

朗道

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ IX

Е. М. ЛИФШИЦ
Л. П. ПИТАЕВСКИЙ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА Часть 2

(ТЕОРИЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ)

理论物理学教程 第九卷

统计物理学 II

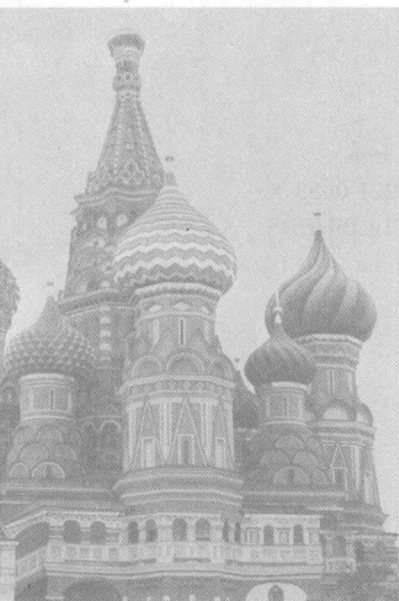
(凝聚态理论) (第四版)

Е. М. 栗弗席兹 Л. П. 皮塔耶夫斯基 著 王锡绂 译



高等教育出版社





ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА том IX

Е. М. ЛИФШИЦ
Л. П. ПИТАЕВСКИЙ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА Часть 2

(ТЕОРИЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ)

理论物理学教程 第九卷

统计物理学 II

(凝聚态理论) (第四版)

Е. М. 栗弗席兹 Л. П. 皮塔耶夫斯基 著 王锡绂 译

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书



高等教育出版社

图字:01-2007-0918号

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10 томах
Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA, ISBN 5-9221-0053-X
The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT PUBLISHERS
RUSSIA for publishing and sales in the People's Republic of China

图书在版编目(CIP)数据

统计物理学Ⅱ(凝聚态理论):第4版/(俄罗斯)栗
弗席兹,(俄罗斯)皮塔耶夫斯基著;王锡绂译.—2
版.北京:高等教育出版社,2008.7

ISBN 978-7-04-024160-0

I. 统… II. ①栗…②皮…③王… III. ①统计物
理学—高等学校—教材②凝聚态—物理学—高等学
校—教材 IV. O414.2 O469

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 050358 号

策划编辑 王超 责任编辑 王超 封面设计 刘晓翔 责任绘图 尹莉
版式设计 史新薇 责任校对 杨凤玲 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京中科印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	1993 年 4 月第 1 版
印 张	23.75		2008 年 7 月第 2 版
字 数	430 000	印 次	2008 年 7 月第 1 次印刷
插 页	1	定 价	54.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24160-00

第二版序言

在为本书准备新版时,非常遗憾的是我的合作者和朋友 E. M. 栗弗席兹已于 1985 年辞世了. 于是,我不得不独自完成此项工作. 虽然,近些年来物质凝聚态理论取得许多重要进展. 我并不认为需要从根本上改写本书. 书中讲到的理论基础及对其阐述,似乎是经住了时间的考验. 另一方面也要做些增补和修改.

增补 § 35* 是讲超流膜的 В. Л. Березинский (1970), J. M. Kosterlitz, D. Thouless (1972) 相变理论的. 此理论为二维系统中的过程建立了现代概念基础. 它极大丰富了我们对于相变本质的认识.

讲述磁性的第七章做了重大修改. 特别是增补 § 74*, 其中用 T. Holstein, H. Primakoff (1940) 方法研究反铁磁性. 此方法对磁性微观理论有重要意义. 因此,书中含此方法显得至关重要.

近年来,物理学领域最重要的成就之一便是发现高温超导体. 然而,实验物理学家和理论物理学家虽然加倍努力,这个有趣现象的本质仍有许多不明之处. 甚至何种相互作用造成向超导态的转变也不清楚. 在这种情况下,对此问题我只好做些简短评论.

Л. П. 皮塔耶夫斯基

2000 年 6 月

第一版序言

简单说来,提供给读者的这本《理论物理学教程》第九卷是讨论物质凝聚态的量子理论的. 本卷开始于对量子液体——玻色液体和费米液体理论的详细叙述. 该理论是Л. Д. 朗道在П. П. 卡皮查的实验发现之后创建起来的,是当今理论物理学的一个独立分支. 这个理论的重要性,与其归因于在液态氦同位素中发生的那些有趣现象,不如说由于量子液体及其谱的概念实质上是宏观物体量子描述的基础.

