

国际学院本科教学系列丛书

国际学院  
ICB  
International Education

# Guidance for Business Mathematics

# 商务数学

■ 中国农业大学国际学院 组编

■ 焦群英 祁力钧 马廷玺 编



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



国际学院本科教学系列丛书

Guidance for Business Mathematics

# 商务数学

中国农业大学国际学院 组编  
焦群英 祁力钧 马廷玺 编

F224.0  
38

中国农业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

商务数学/焦群英,祁力钧,马廷玺编. —北京:中国农业大学出版社,2008.3  
国际学院本科教学系列丛书  
ISBN 978-7-81117-421-2

I. 商… II. ①焦…②祁…③马… III. 经济数学-高等学校-教学参考资料 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 008517 号

书 名 Guidance for Business Mathematics

商务数学

作 者 中国农业大学国际学院 组编

焦群英 祁力钧 马廷玺 编

---

|      |                                                                     |                   |                   |
|------|---------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|
| 策划编辑 | 童 云                                                                 | 责任编辑              | 张苏明               |
| 封面设计 | 郑 川                                                                 | 责任校对              | 王晓凤 陈 莹           |
| 出版发行 | 中国农业大学出版社                                                           |                   |                   |
| 社 址  | 北京市海淀区圆明园西路 2 号                                                     | 邮政编码              | 100094            |
| 电 话  | 发行部 010-62731190,2620                                               | 读者服务部             | 010-62732336      |
|      | 编辑部 010-62732617,2618                                               | 出 版 部             | 010-62733440      |
| 网 址  | <a href="http://www.cau.edu.cn/caup">http://www.cau.edu.cn/caup</a> | e-mail            | cbsszs@cau.edu.cn |
| 经 销  | 新华书店                                                                |                   |                   |
| 印 刷  | 北京鑫丰华彩印有限公司                                                         |                   |                   |
| 版 次  | 2008 年 3 月第 1 版                                                     | 2008 年 3 月第 1 次印刷 |                   |
| 规 格  | 787×1092 16 开本                                                      | 15.5 印张           | 280 千字            |
| 印 数  | 1~2 000                                                             |                   |                   |
| 定 价  | 26.00 元                                                             |                   |                   |

---

图书如有质量问题本社发行部负责调换

# 序 言

这本参考教材是与中国农业大学国际学院的商务数学课程(Business Math)教材配套的教学参考书,读者对象是中国农业大学国际学院经济、工商管理 and 会计等专业的本科生。

国际学院商务数学课使用的是英文教材,而且是全英语授课。多年来,商务数学课程的教材主要采用的是 Raymond A Barnett 等人所著的《大学数学》(College Mathematics)的“微积分”(Calculus)部分,该书是供商务、经济、生命科学和社会科学等专业的学生使用的,其特点是:数学概念的阐述言简意赅、条理分明,不作过多的、抽象的理论论证,在不失严密性的基础上,着重于微积分在上述各专业的实际应用。

从多年的教学实践中,我们体会到:新入学的学生数学方面的基本英语词汇比较缺乏,对数学的专业英文术语和读法不熟悉,学生在听课和理解过程中遇到比较大的挑战。另外,微积分学与初等数学不同,要求学生在思维方法上有一个转变,因此在学习的过程中,对一些较深奥的概念、运算和推理过程,难免会遇到新的困难。为了帮助学生学好微积分这门课程,对重点、难点问题有更透彻的理解,我们编写了这本参考教材。

本教材分为 2 部分,第一部分是“数学常用词中英文对照表”,为读者阅读英文教材和听课提供帮助;第二部分是对重要的微积分学概念进行比较深入的中文解释,并编写了典型的例题,目的是帮助学生深入理解课程的内容,掌握分析和解题的方法。应该指出,本教学参考书不是原著的直接翻译,但又不脱离原著的体例和基本内容,希望同学与教材配合使用。对于每一章节的数学知识,首先深入浅出地介绍基本概念和解题思路,然后列举大量例题,从不同的侧面阐述理论知识和解题技巧的运用,并且在“分析点评”及“典型例题分析”中,对所学知识加以归纳、总结,突出重点。典型例题是教材例题的补充和扩展,通过典型例题的分析达到帮助学生加深基本概念,掌握解题方法的目的。典型例题的安排与教材顺序相同,题目难度逐渐提高。希望学生首先自己动手解题,然后再看步骤和结果,便于发现差距、利于迅速提高。每章之后有自测题。学生通过解题实践,提高自己分析问题和解决问题的能力。

本教学辅导教材的序言和名词解释由马廷玺教授编写,第一章和第二章由祁力钧教授编写,第三章至第六章由焦群英教授编写。马廷玺教授对全书进行统稿。

我们感谢国际学院的领导,对本教材编写工作的大力支持和关怀。历届国际学院的学生们在学习中提出的问题为我们编写教材提供了丰富的素材;王中营同学在图形绘制方面付出了艰辛的劳动,在此一并表示感谢!

