高等学校教材

数学分析讲义

（第五版）

上册

刘玉琏 傅沛仁 林玎 苑德馨 刘宁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

（第五版）

上 册

刘玉琏 傅沛仁
林 玎 苑德馨 刘 宁 编

高等教育出版社

内容提要

本书分上、下两册，是在第四版的基础上修订而成的，在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字，使内容更加完善。上册内容包括：函数，极限，连续函数，实数的连续性，导数与微分，微分学基本定理及其应用，不定积分，定积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范院校本科教材，也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义．上册/刘玉琏等编．—5版．—北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023580-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第029246号

策划编辑　李　蕊　**责任编辑**　李华英　**封面设计**　张志奇

责任绘图　尹文军　**版式设计**　王艳红　**责任校对**　张　颖

责任印制　宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	北京新华印刷厂		
		版　　次	1966年3月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2008年5月第5版
印　　张	16.5	**印　　次**	2008年5月第1次印刷
字　　数	420 000	**定　　价**	23.90元

物料号　23580-00

第五版前言

此次修订仍保持原书基本理论的水平，知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字。如对概念、定理的分析及其相互之间的联系，重要的反例等。此次增补的主要内容有：为了使读者了解黎曼积分为什么是连续函数的积分，简要地介绍了可数集和零集的概念，并给出非常有用的黎曼可积的充分必要条件，即勒贝格定理。无穷级数与反常积分是“硬分析”（古典分析学）的内容，它对学生有较高的基本训练，很重要。反常积分部分增补了狄利克雷判别法和阿贝尔判别法，使其内容更加完整，为此增补了第二积分中值定理。在含参变量反常积分中增补的几个重要例题，使本书要用到的几个结果得以自我完整。

本书第五版责任编辑李华英对本书稿精心审改，为提高书稿的质量付出了辛勤劳动，在此谨向她表示衷心感谢。限于编者的水平，谬误在所难免，我们期待着广大读者和老师们批评指正。

编者

2007 年 5 月于长春东北师大

第四版前言

从前几版情况看，使用本书作为数学分析课教材的学校多为高师院校，为了加强基础，在第十章讲多元函数微分学时，首先把函数概念提高一步，给出比较严格的函数定义，并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义，对其性质予以证明。我们认为，补加这部分内容对培养合格的中学数学教师是有益的。

本书的知识内容、知识范围、知识的深度和广度、知识的难易程度、例题和练习题的选配、与其后继课的衔接等，基本上能满足当前多数兄弟院校对数学分析课的教学需要。因此本书的主体内容基本上不作变动。在保持本书通俗易懂，适于自学，便于讲授的基础上，修错补漏，使其更好地为提高高校的基础课教学质量服务。

因编者年事已高，身体欠佳，特邀请三位有多年的丰富的数学分析教学经验的教师参加协助修订，她们是林玎、苑德馨和刘宁。

本书第四版责任编辑李陶同志对书稿精心审改，为提高本书的质量付出了辛勤劳动，在此谨向他表示衷心感谢。限于编者的水平，谬误在所难免，诚恳期望广大读者和老师们批评指正。

编者

2002年10月于长春

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编,高等教育出版社 1987 年 4 月第一版)配套使用,此次修订,内容和体例原则上不作大的变动,并保持本书通俗易懂,便于自学的特点。主要的改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别的增删,对练习题作了小量调整和精简,对某些文字叙述作了改写或重写。引入了量词符号,从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动。

此次修订,得到韩山师专林庆瑞,贵阳师专任永复、丁丰朝,泉州师专蔡永芳,晋东南师专李江等老师们的关怀和支持。他们经过多次教学实践,对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议。这是提高修订质量不可缺少的外部条件。同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德馨、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助。在此谨向他们表示衷心感谢。

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审,对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导,并细致审定书稿,纠正一些错误和不妥之处,为提高书稿质量付出了艰苦劳动。在此谨向他表示衷心感谢。

尽管本书做了两次修订,但限于编者的水平,谬误仍在所难免。敬希广大读者和老师们再予批评指正。

编者

1991 年 8 月于东北师大

第二版前言

从1960年本《讲义》出版以来，收到许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订，根据1980年5月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求；极限的讲法注意了与现行高中微积分初步的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学。

此次修订，每节（个别除外）之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习数学分析的不同要求，在每个练习题（个别除外）中分为甲类题（在符号“* * * *”之前）与乙类题（在符号“* * * *”之后）。我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为数学分析代用教材，只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为数学分析的教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减。

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时，吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取，考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础，注意了数学分析课程本身的系统性，照顾了其他后继课的需要。文字叙述力求通顺，定理证明力求详明，使其通俗易懂，便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析；对一些定理的证明，除了给出分析的严格证明外，注意用几何图形帮助读者理解定理内容，掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印，它们有的是对某些问题作进一步的说明；有的是教学上的难点；有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者，可先不阅读小字部分，待逐步掌握数学分析的方法之后，再阅读这部分内容。

由于我们水平有限，错误和不妥之处一定很多，敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写，傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系
数学分析教研室
1960 年于长春

常用符号与不等式

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“$\in$”表示“属于”；符号“$\overline{\in}$”（或“$\notin$”）表示“不属于”；符号“$P(x)$”表示“元素 x 具有性质 P”.

