DuoGongNeng TiDian

ChuZhongShuXueJingSai

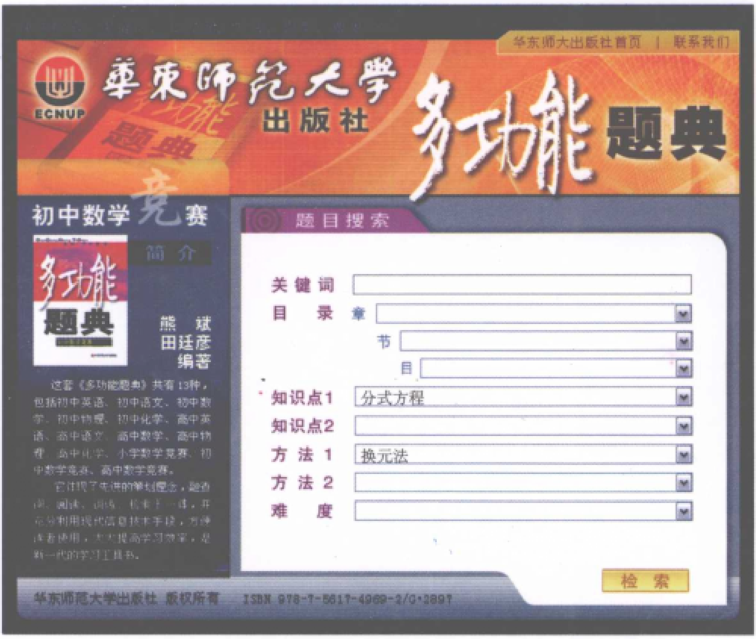
快速检索：
关键词、知识点、
方法、题型、难度……

多功能题典

初中数学竞赛

编著 熊 斌
田廷彦

华东师范大学出版社



多功能题典检索系统网址

http://tidian.ecnupress.com.cn

ISBN 978-7-5617-5826-7

9 787561 758267 >

定价：38.00元

www.ecnupress.com.cn

多功能题典

初中数学竞赛

熊斌 田廷彦 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

多功能题典. 初中数学竞赛/熊斌,田廷彦编著. —上海:华东师范大学出版社,2008. 5
ISBN 978 - 7 - 5617 - 5826 - 7

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①熊…②田… Ⅲ. 数学课-初中-习题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 012738 号

多功能题典 · 初中数学竞赛

编　　著　熊　斌　田廷彦
项目编辑　舒　刊　徐　金
策划组稿　倪　明　徐　金
文字编辑　徐惟简　陈信漪
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021 - 62450163 转各部门　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021 - 62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www. ecnupress. com. cn

印 刷 者　苏州永新印刷包装有限责任公司
开　　本　890 × 1240　32 开
印　　张　24. 5
插　　页　4
字　　数　993 千字
版　　次　2008 年 5 月第一版
印　　次　2008 年 5 月第一次
印　　数　001—21000
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5617 - 5826 - 7/G · 3377
定　　价　38. 00 元

出 版 人　朱杰人

致读者

亲爱的读者，展现在您面前的这套《多功能题典》是以中小学生、教师为读者对象，主要以中、高考要求与课程标准为依据而编写的系列丛书。包括高中语文、高中数学、高中英语、高中物理、高中化学、高中数学竞赛、初中语文、初中数学、初中英语、初中物理、初中化学、初中数学竞赛、小学数学竞赛共13册。

题典类图书的重要特征在于将学科知识以题解形式进行科学、系统的归纳整理，并给出解题思路，以提高学生解决问题和分析问题的能力。本丛书在这一基本特色的基础上，为方便读者使用，更为了提高效率，开发了多项功能，进一步发挥题典类图书的作用。

本丛书有以下特点：

作者权威 编写队伍由各学科考试命题的专家、学者与长期在教学第一线的资深特、高级教师组成。他们各取所长、各展所能，用自己长期积累、精心筛选的新颖而规范的经典试题共同打造出这一套实践性的丛书。

