北大燕园

李永乐·李正元

2009年考研数学⑥

数学历年试题解析

数学三

主编 清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

2009年李永乐·李正元考研数学

数学历年试题解析

【数学三】

主编　北 京 大 学　刘西垣
清 华 大 学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠
编者　（按姓氏笔画）
北 京 大 学　李正元
清 华 大 学　李永乐
北 京 大 学　刘西垣
中国人民大学　严 颖
北 京 大 学　范培华
北京交通大学　赵达夫
中国人民大学　袁荫棠
东北财经大学　龚兆仁

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.3/刘西垣,李永乐,袁荫棠主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-324-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①刘… ②李… ③袁… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004372 号

书　　名　数学历年试题解析[数学三]
作　　者　刘西垣　李永乐　袁荫棠
责任编辑　李锦慧
出版发行　国家行政学院出版社
　　　　　(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话　(010)88517082
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2008 年 2 月北京第 5 版
印　　次　2008 年 2 月北京第 1 次印刷
开　　本　787 毫米 × 1092 毫米　16 开
印　　张　19
字　　数　500 千字
书　　号　ISBN 978-7-80140-324-7/O・31
定　　价　27.00 元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1994 年 ~2008 年历届全国硕士研究生入学统考数学三试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深

度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**范培华**、**李永乐**、**袁荫棠**等主编的**《考研数学复习全书》（经济类）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

（四）

本书由北京大学 **刘西垣**、清华大学 **李永乐**、中国人民大学 **袁荫棠**担任主编。参本书编写的有：清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、中国人民大学 **袁荫棠**、**严颖**、北京交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2008 年 2 月

目　录

第一篇　2008 年考研数学三试题及答案与解析

第二篇　1994 ~ 2007 年考研数学三试题

第三篇　1994 ~ 2007 年考研数学三试题分类解析

第一篇　2008年考研数学三试题及答案与解析

2008年考研数学三试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

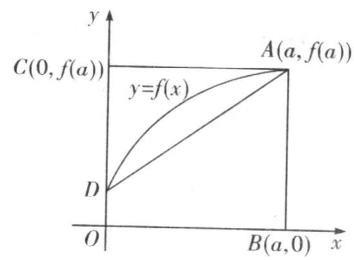
(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的

(A) 跳跃间断点.　　(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

【　　】

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,dx$ 等于



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

【　　】

(3) 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则

(A) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$ 都存在.

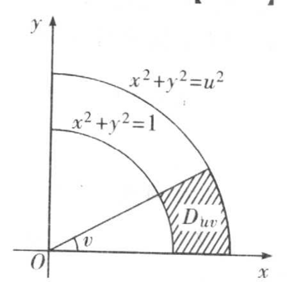
(B) $f'_x(0,0)$ 不存在,$f'_y(0,0)$ 存在.

(C) $f'_x(0,0)$ 存在,$f'_y(0,0)$ 不存在.

(D) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$ 都不存在.

【　　】

(4) 设函数 f 连续,若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$



(A) $vf(u^2)$.　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$.　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

【　　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

【　　】

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

【　】

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

【　】

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ______.

(10) 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=$ ______.

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\displaystyle\iint_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ______.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,2，E 为 3 阶单位矩阵，则 $|4A^{-1}-E|=$ ______.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ______.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 9 分）

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

(16)（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{d}z$；

（Ⅱ）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(17)(本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D \max(xy,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

(18)(本题满分 10 分)

设$f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ)证明对任意的实数 t,有$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r = 0.05$,并依年复利计算.某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元,第二年提取 28 万元,…,第 n 年提取($10 + 9n$) 万元,并能按此规律一直提取下去,问 A 至少应为多少万元?

(20)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(21)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X = i\} = \frac{1}{3}(i = -1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为
$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 记 $Z = X + Y$.