例如,为了深入理解金属的性质,必须把金属中的电子看作费米液体. 但是电子液体的性质因晶格的存在而复杂化,因而对均匀且各向同性液体这种较简单的情况进行预备性研究,乃是建立理论的必需步骤. 金属的超导性也是一样,如不预先了解较简单的玻色液体超流理论,便难于清楚地把金属的超导性理解为电子液体的超流性.

格林函数方法,是现代统计物理学数学工具不可缺少的部分. 这绝不仅仅由于计算格林函数的图技术所带来的计算上的方便. 问题首先在于,格林函数能直接确定出物体的元激发谱,因此,它是最自然地描述这些激发性质的语言. 所以,对于方法问题,即宏观物体的格林函数理论,本卷相当注意. 虽然,方法的基本思想对所有的系统都一样,但在不同的情况,图技术的具体形式是有区别的. 因此,自然要以各向同性的量子液体为例来发展这些方法,这里,方法的实质以纯正的形式表露出来,没有空间非均匀性和存在几种粒子等等引起的复杂情况.

根据同样的原因,我们用简单的、具有微弱相互作用的、各向同性的费米气体模型,来阐述超导性的宏观理论,而避开由于存在库仑相互作用晶格所引起的复杂情况.

关于本书讲述晶格中的电子和磁性理论的各章节,我们再一次强调,本书是理论物理学教程的一部分,而绝无代替固体理论教程的使命. 按照这个原则,这里只研究最一般性的问题,既不要求具体实验数据的利用,也不涉及没有明确理论基础的计算方法. 我们也提醒一下,有关固体的动理学性质的内容与本卷无

关,该部分拟在本教程的下一卷即最末一卷中研究.

最后,在本书中也叙述了实物介质中的电磁涨落理论和流体动力学涨落理论.前者,原已包含在第八卷中.现在把它移到本卷里,是出于需要运用格林函数,以使整个理论具有简单的和便于应用的形式.此外,将电磁涨落和流体动力学涨落放在同一卷里研究,也显得自然.

Л. Д. 朗道不在本书的实际作者之列.但是,读者容易看出,在本书的正文中多么频繁地遇到他的名字,因为这里所讲述的大部分成果是属于他个人的或同他的学生们合作取得的.同他共事多年,我们有理由相信,我们做到了忠实地反映出他对这些问题的观点——当然,也顾及到从悲惨地中断他的事业那天以来的十五年间所增添的新问题.

我们诚恳地向 А. Ф. 安德列耶夫 (А. Ф. Андреев)、И. Е. 加洛辛斯基 (И. Е. Дзялошинский) 和 И. М. 栗弗席兹 (И. М. Лифшиц) 表示感谢,他们对本书中所研究的问题经常进行讨论.我们也从著名的 А. А. 阿布里科索夫 (А. А. Абрикосов)、Л. П. 戈里科夫 (Л. П. Горьков) 和 И. Е. 加洛辛斯基 (И. Е. Дзялошинский) 的书中得到许多益处,他们的书^①是物理学文献中讲述统计物理学新方法的首批著作之一.最后,我们向 Л. П. 戈里科夫 (Л. П. Горьков) 和 Ю. Л. 克利蒙托维奇 (Ю. Л. Климонтович) 致以谢意,他们阅读了本书的原稿,并提出了许多意见.

Е. М. 栗弗席兹, Л. П. 皮塔耶夫斯基

1977 年 4 月

^① А. А. 阿布里科索夫, Л. П. 戈里科夫, И. Е. 加洛辛斯基. 统计物理学中的量子场论方法. 北京: 科学出版社, 1963. 英译本: A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski. Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics. Prentice-Hall, Englewood cliffs, N. J., 1963.

符 号

矢量的下标,用拉丁字母 $i, k, \dots$ 标记. 自旋的下标,用希腊字母 $\alpha, \beta, \dots$ 标记. 所有两次重复出现的下标,是指求和.

“4 维矢量”(见 46 页的注解),标以大写字母 $X, P, \dots$.

