钟金标　余桂东 ▶ 著

椭圆型方程可解性研究

TUOYUANXING FANGCHENG KEJIEXING YANJIU

合肥工业大学出版社

本书由安庆师范学院出版基金资助出版

椭圆型方程可解性研究

钟金标　余桂东　著

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

椭圆型方程可解性研究/钟金标,余桂东著. —合肥:合肥工业大学出版社,2007.12

ISBN 978-7-81093-703-0

Ⅰ.椭… Ⅱ.①钟…②余… Ⅲ.椭圆型方程—可解性—研究 Ⅳ.O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 188542 号

椭圆型方程可解性研究

钟金标 余桂东 著 责任编辑 疏利民 责任校对 方 丹

出 版	合肥工业大学出版社	**版 次**	2007 年 12 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	**印 次**	2007 年 12 月第 1 次印刷
邮 编	230009	**开 本**	710×1000 1/16
电 话	总编室:0551—2903038	**印 张**	7.5
	发行部:0551—2903198	**字 数**	138 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	**印 刷**	合肥创新印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	**发 行**	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-703-0 定价:18.00 元

序　言

非线性偏微分方程(组)理论的研究可追溯到上个世纪早期,尤其最近几十年来,在生物学、生态学、人口动态学等方面出现的很多现象能够用非线性偏微分方程和方程组描述,因而引起了数学工作者对非线性偏微分方程(组)研究的极大兴趣. 同时,由于非线性偏微分方程和方程组的复杂性和多样性,使得这类问题的研究难度加大,发展潜力也大,也正因为如此,国内外的研究工作一直非常活跃,解决这类问题的新理论和新方法一直处于不断的发展中.

本书的内容主要是研究非线性椭圆型偏微分方程(组)的可解性. 目前,解决这类问题的方法主要有不动点定理,上、下界方法(也叫单调性方法),拓扑度理论,隐函数(组)定理,椭圆正则化方法,紧微法,变分法等方法. 在不动点理论中,最早的结果可算 Brouwer 不动点定理,即 E_n 的闭单位球到自身的连续映射有不动点,这个结果是 1910 年发表的 .1922 年 J. W. Alexander 将这个结果扩展到更一般情况,即在空间 $L^2[0,1]$ 和 $L^n[0,1]$ 中任意紧凸集上的到自身的连续映射有不动点.

1930 年 J. Schauder 又进一步扩张了该定理,即 Banach 空间中映凸紧集到自身的连续映射有不动点. 不动点理论通过 M. Krein, V. Smulian, G. Darbo, Sadovski 等人的工作,得到不断发展,并成为研究偏微分方程与方程组可解性的一种重要理论和方法.

1972 年,D. H. Sattinger 在他的著名论文[4]中使用上、下解方法研究了偏微分方程(组)解的存在性问题. 随后,有大量数学工作者利用这种方法研究非线性偏微分方程与方程组解的存在唯一性问题. 目前这种方法已成为非线性偏微分方程理论研究中重要的方法之一.

拓扑度理论是由 L. E. J. Brouwer 在 1912 年创立的,不过,他所建立的拓扑度只是针对有限维空间中的连续映射,现在人们称之为 Brouwer 度.

后来，随着线性泛函分析理论体系的形成，到了 1934 年，J. Leray 和 J. Shauder 将 Brouwer 工作推广到 Banach 空间中的全连续场，从而使拓扑度理论在偏微分方程的研究中发挥了重要作用．

隐函数(组)理论与变分法理论是随着17世纪微积分的创立而出现的解决数学物理问题的重要方法，很多数学工作者运用这些理论中的方法研究微分方程边值问题．

本书的内容是利用上述的理论和方法研究了非线性椭圆方程(组)的可解性．

第一章利用不动点理论，研究了半线性椭圆型方程(组)边值问题正解的存在性与唯一性．

第二章利用不动点理论，上、下解方法研究了有界洞型区域内半线性椭圆方程(组)正解的存在性、不存在性与唯一性．

第三章利用上、下解方法和 Leray-Schauder 不动点理论研究了一类半线性、拟线性椭圆方程(组)边值问题弱解的存在性与唯一性．

第四章利用度理论讨论了非线性椭圆方程组正径向解的存在性问题．

第五章研究了一类奇异拟线性椭圆型方程组的可解性．

第六章研究了调和方程的可解性．

作　者

2007 年 10 月 8 日

目录

第一章　半线性椭圆型方程组边值问题

引　言

本章利用不动点理论，研究了半线性椭圆型方程组边值问题正解的存在性与唯一性．共分四部分．

在第一部分研究了半线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,v), x \in \Omega \\ -\Delta v = f(x,u), x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.1}$$