编 者

2007 年 12 月

## 数学常用词中英文对照表

为了便于读者阅读《微积分》的英文教材,我们编写了这份“数学常用词中英文对照表”。所摘选的名词,仅限于初等函数和一部分几何名词。这样可与中学数学知识相衔接(对于一词多义者只介绍其数学含义)。读者在阅读教材时,如遇到表中未列入的名词,仍需查阅相关的字(词)典。至于“微积分学”的专用名词,将在授课过程中陆续加以介绍。

| 英文名词                        | 中文意义       |
|-----------------------------|------------|
| abscissa                    | 横坐标        |
| absolute value              | 绝对值        |
| acute angle                 | 锐角         |
| analytic geometry           | 解析几何       |
| approximation               | 近似         |
| area                        | 面积         |
| area of a triangle          | 三角形面积      |
| arithmetic sequence         | 算数数列       |
| asymptote                   | 渐近线        |
| average value               | 平均值        |
| axis                        | 轴          |
| binomial theorem            | 二项式定理      |
| break-even analysis         | 盈亏平衡点、保本点  |
| Cartesian coordinate        | 笛卡儿(直角)坐标系 |
| circle                      | 圆          |
| closed interval             | 闭区间        |
| combination                 | 组合         |
| common denominator          | 公分母        |
| common factor               | 公因式        |
| completing the square       | 配方(配成完全平方) |
| constant of proportionality | 比例常数       |
| contraction                 | 收缩         |
| convergence                 | 收敛         |

## 2 商务数学 *Guidance for Business Mathematics*

|                                   |         |
|-----------------------------------|---------|
| conversion                        | 转换      |
| coordinate of an ordered pair     | 有序数对的坐标 |
| coordinate plane                  | 坐标平面    |
| cosecant function                 | 余割函数    |
| cosine function                   | 余弦函数    |
| cost                              | 成本      |
| cross multiplication              | 十字相乘    |
| cube                              | 立方体     |
| cube root                         | 立方根     |
| cubic function                    | 三次函数    |
| curve                             | 曲线      |
| curve sketching                   | 绘制曲线草图  |
| decreasing function               | 减函数     |
| degree                            | 次       |
| denominator                       | 分母      |
| dependent variable                | 因变量     |
| difference of two functions       | 两个函数的差  |
| directed distance                 | 有向距离    |
| discriminant                      | 判别式     |
| divergence                        | 发散      |
| division                          | 除法      |
| domain                            | 定义域     |
| e-base of the natural logarithmic | 自然对数的底  |
| elementary function               | 初等函数    |
| ellipse                           | 椭圆      |
| equation                          | 方程      |
| equation in two variables         | 二元方程    |
| equilateral triangle              | 等边三角形   |
| equilibrium                       | 均衡、平衡   |
| error                             | 误差      |
| even number                       | 偶数      |
| expansion                         | 扩张, 展开  |
| explicit function                 | 显函数     |
| exponential function              | 指数函数    |
| extreme                           | 极值、最值   |
| factoring                         | 分解因式    |
| fraction                          | 分数      |