体积元为 dV 或 d^3x .

量值从上或从下趋近于零时的极限,标以 $+0$ 或 -0 .

算符用带尖角 $\wedge$ 的字母标记.

哈密顿量(哈密顿算符)为 $\hat{H}, \hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N}$. 微扰算符是 $\hat{V}$.

薛定谔绘景中的 ψ 算符为 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^+$; 海森伯绘景中的 ψ 算符是 $\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^+$; 松原 (Matsubara) 绘景中的 ψ 算符为 $\hat{\Psi}^M, \hat{\Psi}^{M*}$.

格林函数为 G, D . 温度格林函数为 $\mathcal{G}, \mathcal{D}$.

热力学量的标记同第五卷一样,其中有:温度为 T , 体积是 V , 压强是 P , 化学势为 μ .

磁场强度和磁感强度分别为 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$; 外磁场是 $\mathfrak{H}$.

引用本教程其它各卷的节和公式,以罗马数字按卷别表为: I ——《力学》, 1988; II ——《场论》, 1989; III ——《量子力学》, 1989; IV ——《量子电动力学》, 1989; V ——《统计物理学 I》, 1995; VI ——《流体力学》, 1986; VIII ——《连续介质电动力学》, 1982.

目 录

第一章 正常费米液体	1
§ 1 费米型量子液体的元激发	1
§ 2 准粒子的相互作用	7
§ 3 费米液体的磁化率	11
§ 4 零声	12
§ 5 费米液体中的自旋波	17
§ 6 粒子间有斥力的简并化近理想费米气体	19
第二章 $T=0$ 时费米系统的格林函数	26
§ 7 宏观系统的格林函数	26
§ 8 依格林函数确定能谱	31
§ 9 理想费米气体的格林函数	35
§ 10 费米液体粒子按动量的分布	37
§ 11 由格林函数计算热力学量	38
§ 12 相互作用绘景中的 ψ 算符	39
§ 13 费米系统的图技术	42
§ 14 自能函数	49
§ 15 双粒子格林函数	52
§ 16 顶角函数与准粒子散射幅的关系	56
§ 17 小动量传递时的顶角函数	58
§ 18 顶角函数与准粒子相互作用函数的关系	63
§ 19 格林函数微商恒等式	66
§ 20 边界动量与密度关系的推导	70
§ 21 近理想费米气体格林函数	72
第三章 超流性	78
§ 22 玻色型量子液体中的元激发	78
§ 23 超流性	81

§ 24	液体中的声子	86
§ 25	简并近理想玻色气体	90
§ 26	凝聚体的波函数	94
§ 27	凝聚体密度对温度的依赖关系	97
§ 28	超流密度在 λ 点附近的行为	99
§ 29	量子涡线	101
§ 30	非均匀玻色气体	106
§ 31	玻色液体的格林函数	110
§ 32	玻色液体的图技术	115
§ 33	自能函数	118
§ 34	准粒子的裂变	121
§ 35	能谱在其终点附近的性质	126
§ 35*	二维系统的超流性	130
第四章	有限温度时的格林函数	136
§ 36	有限温度时的格林函数	136
§ 37	温度格林函数	141
§ 38	温度格林函数的图技术	144
第五章	超导性	147
§ 39	超流费米气体 能谱	147
§ 40	超流费米气体 热力学性质	152
§ 41	超流费米气体的格林函数	156
§ 42	超流费米气体的温度格林函数	161
§ 43	金属的超导性	163
§ 44	超导电流	164
§ 45	金兹堡 - 朗道方程	169
§ 46	超导相与正常相边界上的表面张力	175
§ 47	两类超导体	180
§ 48	混合态的结构	183
§ 49	高于相变点的抗磁磁化率	190
§ 50	约瑟夫森效应	193
§ 51	超导体中电流与磁场的关系	196
§ 52	磁场对超导体的穿透深度	203
§ 53	超导合金	204
§ 54	粒子对的轨道角动量不等于零时的库珀效应	207
第六章	晶格中的电子	211