这里 $\Omega \subset R^n (n \geqslant 1)$ 是一个有界光滑的凸集，$f(x,s)$，$g(x,s)$ 是定义在 $\bar{\Omega} \times R^+$ 上的函数．

在第二部分研究了半线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + F(x,U), x \in \Omega \\ U = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 为有界光滑域，且

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), \cdots, a_{1n}(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(x), \cdots, a_{nn}(x) \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$F(x,U)=\begin{pmatrix} f_1(x,u_1,\cdots,u_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_n(x,u_1,\cdots,u_n) \end{pmatrix}$$

矩阵 $A(x)$ 中各项在 $\bar{\Omega}$ 上连续，且 $a_{ij}\geqslant 0, i,j=1,2,\cdots n; f_k(x,u_1,\cdots,u_n)$ 关于各变元连续，$k=1,2,\cdots,n$；且存在常数 $c>0$，对任意 $(x,U)\in R^{2n}$ 满足 $0\leqslant f_k(x,U)\leqslant c, k=1,2,\cdots,n$.

在第三部分研究了半线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U+F(x) & x\in\Omega \\ U=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

有且仅有唯一正解．其中：

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x),\cdots,a_{1n}(x) \\ a_{21}(x),\cdots,a_{2n}(x) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(x),\cdots,a_{nn}(x) \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$x\in R^n, 0\leqslant f_i(x)\leqslant c$，$c$ 为常数

且 $f_i(x)$ 中至少有一个大于 0.

$A(x)$ 中各项在 $\bar{\Omega}$ 上连续，$a_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$.

在第四部分研究了边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u+f(u), x\in\Omega \\ u>0, x\in\Omega \\ u=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性、不存在性与唯一性．

第一部分　半线性椭圆型方程组正解的研究

摘　要：证明了一类半线性椭圆型方程组正解的存在性与唯一性，并获得了正解存在的一个必要条件，作为定理的应用，给出两个应用实例．

关键词：正解；半线性椭圆型方程组；紧正算子

在这一节，研究半线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,v), x \in \Omega \\ -\Delta v = f(x,u), x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.1}$$

假设问题(1.2.1)中的函数满足或部分满足下列条件(在不同定理中使用)

(A_1) $f(x,s)$，$g(x,s)$ 在 $\bar{\Omega}\times R^+$ 上是连续正函数，且 $\lim\limits_{s\to 0+} f(x,s) > 0$，$\lim\limits_{s\to 0+} g(x,s) > 0, x \in \bar{\Omega}$.

(A_2) $s \in (0,+\infty) \to \dfrac{f(x,s)}{s}$，$s \in (0,+\infty) \to \dfrac{g(x,s)}{s}$，对 $x \in \Omega$ 是递减的．

(A_3) $s \in (0,+\infty) \to f(x,s)$，$s \in (0,+\infty) \to g(x,s)$ 对 $x \in \Omega$ 是严格递增的．

(A_4) $s \in (0,+\infty) \to f(x,s)$，$s \in (0,+\infty) \to g(x,s)$ 对 $x \in \Omega$ 是递减的．

记 $M = \max\{\|a(x)\|, \|b(x)\|\}$，

这里 $a(x) = \lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s}$，

$$b(x)=\lim_{s\to+\infty}\frac{g(x,s)}{s},\ \|a(x)\|=\sup_{x\in\Omega}a(x),\ \|b(x)\|=\sup_{x\in\Omega}b(x).$$

根据(A_1)和(A_2)，可知$a(x)$和$b(x)$是非负有界函数，且满足

$$f(x,s)\geqslant a(x)s,g(x,s)\geqslant b(x)s. \tag{1.2.2}$$

$(A_5)M<\lambda_1$.