设 A 是集合，x 是元素. 例如：

$x\in A$——元素 x 属于 A；$x \overline{\in} A$（或 $x\notin A$）——元素 x 不属于 A；$\{x \mid x\in A, P(x)\}$——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体.

2. 集合之间

符号“$\subset$”表示“包含”；符号“$=$”表示“相等”；符号“$\varnothing$”表示“空集”；符号“$\cup$”表示“并”或“和”；符号“$\cap$”表示“交”或“乘”；符号“$\setminus$”表示“差”.

设 A 与 B 是两个集合. 例如：

$B\subset A$——B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含.

$B\subset A$，且 $A\neq B$（或 $B\subsetneqq A$）——B 是 A 的真子集.

$A\setminus B=\{x \mid x\in A, \text{但 } x\overline{\in} B\}$——$B$ 关于 A 的差集，如图 0.1 的(a).

若 $B\subset A$，$\complement_A B=\{x \mid x\in A, \text{但 } x\overline{\in} B\}$——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”，如图 0.1 的(b).

$A\cup B$——A 与 B 的并集或和集，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}，\text{如图 0.2 的(a)}.$$

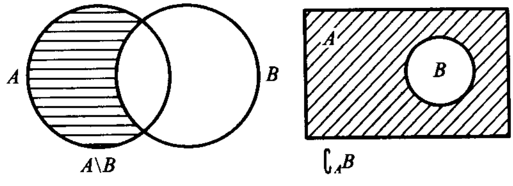

图 0.1

$A\cap B$——A 与 B 的交集或积集,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 同时 } x\in B\},$$如图 0.2 的(b).

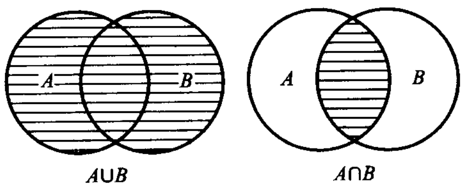

图 0.2

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid \text{存在某个正整数 } k, \text{有 } x\in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid \text{对任意正整数 } k, \text{有 } x\in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数.全体实数,即实数集,记为 **R**.我们已知实数集 **R** 中的数和数轴上的点是一一对应的,因此也称 **R** 是**实直线**.常将“数 a”说成“点 a”,反之亦然.本书所说的数集都是实数集 **R** 的子集.实数集 **R** 有些常用的重要子集:

符号“$\mathbf{N}_+$”表示正整数集;符号“**N**”表示**自然数集**;符号“**Z**”表示**整数集**;符号“**Q**”表示**有理数集**,有

$$\mathbf{N}_+\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

符号 $\mathbf{R}_+$ 表示正实数集，符号 $\mathbf{R}_-$ 表示负实数集，有

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_-\cup\{0\}\cup\mathbf{R}_+,\quad \mathbf{N}_+\subset\mathbf{R}_+.$$

1. 区间

为了书写简练，将各种区间的符号、名称、定义列表如下：($a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$)

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无穷区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，符号 ∞ 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的通称，读作“无穷大”. 在数学分析中不把它们看做数，它们在数轴上也没有位置，一般不与实数作四则运算. 但它们与实数有顺序关系，$+\infty$ 表示比一切实数都大，$-\infty$ 表示比一切实数都小，即对任意实数 x，有 $-\infty<x<+\infty$. 无穷开区间 $(-\infty,+\infty)$ 也表示实数集 $\mathbf{R}$.

2. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$，任意 $\delta>0$.

数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，通常是对某个确定

的邻域半径 δ,常将它表为 $U(a)$,简称 a 的**邻域**.

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 **a 的 δ 去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ,常将它记为 $\mathring{U}(a)$,简称 **a 的去心邻域**.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的,其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"或"推得",或"若……,则……".

符号"$\Longleftrightarrow$"表示"充分必要",或"等价".

设 A,B 是两个陈述句,可以是条件,也可以是命题. 例如:

$A\Rightarrow B$——若命题 A 成立,则命题 B 成立;或命题 A 蕴涵命题 B;称 A 是 B 的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件.

$$n\text{ 是整数}\Rightarrow n\text{ 是有理数}.$$

$A\Longleftrightarrow B$——命题 A 与命题 B 等价;或命题 A 蕴涵命题 $B(A\Rightarrow B)$,同时命题 B 也蕴涵命题 $A(B\Rightarrow A)$;或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的充分必要条件.

$$A\subset B\Longleftrightarrow \text{任意 } x\in A,\text{有 } x\in B.$$

2. 量词符号

符号"$\forall$"表示"任意",或"任意一个".