题目典范 本丛书不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性。书中每一道试题的编制和确定都经过了教学实践、作者编选、主编总纂和专家审定等多道关卡，确保题题经典。

体例新颖 丛书不仅对每一道题提供了精妙的"题解"，更引导读者"解题"，注重方法、思路的点拨，并对每一道题标出了难度，使读者学有所思、学有所得，不仅能举一反三，更能了解自己的学习水平，把握学习方向。

超强检索 我社配套本丛书开通了强大的网上检索功能。当您需要某种检索时，可以方便地进入网站(http://tidian.ecnupress.com.cn)，从难度、题型、知识点、方法技巧等不同维度，及关键字进行组合检索，就像使用Google和百度一样方便。

谨以此书献给在求学路上奋力拼搏的学子们，愿您一书在手，不再为茫茫无垠的题海而迷茫，迅速提高学习成绩，取得成功。同样，谨以此书献给为教育事业默默耕耘的教师们，愿这本书能给您带来诸多便利，从而提高教学质量。

鉴于本丛书立意新颖，篇幅较大，难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

华东师范大学出版社

教辅分社

前　言

2008年8月夏季奥运会将在北京隆重地举行.大家都知道,体育宣扬的是奥林匹克精神.奥林匹克精神就是要追求卓越和完美,它的一大特点是:只有奖赏,没有惩罚.也就是说,你即使跑最后一名也没关系,其前提是,比赛必须是公正的"费厄泼赖"(Fair play).作为智力上角逐的数学奥林匹克,其精神实质与体育比赛完全相同.

数学奥林匹克对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用.通过开展数学奥林匹克活动,可以更好地发现和培养优秀学生,并能提高教师的水平,促进教学改革.

我国的数学竞赛始于1956年."我们也要搞数学竞赛了!"华罗庚说.1956年,首先在北京、天津、上海和武汉举办了一次数学竞赛;由于政治运动的影响,这一活动时断时续;1962年政治环境开始好转,北京等城市又举办了几次.到了"文化大革命",教育陷入了全面瘫痪的状态.数学竞赛也就停办了.1978年,"科学的春天"到来了.华罗庚旋即主持了全国八省市的中学数学竞赛.1981年,中国数学会决定举行全国高中数学联合竞赛.1984年,中国数学会普及工作委员会举办了全国初中数学联赛.1985年华罗庚去世,为了纪念他,于1986年开始举办低年级的"华罗庚金杯赛",影响很大.

1985年,我国派出两名选手非正式地参加了IMO,1986年起,除了在台湾举办的一次之外,我国都派足6名选手正式参加IMO.除了三次成绩稍有点偏后,中国队总是团体第一、二名,而且以第一名居多.如今,中国选手在国际上摘金夺银,极大地鼓舞了青少年学习数学的兴趣,激发了他们的上进心和荣誉感.

目前,国内外的初中数学竞赛很多,一批数学家参与了命题和培训工作,其中有许多非常好的数学问题,这些试题对学生掌握基本的数学思想和方法,进而提高分析问题和解决问题的能力有着非常好的作用,另外,有些问题又有一定的背景,对进一步的学习和探究有着很好的引导作用.

本题典从国内外的竞赛试题中收集了一些好的试题,加以整理、点评,也提供了作者自编的一些试题供大家参考.在以前,国内也曾出过一些数学竞赛题典.此次的"多功能"题典应该说在分类上更加细致,表现在:初中与高中分册,目录分章分节,题目的难度按星级、题型及方法进行分类,这样可以大大提高图书的利用率,使之成为"立体"的书.此次在题目的选择上也多有创新,除了一些重要的老题目得以保留,更多的是新题目,学科覆盖面十分广."多功能"题典对于广大教师和参赛

学生是一部较理想、合适的参考书.