这里λ_1是$-\Delta$算子在区域Ω中0-Dirichlet边值问题的第一特征值．众所周知，$\lambda_1>0$和相应的特征函数φ_1在Ω中是正函数．

引理 1 若$f\geqslant0,g\geqslant0$，则问题(1.2.1)的解一定是正解．

证明 设(u,v)是问题(1.2.1)的解，根据(A_1)得到

$$\begin{cases}-\Delta u>0,x\in\Omega\\-\Delta v>0,x\in\Omega\\u=v=0,x\in\partial\Omega\end{cases}$$

由上调和函数的极值原理知$u>0,v>0,x\in\Omega$. 证毕．

现考察线性齐次方程组

$$\begin{cases}-\Delta u=b(x)v,x\in\Omega\\-\Delta v=a(x)u,x\in\Omega\\u=v=0,x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{1.2.3}$$

方程组(1.2.3)转变成

$$\begin{cases}LU=A(x)U,x\in\Omega\\U=0,x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{1.2.4}$$

众所周知，$-\Delta$算子的逆算子$L^{-1}=(-\Delta)^{-1}$是线性紧算子．

引理 2 若$M<\lambda_1$，则对$t\in[0,1]$，向量方程

$$\begin{cases}U=tL^{-1}(A(x)U),x\in\Omega\\U=0,x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{1.2.5}$$

仅存在平凡解 $U \equiv 0$.

证明 方程组(1.2.5) 等价于

$$\begin{cases} -\Delta u = tb(x)v, x \in \Omega \\ -\Delta v = ta(x)u, x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.6}$$

在方程组(1.2.6) 中对第一个方程两边乘以 u,在第二个方程两边乘以 v,然后在 Ω 上积分得:

$$\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x = t\int_\Omega b(x)uv\mathrm{d}x \leqslant M\int_\Omega |uv| \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{2}\int_\Omega (u^2+v^2)\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega |Dv|^2 \mathrm{d}x = t\int_\Omega a(x)uv\mathrm{d}x \leqslant M\int_\Omega |uv| \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{2}\int_\Omega (u^2+v^2)\mathrm{d}x,$$

因此,$\int_\Omega (|Du|^2 + |Dv|^2)\mathrm{d}x \leqslant M\int_\Omega (u^2+v^2)\mathrm{d}x$ (1.2.7)

利用 Poincare 不等式

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2$$

从(1.2.7) 得到

$$\int_\Omega (|Du|^2 + |Dv|^2)\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{\lambda_1}\int_\Omega (|u|^2+|v|^2)\mathrm{d}x$$

因为 $M < \lambda_1$,所以 $Du = Dv = 0, x \in \Omega$.

因此 u,v 等于常数,又在 $\partial\Omega$ 上 $u = v = 0$,

所以在 Ω 中 $u \equiv v \equiv 0$. 证毕.

引理 3[6] (不动点定理) 设 Z 是一个 Banach 空间,C 是 Z 的一个闭凸子集,若 T 是 C 到 C 的一个紧映射,R 为一个正常数,使对满足 $\|U\| = R$ 的任意 $U \in C$,有 $U \neq tT(U), 0 \leqslant t \leqslant 1$,则 T 有一个不动点 $U \in C$,且 $\|U\| \leqslant R$.

定理 1 设成立条件(A_1),(A_2),(A_3),则问题(1.2.1) 至少存在一个有界正解.

证明　记 $Z=[C(\overline{\Omega})]^2$ 和 $K=\{U\mid U\in Z, U\geqslant 0$,且在 $\partial\Omega$ 上 $U=0\}$,则 K 是 Z 的一个闭凸子集.

定义算子 $T:K\to K$ 如下:

$$TU=L^{-1}A(x)U+L^{-1}F(x,U), U=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\in K$$

这里 $F(x,U)=\begin{pmatrix}g(x,v)-b(x)v\\ f(x,u)-a(x)u\end{pmatrix}$

由条件(A_1),(A_2)知 $A(x)$ 和 $F(x,U)$ 的各项关于各自的变量是非负连续的.因为 $L^{-1}=(-\Delta)^{-1}$ 是紧正算子,于是算子 $T:K\to K$.