符号"$\exists$"表示"存在某个"或"能找到".

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例

如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leqslant b;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } a \leqslant x;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Longleftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A, \text{有 } |x| \leqslant M.$$

设有命题："集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$"，用符号记为

$$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是："集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$"，用符号记为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题．由此可见，否定一个命题，要将原命题中的"$\forall$"改为"$\exists$"，将"$\exists$"改为"$\forall$"，并将性质 P 否定．例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leqslant b;$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界} \Longleftrightarrow \forall b \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{有 } b < x_0.$$

四、其他符号

符号"max"表示"最大"（它是 maximum（最大）的缩写）．

符号"min"表示"最小"（它是 minimum（最小）的缩写）．

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数．例如：

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大数．

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最小数．

符号$[a]$表示不超过 a 的最大整数．例如：

$[\pi] = [3.1415\cdots] = 3,$

$[-\mathrm{e}] = [-2.718\cdots] = -3,$

$[0] = 0, \quad [5] = 5.$

符号"$n!$"表示"不超过 n 的所有正整数的连乘积"，读作"n 的阶乘"，即

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$

$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$

规定:$0!=1.$

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”读作“n 的双阶乘”,即

$$(2k-1)!!=(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\cdots\cdot5\cdot3\cdot1.$$

$$(2k)!!=(2k)\cdot(2k-2)\cdot\cdots\cdot6\cdot4\cdot2.$$

$9!!=9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1.\quad 12!!=12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2.$

符号“C_n^m”($n,m\in\mathbf{N}_+$,且 $m\leqslant n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”,即

$$C_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式:

$$C_n^m=C_n^{n-m}\quad 与\quad C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.$$

五、几个有用的不等式

不等式1 若 $\forall n\in\mathbf{N}_+$,有不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明 设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,将 A 中每个分数放大,有

$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$
$$=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\frac{1}{2n+1}$$

或

$$A<\frac{1}{A\cdot(2n+1)}.$$

移项开平方得 $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$ □

不等式2(伯努利不等式) 若$\forall x\in\mathbf{R}$,且$x>-1$,$\forall n\in\mathbf{N}_+$,$n>1$,有不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

仅当$x=0$时等号成立.

证明 用数字归纳法.如果$x=0$,$\forall n>1$时等号成立.当$x>-1$与$n>1$时,将有严格不等式$(1+x)^n>1+nx$.

当$n=2$时,有不等式

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x.$$

设$n=k$时不等式成立.往证$n=k+1$时不等式也成立.

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)\\&=1+kx+x+kx^2>1+kx+x\\&=1+(k+1)x.\end{aligned}$$

这就证明了,对一切正整数n,伯努利不等式成立. □

不等式3 若$x_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,且$x_1x_2\cdots x_n=1$,则有不等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

仅当$x_i=1$,$i=1,2,\cdots,n$时等号成立.

证明 用数学归纳法.当$n=2$时,知$x_1x_2=1$,设$x_1>0$,有$x_2=\frac{1}{x_1}$,于是,不等式成立,即

$$x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant 2\quad\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,a>0,b>0\right).$$

假设$n=k$时不等式成立,往证$n=k+1$,不等式也成立.分两种情况证明:

第一种情况,当$x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}=1$时,显然有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=k+1.$$

即等号成立.

第二种情况，因为 $x_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 不能全为 1，所以必有因子小于 1，也必有因子大于 1，不失一般性，令 $x_1<1,x_2>1$，于是有

$$(x_1x_2)x_3\cdots x_{k+1}=1.$$

设 $y=x_1x_2$，则 $yx_3x_4\cdots x_{k+1}=1$. 由归纳假设，有 $y+x_3+x_4+\cdots+x_{k+1}\geqslant k$（$k$ 个数之和），但是

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}\\
&=y+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1+x_2-y\\
&\geqslant k+x_1+x_2-y+1-1\\
&=k+1+x_1+x_2-x_1x_2-1\\
&=k+1+(x_2-1)(1-x_1).
\end{aligned}$$

已知 $x_2-1>0,1-x_1>0$，于是，有不等式

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}\geqslant k+1$$

成立. 仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时等号成立是显然的. □

不等式 4 若 $\forall x_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 设

$$T_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}},\quad（调和平均）$$

$$J_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\quad（几何平均）$$

$$S_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad（算术平均）$$

有不等式

$$T_n\leqslant J_n\leqslant S_n\quad（调和平均\leqslant几何平均\leqslant算术平均），$$

同时有 $T_n=J_n=S_n\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 由不等式 3，当 $\frac{x_1}{J_1}\cdot\frac{x_2}{J_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{J_n}=1$ 时，有

$$\frac{x_1}{J_1}+\frac{x_2}{J_2}+\cdots+\frac{x_n}{J_n}\geqslant n,$$