目前,全国性的初中数学竞赛有如下几个:

1. 全国初中数学联赛 1984年,中国数学会普及工作委员会商定,委托天津市数学会举办一次初中数学邀请赛,有14个省、市、自治区参加,同年11月,在宁波召开的中国数学会第三次普及工作会议上,一致通过了举办"全国初中数学联赛"的决定,并详细商定了一些具体办法,规定每年四月的第一个星期日举行"全国初中数学联赛".从此,"全国初中数学联赛"也形成了制度."全国初中数学联赛"原来不分一试、二试.为了更好地贯彻"在普及的基础上不断提高"的方针,1989年7月,在济南召开的"数学竞赛命题研讨会"上,各地的代表商定,全国初中数学联赛也分两试进行,并对第一试,第二试各种题型的数目,以及评分标准作出明确的规定,使初中数学联赛的试卷走向规范化.全国初中数学联赛的第一试,着重基础知识和基本技能,题型为选择题(6题),填空题(4题),满分70分;第二试着重分析问题与解决问题的能力,题型为解答题,三大题的内容分别为几何综合题、代数综合题、杂题,满分也是70分.两试总分共140分.

全国初中数学联赛是群众性的数学课外活动,是大众化、普及型的数学竞赛,目的是为了让更多学生都能发挥他们的聪明才智,培养兴趣,充分发掘他们学习上的潜力,调动学习数学的积极性,全国初中数学联赛题目不难,又要有点意思和背景.以中国数学会普及工作委员会制订的《初中数学竞赛大纲》为准,命题坚持"大众化、普及型、不超纲、不超前"的原则.

2. 全国初中数学竞赛 根据原国家教委的批示,中国教育学会中学数学教学专业委员会于1998年4月18日举办了首届全国初中数学竞赛,这次竞赛的宗旨是:"积极推进素质教育,根据原国家教委颁布的《义务教育初中数学课程计划》和《初中数学教学大纲》提出的要求,促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施,激发学生学习数学的兴趣,培养学生应用数学的意识和能力,满足学有余力的学生学习数学的愿望,发展他们的数学才能."

从1998年以来,每年4月的第一个星期日举行全国初中数学竞赛,竞赛的时间是2个小时,试卷由5个选择题,5个填空题,4个解答题(或者是:6个选择题,6个填空题,3个或者4个解答题)组成.命题范围以义务教育《初中数学教学大纲》的内容,要求为基本依据,试题与学生课内学习的内容结合得比较紧密,着重考查学生对数学知识的理解和应用数学知识解决实际问题的能力.深受广大教师和学生的欢迎.

3. 华罗庚金杯少年数学邀请赛 为纪念著名数学家华罗庚教授逝世一周年,1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中央电视台青少年中心、中国教师报等单位联合发起主办.参赛对象分别为小学六年级和初中一年级学生.20年来,"华杯赛"一直受到中央领导和老一辈革命家的重视与关怀.1986年中共中央总书记胡耀邦亲自为"华罗庚金杯"题写杯名.方毅、卢嘉锡、王首道、吴

阶平、钱伟长、王光英、万国权、张怀西、李蒙等领导都曾亲临赛场视察，为获奖选手颁奖. 中国数学界的权威人士对"华杯赛"也给予极大的关注. 著名数学家、中国科学院院士王元研究员、杨乐研究员，北京大学丁石孙教授、著名数学家曾肯成教授、王寿仁教授、龚升教授、梅向明教授都曾出任主试委员会顾问，并亲自参与审题. 世界著名数学大师陈省身先生曾出任"华杯赛"的名誉主任，并为"华杯赛"题词. 到今年，"华杯赛"一共举办了 11 届，水平越来越高，影响越来越大，并成为弘扬华罗庚教授的爱国主义精神，学习华罗庚教授的优秀品质，激发中小学生学习数学的兴趣，普及数学科学的一项具有中华民族特色的少年数学大赛.