§ 55	周期场中的电子	211
§ 56	外场对晶格中电子运动的影响	219
§ 57	准经典轨道	222
§ 58	准经典能级	226
§ 59	晶格中电子的有效质量张量	229
§ 60	磁场内晶格中电子状态的对称性	233
§ 61	正常金属的电子谱	236
§ 62	金属中电子的格林函数	240
§ 63	迪·哈斯-范·阿耳芬效应	243
§ 64	电子-声子相互作用	249
§ 65	电子-声子相互作用对金属中电子能谱的影响	252
§ 66	固体电介质的电子谱	256
§ 67	半导体中的电子和空穴	258
§ 68	简并点附近的电子谱	260
第七章	磁性	265
§ 69	铁磁体中的磁矩运动方程	265
§ 70	铁磁体中的自旋波量子 能谱	270
§ 71	铁磁体中的自旋波量子 热力学量	274
§ 72	自旋哈密顿量	279
§ 73	自旋波量子的相互作用	284
§ 74	反铁磁体中的自旋波量子	288
§ 74*	自旋哈密顿量的反铁磁态	293
第八章	电磁涨落	297
§ 75	介质中光子的格林函数	297
§ 76	电磁场的涨落	302
§ 77	无限介质中的电磁涨落	303
§ 78	线性电路中的电流涨落	308
§ 79	在介质中光子的温度格林函数	309
§ 80	范德瓦尔斯力的应力张量	313
§ 81	固体间相互作用的分子力·一般公式	319
§ 82	固体间相互作用的分子力·极限情况	323
§ 83	液体中关联函数的渐近行为	327
§ 84	电容率的算符表达式	330
§ 85	简并等离子体	332
第九章	流体动力学涨落	339

§ 86	流体动力学形状因子	339
§ 87	形状因子的求和规则	343
§ 88	流体动力学涨落	348
§ 89	无限介质中的流体动力学涨落	351
§ 90	动理学系数的算符表述	356
§ 91	费米液体的动力学形状因子	357
索引		361

第一章

正常费米液体

§1 费米型量子液体的元激发

当温度低到使液体原子热运动的德布罗意波长达到与原子之间的距离可比拟时,液体的宏观性质就由量子效应决定. 这类量子液体的理论具有重大的原则性意义,虽然自然界中只有两种这样的客体,但它们才真正堪称为液体;这就是在温度约为 $1 \sim 2 \text{ K}$ 时液体氦的两种同位素(^3He 和 ^4He). 一切其它物质,当量子效应在其中成为重要效应之前,就早已凝成固体了. 在这方面我们记得,根据经典力学理论,一切物体在绝对零度时都应当成为固体(见第五卷 § 64);而氦,由于它的原子间相互作用极其微弱,直到量子现象起作用的温度时仍保持为液态,并且在这温度以下也不再凝固.

计算宏观物体的各个热力学量,需要知道物体的能谱. 当然,量子液体是粒子间相互作用很强的一种系统,所指的能级应该相应于整个液体的量子力学定态,而绝非那些单个原子的状态. 在足够低的温度范围内计算配分函数时,只应考虑液体的弱激发能级——离基态不太高的能级.

下述情况,对于全部理论具有原则性的意义. 宏观物体的任一弱激发态,在量子力学中可以看做是单个元激发的集合. 这些元激发的行为,类似于在物体所占体积中运动并具有确定的能量 ε 和动量 p 的一些准粒子. $\varepsilon(p)$ 关系的形式(或所谓元激发的色散律)是物体能谱的重要特征. 我们再一次强调指出,元激发的概念是来自对物体中原子集体运动的量子力学描述方法,而绝不能把准粒子与单个原子或分子等同起来.

量子液体原则上可以具有不同类型的能谱. 根据能谱的不同类型,液体将具有完全不同的宏观性质. 我们首先研究具有称之为费米型能谱的液体. 这种

费米液体的理论是由 Л. Д. 朗道(1956—1958)创建的. 在 § 1—§ 4^① 中叙述的就是他的成果.

费米型量子液体能谱的结构,在某种意义上类似于理想费米气体(由自旋为 $1/2$ 的粒子组成)的能谱. 后者的基态,相当于费米球内的全部状态都被粒子填满,费米球是动量空间中半径为 p_F 的球,而 p_F 与气体密度 N/V (单位体积内的粒子数)的关系由下式决定:

$$\frac{N}{V} = 2 \frac{4\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (1.1)$$

(见 V § 57). 当有粒子从已填满的球内的一些态跃迁到 $p > p_F$ 的某些态时,就出现了气体的激发态.

