可加性 若 $AB = \varnothing$，则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$。

对于性质(3)，当 A 与 B 互不相容时，欲计算 $A \cup B$ 的频数，可以分别计算 A 的频数和 B 的频数，然后再相加，即 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$，从而有

$$f_n(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A) + n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} = f_n(A) + f_n(B)$$

人们的长期实践表明：随着试验重复次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会稳定在某一常数 a 附近，我们称这个常数为**频率的稳定值**。频率的这个稳定值就是我们所求的概率。

虽然频率随试验次数的不同而不同，但随着试验次数的增多，事件的频率具有一定稳定性。下面这两个例子可用来说明频率的稳定性。

1. 掷硬币试验

历史上曾有很多著名的数学家作过掷一枚均匀硬币的试验。其结果见表1.1，从表中的数据可以看出：当试验次数 n 很大时，出现正面的频率在 0.5 这个数字附近摆动，而逐渐趋近此常数。出现正面的频率逐渐稳定在 0.5，用频率的定义可以说：出现正面的概率为 0.5。

表 1.1 历史上掷硬币试验的结果

试验者	投硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

2. 男婴出生频率

考察新生婴儿的性别，对人口统计是很重要的。历史上较早研究这个问题的有拉普拉斯(1794～1827)，他对伦敦、彼得堡、柏林和法国的出生人口进行研究，发现男婴出生率总是在22/43左右波动。表1.2给出了波兰从1927年到1932年间出生的婴儿总数，以及其中的男婴数。发现男婴出生率总是在0.517附近徘徊。

表1.2 波兰1927～1932年间男婴出生率

年份	1927	1928	1929	1930	1931	1932	共计或平均
出生数	958 733	990 993	994 101	1 022 811	964 573	934 663	5 865 874
男婴数	496 544	513 654	514 765	528 072	496 986	482 431	3 032 452
频率	0.518	0.518	0.518	0.516	0.515	0.516	0.517

虽然频率随试验次数的不同而不同，但随着试验次数的增多，事件的频率具有一定稳定性。频率的这种稳定性，说明随机事件出现的可能性大小是事件本身固有的一种客观属性，这个常数是随着事件的确定而客观存在的，是我们能对事件出现可能性的大小进行度量的基础。

在现实世界里，人们无法把一个试验无限次的重复下去，因此要精确获得频率的稳定值是困难的。但频率定义提供了概率的一个可供想象的具体值，并且在试验重复次数 n 较大时，可用频率给出概率的一个近似值，这一点是频率定义最有价值的地方。在统计学中就是如此做的，且称频率为概率的估计值。

1.2.3 确定概率的古典定义

在概率论的历史上，人们最先是对具有如下特点的随机试验进行研究的：

(1) 随机试验只有有限个结果 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$，

(2) 每个结果在一次试验中发生的可能性相等，

称具有以上两个特点的随机试验的为古典概型，古典概型也叫作**等可能概型**。概率的古典定义便是在古典概型中引入的。

定义1.4 设古典概型试验 E 的所有可能结果为 n，若事件 A 恰好包含其中的 m 个结果，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

这一定义称为概率的**古典定义**。容易验证，由上式确定的概率满足公理化定义，它的非负性与规范性是显然的；而满足可加性的理由与频率定义类似：当 A 与 B 互不相容时，计算 $A\cup B$ 的结果数可以分别计算 A 的结果数和 B 的结果数，然后再相加，从而有可加性 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

一般地，对于任意有限多个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

它称为有限可加性。 ▌

由古典概率的两个特性“有限性”及“等可能性”中，我们不难看出(1.2)式的合理性。在一次试验中，每个结果的出现机会同为$1/n$，现在事件A包含了m个结果，则在一次试验中事件A发生的概率应为$m \cdot \frac{1}{n}=\frac{m}{n}$。注意到(1.2)式中的分子是$A$所包含的试验结果的个数$m$，而分母是试验结果的总数$n$，故(1.2)式又可以写为

$$P(A) = \frac{A\text{所包含的试验结果的个数}}{\Omega\text{中试验结果的总数}} \tag{1.3}$$

A所含的结果数也称为有利于A的场合数，由等可能性的假设知，上述定义的确反映了随机事件出现的可能性大小。概率的古典定义简单、直观，不需要做大量重复试验，而且在经验事实的基础上，对被考察事件的可能性进行逻辑分析后就可得出该事件的概率。在古典概型中，求事件A的概率主要是计算A中包含的结果数和Ω中含有的所有结果数，因而在计算中经常要用到排列组合的知识。

例 1.7 掷两枚硬币，求出现一个正面一个反面的概率。

解 此例的样本空间$\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，所以Ω中所有的结果数为4，事件“出现一个正面一个反面”含有的结果的个数为2，因此所求事件概率为$\frac{1}{2}$。

注意：如果将样本空间记成$\Omega_1=\{$(二正)，(二反)，(一正一反)$\}$，则此三个结果不是等可能的。

在计算古典概型的概率时，一般不用把样本空间详细写出，但一定要保证每一个结果为等可能的。 ▌

例 1.8(摸球模型) 袋中有10个形状完全相同的球，其中6个白球，4个红球，从中不放回地连摸两次，每次摸出一球，求下列事件的概率：

① 两次摸到的都是白球；

② 第一次摸到白球第二次摸到红球。

若是有放回地摸球，上述事件的概率又如何？

解 (1) 不放回地摸球

① 设A表示事件“两次摸到的都是白球”。由于摸球是不放回的，因而第一次有10种取法，第二次有9种取法，因此共有$\mathrm{P}_{10}^2=10\times 9$种取法。又因为第一次有6个白球可供摸取，第二次只有5个白球可供摸取，故事件A由$\mathrm{P}_6^2=6\times 5$个结果组成，由上述概率的古典定义得