4. "希望杯"全国数学邀请赛　由中国科学技术协会普及部、中国优选法统筹法与经济数学研究会、华罗庚实验室、《数理天地》杂志社、《中青在线》网站主办. 参赛对象为四、五、六、七、八年级及高一、高二年级的学生. 通过邀请赛活动，引导学生学好数学课程中最主要的内容并适当地拓宽知识面，鼓励他们探索数学在其他学科和社会活动中的应用，激发他们钻研和应用数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力，同时也为数学教师提供新的信息和资料，以促进我国数学教育水平的提高，为培养 21 世纪有创新精神的青少年而努力.

"希望杯"分年级命题，每个年级组都进行两试. 所有报名参赛的学生都参加第一试，其中成绩优秀的选手参加第二试. 第一试：考查教学进度内现行数学课程应掌握的内容，对知识和能力的考查并重. 满分为 120 分. 第二试：考查内容同第一试，能力上比第一试要求高，满分为 120 分.

本书在编写过程中，参考了大量的中外书刊，作者向这些原作者表示诚挚的感谢. 对于书中存在的问题和不足，请读者不吝指正.

熊　斌　田廷彦

2007 年 10 月于上海

目　录

第一篇　代　数

第二篇 平面几何

第三篇　初等数论

第四篇　组　合

第一篇　代　　数

第1章　实　　数

1.1　实数的运算

1.1.1 ★ 计算：$2\,005\times 20\,062\,006-2\,006\times 20\,052\,005$.

解析　将 20 062 006 及 20 052 005 分别分解为两数的积，得

$$20\,062\,006=2\,006\times 10\,000+2\,006=2\,006\times 10\,001,$$

$$20\,052\,005=2\,005\times 10\,000+2\,005=2\,005\times 10\,001.$$

所以，原式 $=2\,005\times 2\,006\times 10\,001-2\,006\times 2\,005\times 10\,001=0$.

评注　一般地有

$\overline{abab}=\overline{ab}\times 101$；$\overline{abcabc}=\overline{abc}\times 1\,001$；$\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\times 10\,001$；…

1.1.2 ★ 计算：$\dfrac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+7\times 14\times 21}{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+7\times 21\times 35}$.

解析　$$原式=\frac{1\times 2\times 3\times(1+2\times 2\times 2+7\times 7\times 7)}{1\times 3\times 5\times(1+2\times 2\times 2+7\times 7\times 7)}=\frac{2}{5}.$$

1.1.3 ★ 计算：$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{99\times 100}$.

解析　$$原式=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

评注　在做分数加减法运算时，根据特点，将其中一些分数适当拆开，使得拆开后有一些分数可以相互抵消，达到简化运算的目的，这种方法叫拆项法. 本例中，我们把$\dfrac{1}{n\times(n+1)}$拆成$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，即有

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

其他常用的拆项方法如：

(1) $\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\left[\text{或}\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)\right]$. 它经常用于分母各因子成等差数列，且公差为 d 的情形.

(2) $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$.

1.1.4 * 计算：$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}+\frac{1}{270}+\frac{1}{378}+\frac{1}{504}+\frac{1}{648}+\frac{1}{810}+\frac{1}{990}$.

解析 原式 $=\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{6\times9}+\frac{1}{9\times12}+\frac{1}{12\times15}+\frac{1}{15\times18}+\frac{1}{18\times21}+\frac{1}{21\times24}$

$$+\frac{1}{24\times27}+\frac{1}{27\times30}+\frac{1}{30\times33}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{33}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{10}{99}.$$

1.1.5 ** 计算：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$.

解析 因为 $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$，所以

原式 $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{99\times100}\right)=\frac{4\,949}{19\,800}.$$

1.1.6 ** 计算：$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}$.

解析 因为 $\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以

原式 $=\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{100\times101}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{101}\right)=\frac{99}{101}$.

1.1.7 ** 设 $A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$，求与 A 最接近的正整数.

解析 对于正整数 $n\geqslant3$，有

$$\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right).$$

所以 $\quad A = 48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$

$$= 48\times\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{98}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{102}\right)\right]$$

$$= 12\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)$$

$$= 25-12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right).$$

因为 $12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)<12\times\frac{4}{99}<\frac{1}{2}$，所以，与 A 最接近的正整数为 25.