(Ⅰ)求 $P\{Z \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(**本题满分 11 分**)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本．记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

2008 年考研数学三试题答案与解析

一、选择题

(1)【**分析**】 由洛必达法则与变限积分求导法则以及函数 $f(x)$ 的连续性可得

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0).$$

从而若补充定义 $g(0)=f(0)$，则函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故点 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点．应选(B)．

---

(2)【**分析**】 用分部积分法计算题设的定积分，可得

$$\int_0^a xf'(x)\,dx=\int_0^a x\,df(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\,dx=af(a)-\int_0^a f(x)\,dx.$$

注意 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 的面积，$\int_0^a f(x)\,dx$ 是曲边梯形 $ABOD$ 的面积，从而定积分 $\int_0^a xf'(x)\,dx$ 是曲边三角形 ACD 的面积．故应选(C)．

---

(3)【**分析**】 按照定义计算函数 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数．由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\sqrt{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

可见偏导数 $f'_x(0,0)$ 不存在．又因

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{y^4}}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

可见偏导数 $f'_y(0,0)$ 存在，且 $f'_y(0,0)=0$．故应选(B)．

---

(4)【**分析**】 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，在极坐标系 (r,θ) 中积分区域

$$D_{uv}=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant v,1\leqslant r\leqslant u\},$$

从而

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^v d\theta\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}r\,dr=v\int_1^u f(r^2)\,dr,$$

故 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$．应选(A)．

---

(5)【分析】 因为$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$,

$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$,

所以,由定义知$E-A,E+A$均可逆.故选(C).

注:本题用特征值也是简捷的,由$A^3=0\Rightarrow A$的特征值$\lambda=0\Rightarrow E-A$(或$E+A$)的特征值均不为$0\Rightarrow E-A$(或$E+A$)可逆.

---

(6)【分析】 A与B合同$\Leftrightarrow x^{T}Ax$与$x^{T}Bx$有相同的正惯性指数,及相同的负惯性指数.而正(负)惯性指数的问题可由特征值的正(负)来决定.

因为 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0,$$

故$p=1,q=1$.

本题中(D)之矩阵,特征值为

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0,$$

故$p=1,q=1$.

所以选(D).

注:本题的矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$不仅和矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$合同,而且它们也相似,因为它们都和对角矩阵$\begin{bmatrix}3 & \\ & -1\end{bmatrix}$相似.

---

(7)【分析】 设Z的分布函数为$F_Z(x)$,则

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max(X,Y)\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}.$$

由于X与Y独立同分布,于是有

$$F_Z(x)=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F^2(x).$$

应选(A).

---

(8)【分析】 由于X与Y的相关系数$\rho_{XY}=1>0$,因此$P\{Y=aX+b\}=1$,且$a>0$.又因为$Y\sim N(1,4)$,$X\sim N(0,1)$,所以$EX=0$,$EY=1$.而$EY=E(aX+b)=b\Rightarrow b=1$.即应选(D).

二、填空题

(9)【分析】 由题设知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,且$f(x)$分别在三个区间$(-\infty,-c)$,$[-c,c]$,$(c,+\infty)$上连续,从而只要函数$f(x)$还在点$x=c$处右连续就有函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

由于$f(c)=c^2+1$以及$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{2}{|x|}=\dfrac{2}{c}$,可见$f(x)$在点$x=c$处右连续的充分必要条件为

$$c^2+1=\frac{2}{c}\Leftrightarrow c=1.$$

故应填1.

---

(10)【分析】 求解本题的关键是求出函数$f(x)$的表达式,为此令$t=x+\dfrac{1}{x}$,于是

$$f(t)=f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^2(x+\frac{1}{x})}{1+x^4}=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{t}{t^2-2}.$$

故 $$\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(\ln6-\ln2)=\frac{1}{2}\ln3.$$

(11)**【分析】** 因区域 D 关于 x 轴对称,而函数 y 是变量 y 的奇函数,从而

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

引入极坐标 (r,θ) 满足 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则在极坐标系 (r,θ) 中

$$D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1\},$$

故
$$\begin{aligned}\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

评注 利用 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可简化积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的计算,计算如下:

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

(12)**【分析】** 由于 $xy'+y=0\Leftrightarrow(xy)'=0$,从而微分方程 $xy'+y=0$ 的通解为 $xy=C\Leftrightarrow y=\frac{C}{x}$. 利用 $y(1)=1$ 可确定常数 $C=1$.

故所求特解为 $y=\frac{1}{x}$.