断言　存在一个常数 $R>0$,使得对满足 $\|U\|=R$ 的任意 $U\in K$ 和 $t\in(0,1]$,有 $U\neq tT(U)$.

假设不然,则存在$(0,1]$中序列$\{t_n\}$和 K 中序列$\{U_n\}$,满足 $\|U_n\|\to+\infty$,当 $n\to+\infty$ 时,即 $\|u_n\|\to+\infty$, $\|v_n\|\to+\infty$,当 $n\to+\infty$ 时,我们有:$U_n=t_nT(U_n)=t_nL^{-1}A(x)U_n+t_nL^{-1}F(x,U_n)$.

记 $\omega_n=\dfrac{U_n}{\|U_n\|}$

则 ω_n 满足 $\|\omega_n\|=1$.

且有 $$\omega_n=t_nL^{-1}A(x)\omega_n+t_nL^{-1}\frac{F(x,U_n)}{\|U_n\|} \tag{1.2.8}$$

因为$\dfrac{U_n}{\|U_n\|}$是有界的,以及$\dfrac{g(x,v_n)}{U_n}-b(x)\to 0$,(当 $\|U_n\|\to+\infty$ 时).

从而有

$$\frac{g(x,v_n)-b(x)v_n}{\|U_n\|}=\frac{v_n}{\|U_n\|}\left[\frac{g(x,v_n)}{v_n}-b(x)\right]\to 0,\text{当 } \|U_n\|\to+\infty$$

时. (1.2.9)

类似地，有$\dfrac{f(x,u_n)-a(x)u_n}{\|U_n\|}\to 0$，当 $\|U_n\|\to+\infty$ 时．　　(1.2.10)

利用 L^{-1} 的紧性，必要的话，通过取子列，可得到 $L^{-1}A(x)\omega_n$ 是收敛的．显然有 $t_n\to t_0\in[0,1]$ 和 $\omega_n\to\omega_0\in K$，且 $\|\omega_0\|=1$.

在方程(1.2.8)的两边取极限，且利用(1.2.9)与(1.2.10)得到 $\omega_0=t_0L^{-1}A(x)\omega_0$.

因此，根据引理2，得出 $\omega_0=0$ 这与 $\|\omega_0\|=1$ 矛盾．所以，我们的断言成立．再利用引理3知，T 有一个不动点 $U\in K$，且 $\|U\|\leqslant R$，即 $LU=A(x)U+F(x,U)$. 因为 $F(x,U)>0$，则 U 是问题(1.2.1)的有界正解．证毕．

定理2　设条件(A_1)，(A_2)，(A_3)成立，则问题(1.2.1)至多存在一个有界正解．

证明　分三步证明：

(1) 设$\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}$是问题(1.2.1)的两个有界正解．正常数$R$是它们的共同界，由条件$(A_1)$知 $f(x,u)$ 和 $g(x,v)$ 在 $\bar{\Omega}\times[0,R]$ 上是连续正函数．

记　$m=\inf\limits_{\Omega\times[0,R]}g(x,v)$，$\mu=\sup\limits_{\Omega\times[0,R]}g(x,v)$，

　　显然　$m>0$，$\mu>0$，

考察下列问题

$$\begin{cases}-\Delta\left(u_1-\dfrac{m}{\mu}u_2\right)=g(x,v_1)-\dfrac{m}{\mu}g(x,v_2)\geqslant 0, x\in\Omega\\ \left(u_1-\dfrac{m}{\mu}u_2\right)\Big|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

由最大值原理知

$$u_1-\frac{m}{\mu}u_2>0,\text{即 } u_1>\frac{m}{\mu}u_2.$$

类似可证 $u_2>\dfrac{m}{\mu}u_1$.　　(1.2.11)