1.1.8 ★★ 2 008 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得到一个数，再加上所得的数的 $\frac{1}{3}$ 又得到一个数，再加上这次得数的 $\frac{1}{4}$ 又得到一个数，…，依此类推，一直加到上一次得数的 $\frac{1}{2\,008}$. 最后得到的数是多少？

解析 由 2 008 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得 $2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$，再加上这数的 $\frac{1}{3}$ 得 $2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$，依此类推，最后得到的数为

$$2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2\,008}\right)$$

$$= 2\,008\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2\,009}{2\,008}=\frac{2\,008\times 2\,009}{2}$$

$$= 2\,017\,036.$$

1.1.9 ★ 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

解析 原式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{64}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{64}$$

$$=\cdots=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}.$$

1.1.10 ★ 计算：$S=1-2+3-4+\cdots+2\,007-2\,008$.

解析 $S=(1-2)+(3-4)+\cdots+(2\,007-2\,008)$

$$=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{\text{共}1\,004\text{个}}$$

$=-1\,004.$

1.1.11 ** 计算：$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+19\times 20.$

解析　因为

$$1\times 2=\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3,$$

$$2\times 3=\frac{1}{3}(2\times 3\times 4-1\times 2\times 3),$$

$$3\times 4=\frac{1}{3}(3\times 4\times 5-2\times 3\times 4),$$

……

$$19\times 20=\frac{1}{3}(19\times 20\times 21-18\times 19\times 20),$$

所以

$$\begin{aligned}&1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+19\times 20\\=&\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3+\frac{1}{3}(2\times 3\times 4-1\times 2\times 3)+\cdots\\&+\frac{1}{3}(19\times 20\times 21-18\times 19\times 20)\\=&\frac{1}{3}\times 19\times 20\times 21=2\,660.\end{aligned}$$

1.1.12 ** 计算：$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\cdots+28\times 29\times 30.$

解析

$$\begin{aligned}&1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\cdots+28\times 29\times 30\\=&\frac{1}{4}\times 1\times 2\times 3\times 4+\frac{1}{4}(2\times 3\times 4\times 5-1\times 2\times 3\times 4)+\cdots\\&+\frac{1}{4}(28\times 29\times 30\times 31-27\times 28\times 29\times 30)\\=&\frac{1}{4}\times 28\times 29\times 30\times 31=188\,790.\end{aligned}$$

1.1.13 ** 计算：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}.$

解析　设 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$，则

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}}.$$

所以

$$S-\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{101}}.$$

故

$$S=2-\frac{1}{2^{100}}.$$

评注　一般地，对于求和：$1+q+q^2+\cdots+q^n$，我们常常采用如下方法，令

$$S=1+q+q^2+\cdots+q^n,$$

则
$$qS=q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1},$$
于是
$$S-qS=1-q^{n+1},$$
$$S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}(q\neq 1).$$

1.1.14 ** 计算：$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$.

解析 设 $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$，则 $\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{3^{11}}$，所以
$$S-\frac{1}{3}S=1-\frac{1}{3^{11}},\ S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{10}}.$$

1.1.15 * 计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,999}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,998}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,999}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,998}\right)$.

解析 设 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,999}$，$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,998}$，则

原式 $=a(1+b)-(1+a)b=a-b=\frac{1}{1\,999}$.

1.1.16 ** 计算下列繁分数：

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\ddots\ 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{113}{355}}}}}\ (2\,008\text{ 个减号}).$$

解析 先耐心地算几步，从中发现规律. 可将 $\frac{355}{113}$ 用字母 a 代替(这样可以得到更一般的结论). 自下而上逐步算出

$$1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a},\ 1-\frac{1}{\frac{a-1}{a}}=1-\frac{a}{a-1}=\frac{-1}{a-1},$$
$$1-\frac{1}{\frac{-1}{a-1}}=1+(a-1)=a.$$

由此可见，每计算 3 步，a 又重新出现，即 3 是一个周期. 而 $2\,008=3\times 669+$