(13)**【分析】** 由 $\boldsymbol{A}$ 的特值 $1,2,2\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Rightarrow 4\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $4,2,2\Rightarrow 4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值 $3,1,1\Rightarrow|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=3\cdot1\cdot1=3$.

本题考查相关联矩阵特征值之间的关系及 $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$.

(14)**【分析】** 依题意,$\boldsymbol{E}X=\boldsymbol{D}X=\lambda=1$. 又 $\boldsymbol{E}X^2=\boldsymbol{D}X+(\boldsymbol{E}X)^2=2$,于是有

$$\boldsymbol{P}\{X=\boldsymbol{E}X^2\}=\boldsymbol{P}\{X=2\}=\frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

三、解答题

(15)**【解法一】** 所求极限是"$\frac{0}{0}$"型未定式,用洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\\&=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

【解法二】 利用当 $\square\to 0$ 时的等价无穷小代换 $\ln(\square+1)\sim\square$ 与 $1-\cos\square\sim\frac{\square^2}{2}$,并结合洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

---

(16)【解】 (Ⅰ)将方程两端求全微分,利用一阶全微分形式不变性可得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(x+y+z)\times(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

$$\Leftrightarrow\quad[2x-\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}x+[2y-\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}y=[1+\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}z.$$

由此解出

$$\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\mathrm{d}y.\qquad(*)$$

(Ⅱ)由(*)得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$,从而

$$\begin{aligned}u=u(x,y)&=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{x-y}\left(\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}-\frac{2y-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\right)\\&=\frac{2}{1+\varphi'(x+y+z)}.\end{aligned}$$

故

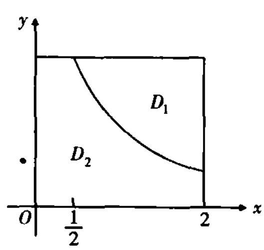
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{2}{[1+\varphi'(x+y+z)]^2}\varphi''(x+y+z)\left[1+\frac{\partial z}{\partial x}\right]\\&=-\frac{2\varphi''(x+y+z)}{[1+\varphi'(x+u+z)]^2}\left[1+\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\right]\\&=-\frac{2(1+2x)\varphi''(x+y+z)}{[1+\varphi'(x+y+z)]^3}.\end{aligned}$$

---

(17)【解】 由于被积函数是 $\max\{xy,1\}$,为了写出它的分段表达式,必须将积分区域 D 分块.如图,设

$$D_1=D\cap\{(x,y)\mid xy\geqslant 1\}=\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\},$$

$$D_2=D\cap\{(x,y)\mid xy\leqslant 1\},$$



则 $$\max\{xy,1\}=\begin{cases}xy, & (x,y)\in D_1,\\ 1, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

从而 $$\iint_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $$\begin{aligned}\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(4-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x\\&=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=4-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}[\ln 2-\ln(\frac{1}{2})]=\frac{15}{4}-\ln 2,\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = D_2 \text{ 的面积 } = D \text{ 的面积 } - D_1 \text{ 的面积 } = 4 - D_1 \text{ 的面积},$$

而
$$D_1 \text{ 的面积} = \iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$
$$= 3 - \ln 2 + \ln(\frac{1}{2}) = 3 - 2\ln 2,$$

故
$$\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15}{4} - \ln 2 + 4 - 3 + 2\ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2 = 4\frac{3}{4} + \ln 2.$$

---

(18)**【证明】** （Ⅰ）利用$f(x)$是周期为2的连续函数知$F(t) = \int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x$在区间$(-\infty,+\infty)$上可导，且$F'(t) = f(t+z) - f(t) \equiv 0$在$(-\infty,+\infty)$上成立．这表明$F(t)$的取值恒等于一个常数，由于$F(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，故对任何实数$t$都有

$$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x = F(t) = F(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）要证明$G(x)$是周期为2的周期函数，就是要证明对任何x都有$G(x+2)-G(x)=0$．利用（Ⅰ）中已经证明的结论即得

$$\begin{aligned}
G(x+2)-G(x) &= \int_0^{x+2}[2f(t) - \int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t - \int_0^{x}[2f(t) - \int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+2}[2f(t) - \int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2}\left[\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2}\left[\int_0^{2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2}f(s)\mathrm{d}s\int_x^{x+2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^{2}f(s)\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^{2}f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^{2}f(s)\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned}$$