|                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| function notation        | 函数表示法                   |
| function(s)              | 函数                      |
| general solution         | 通解                      |
| geometric series         | 几何级数                    |
| graph                    | 图形、图像                   |
| half-open interval       | 半开区间                    |
| horizontal line          | 水平线                     |
| horizontally translating | 水平移动                    |
| hyperbolic (adj)         | 双曲线的                    |
| imaginary number         | 虚数                      |
| imaginary root           | 虚根                      |
| implicit function        | 隐函数                     |
| increasing function      | 增函数                     |
| independent variable     | 自变量                     |
| indeterminate            | 不定型、未定型                 |
| inequality               | 不等式                     |
| infinity                 | 无穷、无限                   |
| intercept                | 截距                      |
| interval                 | 区间                      |
| inverse function         | 反函数                     |
| irrational number        | 无理数                     |
| iteration                | 迭代                      |
| leading coefficient      | 前导系数(多项式中, 幂次最高的的变量的系数) |
| least squares            | 最小二乘方                   |
| limit                    | 极限                      |
| linear equation          | 线性方程                    |
| linear function          | 线性函数                    |
| logarithmic function     | 对数函数                    |
| marginal cost            | 边际成本                    |
| mathematical model       | 数学模型                    |
| maximum                  | 极大值                     |
| midpoint                 | 中点                      |
| minimum                  | 极小值                     |
| multiplication           | 乘法                      |
| natural logarithmic      | 自然对数                    |
| negative number          | 负数                      |
| numerator                | 分子                      |

|                            |                    |
|----------------------------|--------------------|
| numerical method           | 数值方法               |
| objective function         | 目标函数               |
| obtuse angle               | 钝角                 |
| octant                     | 卦限、八分之一圆           |
| odd number                 | 奇数                 |
| one-to-one corresponding   | 一一对应               |
| open interval              | 开区间                |
| operation                  | 运算                 |
| optimization               | 优化                 |
| ordered pair               | 有序数对               |
| ordinate                   | 纵坐标                |
| origin                     | 原点                 |
| parabola                   | 抛物线                |
| parallel lines             | 平行线                |
| parallelogram              | 平行四边形              |
| particular solution        | 特解                 |
| percentage error           | 百分误差               |
| perimeter                  | 周长                 |
| periodic function          | 周期函数               |
| permutation                | 排列                 |
| perpendicular line         | 垂直线                |
| piecewise-defined function | 分段函数               |
| point of intersection      | 交点                 |
| point-plotting             | 逐点描绘               |
| point-slope formula        | 点斜式                |
| polynomial                 | 多项式                |
| positive number            | 正数                 |
| power function             | 幂函数                |
| probability                | 概率                 |
| product                    | 乘积                 |
| proportionality            | 比例(关系)             |
| pythagorean theorem        | 勾股定理(商高定理、毕达格拉斯定理) |
| quadrant                   | 象限                 |
| quadratic function         | 二次函数               |
| quotient                   | 商                  |
| radian                     | 弧度                 |
| radical                    | 根、根式               |

|                               |              |
|-------------------------------|--------------|
| radius                        | 半径           |
| range of a function           | 函数的值域        |
| rate of change                | 变化率          |
| rational function             | 有理函数         |
| rationalization               | 有理化          |
| real line                     | 实数轴          |
| real number                   | 实数           |
| rectangle                     | 矩形           |
| rectangular coordinate system | 直角坐标系        |
| reducible                     | 可约的,可化简的     |
| reduction formula             | 化简公式         |
| reflection                    | 反射           |
| region                        | 区域           |
| regression analysis           | 回归分析         |
| residual                      | 残数的          |
| right angle                   | 直角           |
| right-handed system           | 右手坐标系        |
| root of an equation           | 方程的根         |
| secant line                   | 割线           |
| sequence                      | 数列           |
| series                        | 级数           |
| shift                         | 移动           |
| sigma notation                | $\Sigma$ 表示法 |
| similar triangle              | 相似三角形        |
| sine function                 | 正弦函数         |
| slope                         | 斜率           |
| slope-intercept formula       | 斜截式          |
| solution of an inequality     | 不等式的解        |
| solution set                  | 解集           |
| sphere                        | 球            |
| square root                   | 平方根          |
| straight line                 | 直线           |
| substitution                  | 替换、换元        |
| subtraction                   | 减法           |
| sum                           | 和            |
| surface                       | 曲面           |
| synthetic division            | 综合除法         |

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| tangent line                        | 切线    |
| term of a sequence                  | 数列的项  |
| three-dimensional coordinate system | 三维坐标系 |
| transcendental function             | 超越函数  |
| transformation                      | 变换    |
| trapezoid                           | 梯形(的) |
| triangle                            | 三角形   |
| trigonometric function              | 三角函数  |
| truncation                          | 截断、舍位 |
| two-point formula                   | 两点式   |
| unbounded function                  | 无界函数  |
| variable                            | 变量    |
| vertex of an angle                  | 角的顶点  |
| vertical line                       | 铅垂线   |
| vertically translating              | 铅垂移动  |
| volume                              | 体积    |