(2) 设 $P=\{\tau \mid u_1 \geqslant \tau u_2, u_2 \geqslant \tau u_1, x \in \Omega\}$. 显然 $\tau=\dfrac{m}{\mu} \in P$ 因此 P 是非空的. 从 $u_1 \geqslant \tau u_2$ 和 $u_2 \geqslant \tau u_1$ 知 $u_1 \geqslant \tau^2 u_1$. 所以 $\tau^2 \leqslant 1$ 即 $\tau \in (0,1]$. 因此 $\sup\limits_{\tau \in P} \tau=\lambda$ 存在. 且 $u_1 \geqslant \lambda u_2, u_2 \geqslant \lambda u_1, \lambda \in (0,1]$. (1.2.12)

(3) 我们断言 $\lambda=1$,假设不然,则 $0<\lambda<1$,且一定成立 $v_1 \geqslant \lambda v_2, v_2 \geqslant \lambda v_1$. 事实上,利用($A_2$),有 $\dfrac{f(x,\lambda u_i)}{\lambda u_i} \geqslant \dfrac{f(x,u_i)}{u_i}, i=1,2$,即 $f(x,\lambda u_i) \geqslant \lambda f(x,u_i), i=1,2$,类似地,$g(x,\lambda v_i) \geqslant \lambda g(x,v_i), i=1,2$. (1.2.13)

利用条件(A_3),(1.2.12) 和(1.2.13) 得到

$$v_1(x)=\int_\Omega G(x,y)f(x,u_1(y))\mathrm{d}y \geqslant \int_\Omega G(x,y)f(y,\lambda u_2(y))\mathrm{d}y \geqslant \lambda\int_\Omega G(x,y)f(y,u_2(y))\mathrm{d}y \geqslant \lambda v_2$$

$$v_2(x)=\int_\Omega G(x,y)f(x,u_2(y))\mathrm{d}y \geqslant \int_\Omega G(x,y)f(y,\lambda u_1(y))\mathrm{d}y \geqslant \lambda\int_\Omega G(x,y)f(y,u_1(y))\mathrm{d}y \geqslant \mathrm{d}y \geqslant \lambda v_1 \tag{1.2.14}$$

这里 $G(x,y)>0$ 是 Laplace 算子 $-\Delta$ 在 0-Dirchlet 边界条件下的 Green 函数.

下面考察问题

$$\begin{cases} -\Delta(u_1-\lambda u_2)=g(x,v_1)-\lambda g(x,v_2) \geqslant 0, x \in \Omega \\ (u_1-\lambda u_2)\mid_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{1.2.15}$$

由(1.2.13) 和(1.2.14) 知

$$g(x,v_1)-\lambda g(x,v_2) \geqslant g(x,\lambda v_2)-\lambda g(x,v_2)$$

$$\geqslant \lambda g(x,v_2)-\lambda g(x,v_2)=0, x \in \Omega.$$

对问题(1.2.15) 使用最大值原理,得到 $u_1>\lambda u_2$;类似地,可证 $u_2 \geqslant \lambda u_1, v_1>\lambda v_2, v_2>\lambda v_1$. 利用这些不等式,条件($A_3$) 和(1.2.13) 可得

$$g(x,v_1)-\lambda g(x,v_2)>g(x,\lambda v_2)-\lambda g(x,v_2)$$

$$\geqslant \lambda g(x,v_2)-\lambda g(x,v_2)=0, x\in\bar{\Omega}.$$

再由条件(A_1)及$0<v_1,v_2<R$知

$\inf\limits_{\bar{\Omega}}[g(x,v_1)-\lambda g(x,v_2)]=\overline{m}>0.$

取ε足够小，使得$\overline{m}>\varepsilon_1 g(x,v_2)$，$(\lambda+\varepsilon_1)<1.$　　(1.2.16).

考察问题$\begin{cases}-\Delta[u_1+(\lambda+\varepsilon_1)u_2]=g(x,v_1)-(\lambda+\varepsilon_1)g(x,v_2), x\in\Omega\\ [u_1-(\lambda+\varepsilon_1)u_2]=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$

(1.2.17)

因为

$$g(x,v_1)-(\lambda+\varepsilon_1)g(x,v_2)=[g(x,v_1)-\lambda g(x,v_2)]-\varepsilon_1 g(x,v_2)$$

$$\geqslant\overline{m}-\varepsilon_1 g(x,v_2)>0.$$

对问题(1.2.17)利用最大值原理得到$u_1>(\lambda+\varepsilon_1)u_2$.