当然,液体中不存在单个粒子的量子态. 但是,作为费米液体能谱结构的出发点,在于如下的论断:当逐渐“增大”原子间的相互作用,即由气体变成液体时,能级的分类保持不变. 在这种分类中,气体粒子所起的作用转给了各元激发(准粒子),后者的数目等于原子的数目,并遵守费米统计.

还应立即指出,显然只有由自旋为半整数的粒子所组成的液体才可能有这一类型的能谱,而玻色子(自旋为整数的粒子)系统的状态不能用遵从费米统计法的准粒子术语来描述. 同时应当强调,这种类型的能谱不可能成为所有这些液体的普适性质. 能谱的类型也依赖于原子间相互作用的具体性质. 这种情况,用简单的论证即可明了:如果相互作用的结果使原子结合成对,那么在极限的情况下,我们就会得到由自旋为整数的粒子(分子)所组成的分子液体. 对于后者,显然不可能有上面所讨论的能谱.

每一个准粒子都有确定的动量 p (我们还将回来讨论这种说法何以正确的问题). 设 $n(p)$ 是准粒子按动量的分布函数,其归一化条件为

$$\int n d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(这个条件以后还将确切说明). 上面提到的分类原则,在于假设给出这个分布函数便单值地确定了液体的能量,并且基态对应于半径为 p_F 的费米球内所有的态都被占满的分布函数,而半径 p_F 与液体密度的关系与理想气体情况时一样,是同一个公式(1.1).

必须强调,液体的总能量 E 绝不可以归结为准粒子的能量之和. 换句话说, E 是分布函数的泛函,不能归结为积分 $\int n \varepsilon d\tau$ (对于理想气体正是如此,其中准

^① 为了避免误解,我们提前说明所讲的是非超流的(或所谓正常的)费米液体. 液氦同位素 ^3He 就是这样的液体(附加条件,见 210 页的附注).

粒子与真实粒子一样,彼此间没有相互作用)。由于第一位的概念是 E ,因此就出现了在考虑准粒子相互作用时如何确定它们的能量的问题。

为此,我们研究分布函数作无限小改变时 E 的变化。显然,它应当由变分 δn 的线性表达式的积分来决定,即有如下形式:

$$\frac{\delta E}{V} = \int \varepsilon(\mathbf{p}) \delta n d\tau.$$

量 ε 是能量 E 对分布函数 n 的变分微商。它相当于增加一个动量为 $\mathbf{p}$ 的准粒子时系统能量的改变;也正是这个量,起着准粒子在其它粒子的场中哈密顿函数的作用。它同样是分布函数的泛函,就是说函数 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 的形式依赖于液体中全部粒子的分布。

因此我们指出:在所讨论的类型的能谱中,元激发在某种意义上可以看成是在其它原子的自治场中的一个原子。但是,这种自治性不能以通常的量子力学中的意义来理解,在这里它具有更深刻的性质,因为在原子的哈密顿量中,要考虑到周围粒子不仅影响到势能,而且也改变了动能算符与动量算符的关系。

至今,我们撇开了准粒子是否存在自旋的问题。因为自旋是量子力学的量,对它不能作经典性讨论,因此我们应该把分布函数当作是关于自旋的统计矩阵。而元激发的能量 ε ,在一般情况下不仅是动量的函数,而且也是与自旋变量有关的算符,后者可用准粒子自旋算符 $\hat{s}$ 标记。对于均匀并各向同性的液体(不处在磁场中,本身也不是铁磁性的),算符 $\hat{s}$ 只能以标量 $\hat{s}^2$ 或 $(\hat{s} \cdot \mathbf{p})^2$ 的形式含于标量函数 ε 中;但乘积 $\hat{s} \cdot \mathbf{p}$ 的一次幂是不允许的,因为自旋矢量具有轴向性,所以这个乘积是一个赝标量。平方 $\hat{s}^2 = s(s+1)$,对于自旋 $s = \frac{1}{2}$ 的情形,归结为与 $\hat{s}$ 无关的常数,而标量 $(\hat{s} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2/4$ 也是如此。因而,在这种情况下准粒子的能量完全与自旋算符无关,即准粒子的一切能级都是二重简并的。