| 表达式           | 表达式的英文读法                                |
|---------------|-----------------------------------------|
| $a - b$       | $a$ subtract $b$                        |
| $a + b$       | $a$ plus $b$ ( $a$ adds $b$ )           |
| $a \times b$  | $a$ times $b$ (product of $a$ and $b$ ) |
| $\sqrt{a}$    | square root of $a$                      |
| $a_2$         | $a$ sub two                             |
| $a^b$         | $a$ with power $b$                      |
| $a^3$         | $a$ with power three                    |
| $\frac{a}{b}$ | $a$ over $b$ (或 $a$ is divided by $b$ ) |
| $\frac{1}{3}$ | one third                               |
| $\frac{1}{4}$ | one fourth                              |
| $f(x)$        | $f$ of $x$                              |

# 目 录

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 数学常用词中英文对照表 .....                                        | 1   |
| <b>第一章 导数 Derivative</b> .....                           | 1   |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 2   |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 14  |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 31  |
| <b>第二章 作函数简图的方法和优化 Graphing and Optimization</b> .....   | 34  |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 35  |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 51  |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 69  |
| <b>第三章 导数的进一步问题 Additional Derivative Topics</b> .....   | 72  |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 73  |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 82  |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 98  |
| <b>第四章 积分学 Integration</b> .....                         | 106 |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 107 |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 120 |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 140 |
| <b>第五章 积分的进一步问题 Additional Integration Topics</b> .....  | 145 |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 146 |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 155 |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 169 |
| <b>第六章 多元函数的微积分 Multivariable Calculus</b> .....         | 176 |
| 一、主要内容和概念 .....                                          | 177 |
| 二、典型例题解析 .....                                           | 185 |
| 三、自测题及答案 .....                                           | 204 |
| <b>模拟试题及解答 Samples of Examinations and Answers</b> ..... | 211 |

# 第一章 导数

## *Derivative*

主要内容和概念  
典型例题解析  
自测题及答案

代数学和微分学有什么区别呢？在代数学中，解方程得到的是变量的特解，是一个确定的值，一个静态的概念；在微分学中，更关注一个变量的变化是如何影响另一个变量变化的，是一个动态的概念。微分学在工程技术和社会科学中被广泛地应用，它是解决许多问题的有力工具。

# 一、主要内容和概念

本章主要介绍极限的概念、函数的连续性、导数及求导方法,同时也介绍幂函数的求导法则及一些基本的导数性质,以及导数在商业和经济领域中的应用等。

## 第一节 极 限

### Introduction to limits

对微分的学习首先要了解“极限”这个概念。这个概念能用一种精确的方法考察一个函数  $f(x)$  当  $x$  趋近于而不是等于定值  $c$  时  $f(x)$  的变化。本节介绍一种直观的求极限值的方法,重点放在概念的发展和理解上,而不是放在数学细节上。

#### 1. 函数和图:简要复习(Function and graphs:brief review)

图 1-1 是  $y=f(x)=x+2$  的图,它由一系列的  $(x, f(x))$  数组组成。比如  $x=2$  时,  $f(x)=4$ , 而  $(2, f(2))=(2, 4)$  是图上的一点。图上标出了  $(-1, f(-1)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 。注意自变量的定义域值  $-1, 1, 2$  与  $x$  轴相关,而函数值  $f(-1)=1, f(1)=3, f(2)=4$  与  $y$  轴相关。

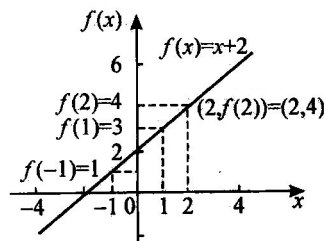


图 1-1

给定  $x$ , 有时就能直接从图 1-1 读出  $f(x)$  的值。

#### 2. 极限——图解方法(Limits—a graphical approach)

**定义 1** 将极限写成  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  或者当  $x \rightarrow c, f(x) \rightarrow L$ ,  $x$  不管从哪个方向趋近于  $c$ ,  $f(x)$  都趋近于一个唯一的实数  $L$ 。

**注意:**  $x \rightarrow c$  时的极限值与  $x=c$  时  $f(x)$  的函数值  $f(c)$  是不一样的。

#### 定义 2 单向极限

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = K$ ,  $K$  为  $x$  从左边趋近于  $c$  时的极限, 定义为“左极限”;