类似地，存在$\varepsilon_2>0$，使得$(\lambda+\varepsilon_2)<1$和$u_2>(\lambda+\varepsilon_2)u_1$.

取$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则$(\lambda+\varepsilon)<1$和$u_1>(\lambda+\varepsilon)u_2$，$u_2>(\lambda+\varepsilon)u_1$成立．

因此$\lambda+\varepsilon\in P$，这与$\lambda=\sup\limits_{\tau\in P}\tau$矛盾．

从而$\lambda=1$，因此，从(1.2.12)和(1.2.14)知

$u_1=u_2, v_1=v_2$. 证毕．

定理3　设条件(A_1)与(A_4)成立，且问题(1.2.1)至少存在一个有界正解，则$M<\lambda_1$.

证明　设(u,v)是问题(1.2.1)的一个有界正解．

$\lambda_1>0$，$w>0$分别是$-\Delta$算子在0-Dirchlet边值条件下的第一特征值和相应的特征函数，在问题(1.2.1)中第一方程两边乘以ω，并在Ω上积分，利用分部积分得到

$$-\int_\Omega u\Delta\omega\,\mathrm{d}x=\int_\Omega g(x,v)\omega\,\mathrm{d}x,\text{即 }\lambda_1\int_\Omega u\omega\,\mathrm{d}x=\int_\Omega g(x,v)\omega\,\mathrm{d}x.$$

利用条件(A_4)与(1.2.2)得到

$$\lambda_1(\|u\|+\|v\|)\int_\Omega \omega \mathrm{d}x > \lambda_1\int_\Omega u\omega \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,v)\omega \mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_\Omega g\left(x,\frac{(\|u\|+\|v\|)\|b\|}{b}\right)\omega \mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_\Omega b(x)\frac{(\|u\|+\|v\|)\|b\|}{b}\omega \mathrm{d}x = \|b\|(\|u\|+\|v\|)\int_\Omega \omega \mathrm{d}x$$

因此，$\|b\|<\lambda_1$；类似可证 $\|a\|<\lambda_1$，所以 $M<\lambda_1$，证毕．

例 1 考察方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = c_1(x)\mathrm{e}^{-\tau v}+c_2(x), x\in\Omega \\ -\Delta v = d_1(x)\mathrm{e}^{-\mu u}+d_2(x), x\in\Omega \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.18}$$

这里 $c_i(x), d_i(x), i=1,2$ 是 $\bar{\Omega}$ 上非负连续函数，τ 和 μ 是正常数．

$c_1(x)>0$(或 $c_2(x)>0$) 和 $d_1(x)>0$(或 $d_2(x)>0$).

此例中 $g(x,v)=c_1(x)\mathrm{e}^{\tau v}+c_2(x), f(x,u)=d_1(x)\mathrm{e}^{-\mu u}+d_2(x)$.

满足条件(A_1) 和(A_2)，且

$$a(x)=\lim_{s\to+\infty}\frac{f(x,s)}{s}=0<\lambda_1, b(x)=\lim_{s\to+\infty}\frac{g(x,s)}{s}=0<\lambda_1.$$

因此，条件(A_5) 被满足．

根据定理 1 知，问题(1.2.18) 至少存在一个有界正解．

例 2 考察方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = c_1(x)v^\alpha+c_2(x), x\in\Omega \\ -\Delta v = d_1(x)u^\beta+d_2(x), x\in\Omega \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.19}$$

这里 $c_i(x), d_i(x), i=1,2$ 是有界连续函数，

且 $c_2(x)>0, d_2(x)>0, \alpha,\beta\in(0,1]$ 是常数．

容易验证 $g(x,v)=c_1(x)v^\alpha+c_2(x), f(x,u)=d_1(x)u^\beta+d_2(x)$ 满足 (A_1)、(A_2) 和(A_3). 且 $a(x)=\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{f(x,s)}{s}=0<\lambda_1$，