评注 也可以用定积分的性质与换元法来证明（Ⅰ），这时不必利用$f(x)$的连续性而只需设函数$f(x)$以2为周期且在任何长度为2的区间$[t,t+2]$上可积．证明过程如下：

利用定积分的性质可得

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_t^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x - \int_t^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

在（*）式右端第一个积分中令$x = u+2$作换元，则$x:2\to t+2 \Leftrightarrow u:0\to t$，且$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$，利用函数$f(x)$的周期性即得

$$\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t f(u+2)\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x.$$

把所得结果代入（*）式知对任意的实数t有

$$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

(19)【解】 设开始时刻为 $t=0$,记 $0.05=r$. 由题设知 A(单位:万元)应满足:

在第 1 年末时存款余额

$$A(1+r)-19>0 \quad \Leftrightarrow \quad A>\frac{19}{1+r},$$

在第 2 年末时存款余额

$$[A(1+r)-19](1+r)-28>0 \quad \Leftrightarrow \quad A>\frac{19}{1+r}+\frac{28}{(1+r)^2},$$

如此继续下去,在第 n 年末时存款余额

$$A(1+r)^n-19(1+r)^{n-1}-28(1+r)^{n-2}-\cdots-(10+9n)>0$$

$$\Leftrightarrow \quad A>\frac{19}{1+r}+\frac{28}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{10+9n}{(1+r)^n}.$$

不难看出,能够使取款一直继续下去的 A 应满足

$$A\geqslant\frac{19}{1+r}+\frac{28}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{10+9n}{(1+r)^n}+\cdots$$

$$\Leftrightarrow \quad A\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10+9n)}{(1+r)^n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}.$$

在已知的幂级数和函数公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}(|x|<1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}(|x|<1)$$

中,令 $x=\dfrac{1}{1+r}$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}=\frac{\frac{1}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{1}{r},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}=\frac{\frac{1}{1+r}}{\left(1-\frac{1}{1+r}\right)^2}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2},$$

故

$$A\geqslant\frac{10}{r}+9\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)=\frac{19}{r}+\frac{9}{r^2}=3980(\text{万元}),$$

即 A 至少应为 3980 万元.

(20)【解】 (Ⅰ)用归纳法.

当 $n=1$ 时,命题正确. 设 $n<k$ 时,命题正确.

当 $n=k$ 时,按第一列展开,记 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 D_n,则有

$$D_k=2a\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a(ka^{k-1})-a^2((k-1)a^{k-2})$$

$= (k+1)a^k$,

所以$|A| = (n+1)a^n$.

(Ⅱ)由克莱姆法则,$|A| \neq 0$方程组有惟一解.故$a \neq 0$时方程组有惟一解.且用克莱姆法则,有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}}{D_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

(Ⅲ)当$a = 0$时,方程组$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$有无穷多解.

其通解为$(0,1,0,\cdots,0)^T + k(1,0,0,\cdots,0)^T$,$k$为任意常数.

注:本题(Ⅰ)关于三对角线行列式的计算通常用递推法.(96年数四考题中出现过)

例如,本题按第1列展开,有

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2},$$

得
$$D_n - aD_{n-1} = aD_{n-r}a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}).$$

从而
$$D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n.$$

那么
$$D_n = aD_{n-1} + a^n = a(aD_{n-2} + a^{n-1}) + a^n = a^2D_{n-1} + a^n = \cdots = a^{n-1}D_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n.$$

---

(21)【证明】 (Ⅰ)由特征值特征向量定义有:$A\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$.

设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, ①

用A乘①得:$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$. ②

① - ②得:$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$. ③

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵$A$不同特征值的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,

所以 $k_1 = 0, k_3 = 0$.

代入①有$k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.因为$\boldsymbol{\alpha}_2$是特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$,故$k_2 = 0$.

从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(Ⅱ)由$A\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$有

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

(22)【解】 (Ⅰ)$P\{Z \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\} = P\{X + Y \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\} = P\{Y \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\}$