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ ,  $L$  为  $x$  从右边趋近于  $c$  时的极限, 定义为“右极限”。

**定理 1** 左极限和右极限均存在并且相等, 是  $f(x)$  当  $x \rightarrow c$  时极限存在的充分必要条件, 也就是说:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \text{ 当且仅当 } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

例如:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$  而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ , 因为左极限和右极限不相等, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  不存在。

### 3. 极限——代数方法 (Limits—an algebraic approach)

图解方法在研究极限过程中是非常有用的, 但是很多微积分中的极限可以通过代数简化, 并用极限的基本性质来快速求解。

#### 定理 2 极限的性质

设  $f$  和  $g$  是 2 个函数, 假定  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ , 其中  $L$  和  $M$  是实数 ( $f$  和  $g$  极限都存在), 那么有如下关系:

$$(1) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x) = kL, k \text{ 为任意常数};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] [\lim_{x \rightarrow c} g(x)] = LM;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \text{ 为偶数时}, L > 0.$$

将  $x \rightarrow c$  换成  $x \rightarrow c^-$  或  $x \rightarrow c^+$ , 定理 2 中的性质均成立。

#### 定理 3 多项式函数和有理函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), f \text{ 是任意多项式函数};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c), r \text{ 是任意 } x=c \text{ 时分母非零的有理函数}.$$

#### 定义 3 极限不定型式

如果  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  且  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  是不确定的, 更特别的有  $0/0$  不定型。不定型的极限可能存在, 也可能不存在, 需具体问题具体分析。如果极限是  $0/0$  不定型, 那就需要进一步的研究来确定极限是否存在, 如果存在则求出极限值。

如果分式的分母趋近于 0, 而分子趋近于非零数, 那么这个分式的极限则不是不定型, 事实上, 它的极限是不存在的。

**定理 4 分式的极限**

如果  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, L \neq 0$  而  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在。

**4. 差商的极限 (Limits of difference quotients)**

假设函数  $f$  定义在包含  $a$  的开区间内。在微积分中一个最重要的极限就是差商的极限,

即  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , 如果  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$ , 那么该差商的极限就是个不定型极限。

## 第二节 函数的连续性

### Continuity

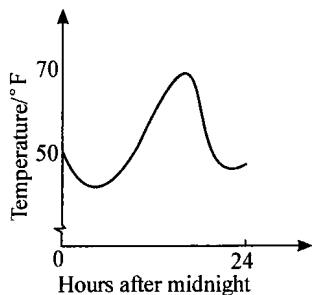
第一节定理 3 表明如果  $f$  是  $x=c$  时分母不为零的多项式函数或有理函数, 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (1-1)$$

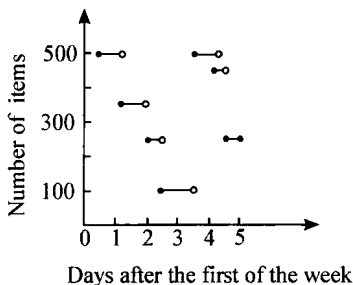
满足式(1-1)的函数被称作在  $x=c$  时连续。对连续函数的牢固理解在作图和分析图的时候也是非常必要的, 连续性也为解不等式提供了简便有效的方法, 在本书后面的章节会有介绍。

**1. 连续性 (Continuity)**

给函数的连续性下一个非正式的定义, 就是说如果在某个区间内一个函数的图能够一笔画成, 则说明函数在该区间内是连续的。如果函数的图像在  $x=c$  ( $c$  为常数) 时有间断点, 则该函数在  $x=c$  处不连续。很多自然现象的图是连续的, 而很多商业和经济方面的图像是不连续的。图 1-2(A) 表明了 24 h 内的温度变化, 该变化是一个连续的自然现象。图 1-2(B) 表明一周内仓库的库存情况, 是一个非连续的现象。



(A) Temperature for a 24 hour period



(B) Inventor in a warehouse during 1 week

图 1-2

**定义 连续性**

函数在  $x = c$  点处连续需同时满足以下 3 个条件:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  存在;
- (2)  $f(c)$  存在(在  $c$  点有定义);
- (3)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 。

如果一个函数在开区间  $(a, b)$  内的每一点都连续, 则该函数在开区间  $(a, b)$  内是连续的。

如果以上 3 个条件中有 1 个或多个不满足, 则函数在  $x = c$  处是不连续的。

**2. 连续性的性质 (Continuity properties)**

函数有一些有用的连续性性质:

如果 2 个函数在相同的区间内连续, 那么他们的和、差、积和商在该区间内也是连续的, 除了  $x$  的取值使得分母为零的情况。

这些性质和下面的定理 1 能够帮助判断一些重要的典型函数的连续区间, 而不用通过观察函数的图或者用定义中的 3 个条件来判断。

**定理 1 一些特殊函数的连续性性质**

(1) 常数函数  $f(x) = k$ ,  $k$  是常数, 则该函数在  $x$  为任意值时均连续, 如  $f(x) = 7$  在  $x$  取任意值时均是连续的。

(2) 当  $n$  为正整数时,  $f(x) = x^n$  在  $x$  取任意值时均连续。

(3) 多项式函数在  $x$  取任意值时均是连续的。

(4) 有理函数在  $x$  取任意值时均是连续的, 除了  $x$  的取值使得分母为零的情况。

(5) 当  $n$  是大于 1 的正奇数时, 如果  $f(x)$  总是连续的, 则  $\sqrt[n]{f(x)}$  总是连续的。

(6) 如果  $n$  是正偶数, 当  $f(x)$  是非负并且连续时, 则  $\sqrt[n]{f(x)}$  是连续的。

**3. 用连续性性质解不等式 (Solving inequalities using continuity properties)**

可以用“符号图法”来简便快速地求解不等式, 通过符号图法, 可以知道在区间  $(a, b)$  内, 如果  $f$  是连续的并且  $f(x) \neq 0$ , 那么  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内将不会改变符号。

**定理 2 区间  $(a, b)$  内的符号性质**

如果  $x$  取区间  $(a, b)$  内任意值时, 都有  $f(x) \neq 0$ , 且  $f(x)$  连续, 那么在区间  $(a, b)$  内  $f(x)$  要么总是大于 0, 要么总是小于 0。

定理 2 为求解多种不等式提供了简便有效的方法。

构建“符号图”的步骤:

给定函数  $f$ 。

第一步, 找到所有的“分割数”, 也就是说:

- (1) 找到所有使得  $f$  不连续的数(有理函数在  $x$  的取值使得分母为 0 时是不连续的);

(2)找到所有使得  $f(x)=0$  的数[对于有理函数来说,  $x$  的取值使得分子为 0 而分母不为 0 时则有  $f(x)=0$ ]。

第二步,将第一步中找到的所有分割数标在一条实数轴上,这些数将实数轴分成一些区间。

第三步,在第二步中分好的各个开区间内均选择一个测试数,并确定在取各个测试数时  $f(x)$  的值是正还是负。

第四步,用第二步中的实数轴来作出符号图,该图会显示出  $f(x)$  在各开区间内的符号。

注意:从符号图中,很容易看出不等式  $f(x)<0$  或  $f(x)>0$  的解。

### 第三节 导数

#### Derivative

#### 1. 变化率 (Rate of change)

定义 1 平均变化率

$y=f(x)$ , 那么从  $x=a$  到  $x=a+h$  的平均变化率如下:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, h \neq 0 \quad (1-2)$$

式(1-2)被称作“差商”,差商也被认为是平均变化率。

定义 2 瞬时变化率

$y=f(x)$ , 那么  $x=a$  时的连续变化率是  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  (该极限必须是存在的)。

#### 2. 切线的斜率 (Slope of the tangent line)

到目前为止,对差商的解释都是数字化的,下面给它一个几何解释。如果  $(a, f(a))$  和  $(a+h, f(a+h))$  是函数  $y=f(x)$  图上的 2 点,可以用斜率求解公式来计算经过这 2 点的割线的斜率(图 1-3)。

$$\begin{aligned} \text{割线的斜率} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (\text{即差商}) \end{aligned}$$

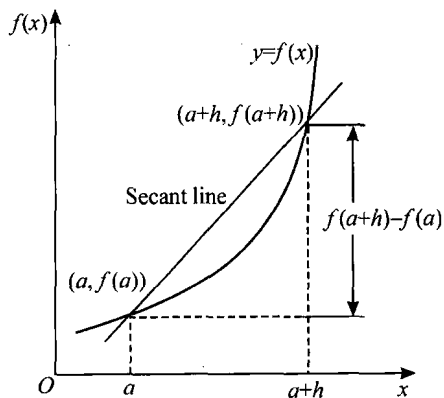


图 1-3