实质上,说准粒子有自旋,即表明存在这种简并的事实。就此意义可以断言:在这种类型的能谱中,准粒子的自旋恒等于 $1/2$,而与液体中真实粒子的自旋的大小无关。事实上,对于任何不等于 $1/2$ 的自旋 s 来讲,形如 $(\hat{s} \cdot \mathbf{p})^2$ 的项都将使 $(2s+1)$ 重简并的能级分裂成 $(2s+1)/2$ 个二重简并的能级。换句话说,函数 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 将出现 $(2s+1)/2$ 个不同的支,每一支都对应于“自旋为 $1/2$ 的准粒子”。

前已指出,在考虑准粒子的自旋时,分布函数变成一个关于自旋变量的矩阵或算符 $\hat{n}(\mathbf{p})$ 。把这个算符写成显形式,就是厄米统计矩阵 $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$,其中 α, β 为取遍 $\pm 1/2$ 两个值的自旋矩阵的下标。对角矩阵元决定一定自旋态中的准粒子数。因此,准粒子分布函数的归一化条件,现在应写成

$$\text{Tr} \int \hat{n} \cdot d\tau \equiv \int n_{\alpha\alpha} d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.2)$$

(符号 Tr 代表矩阵按自旋的下标取迹)①.

在一般情况下,准粒子的能量 $\hat{\varepsilon}$ 也是算符,即以自旋为变量的矩阵,它的定义应写成

$$\frac{dE}{V} = \text{Tr} \int \hat{\varepsilon} \delta \hat{n} d\tau \equiv \int \varepsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} d\tau. \quad (1.3)$$

如果分布函数和能量与自旋无关时,就是说 $n_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 归结为单位矩阵

$$n_{\alpha\beta} = n \delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.4)$$

那么在(1.2及1.3)式中取迹便简单地归结为乘以因子2:

$$2 \int n d\tau = \frac{N}{V}, \quad \frac{\delta E}{V} = 2 \int \varepsilon \delta n d\tau. \quad (1.5)$$

容易看出:在统计平衡中,准粒子的分布函数具有费米分布的形式,并且根据(1.3)式定义的量 $\hat{\varepsilon}$ 起着能量的作用. 实际上,由于量子液体和理想费米气体的能级分类特性相同,液体的熵 S 与气体的情况一样(见第五卷 § 55),同样定义成如下组合型的表达式:

$$\frac{S}{V} = -\text{Tr} \int \left\{ \hat{n} \ln \hat{n} - (1 - \hat{n}) \ln (1 - \hat{n}) \right\} d\tau, \quad (1.6)$$

在总粒子数和总能量都恒定的附加条件下,

$$\frac{\delta N}{V} = \text{Tr} \int \delta \hat{n} d\tau = 0, \quad \frac{\delta E}{V} = \text{Tr} \int \hat{\varepsilon} \delta \hat{n} d\tau = 0,$$

对(1.6)式取变分,我们得到所求的分布:

$$\hat{n} = [e^{(\hat{\varepsilon} - \mu)/T} + 1]^{-1}, \quad (1.7)$$

式中 μ 为液体的化学势.

当准粒子能量与自旋无关时,(1.7)式表明 n 和 ε 两个量之间有同样关系:

$$n = [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (1.8)$$

当温度 $T=0$ 时,化学势与费米球面的边界能量相等:

$$\mu|_{T=0} = \varepsilon_F \equiv \varepsilon(p_F). \quad (1.9)$$

我们强调指出,虽然(1.8)式与通常的费米分布在形式上相似,但它们并不相同,因为 ε 本身是 n 的泛函,严格说来,(1.8)式是 n 的一个复杂的隐函数定义式.

现在我们回到原先的假设:对每个准粒子都可用确定的动量描述. 这个假设成立的条件要求:动量的不确定度(与准粒子自由程的有限性有关)不仅小于动量本身,同时也小于分布的“弥散区”宽度 Δp ,在这个区域内,分布明显地偏

① 此后,下标重复两次照惯例理解为求和.

离“阶跃函数”^①:

$$\theta(p) \equiv \theta(p) = \begin{cases} 1, & \text{当 } p < p_F; \\ 0, & \text{当 } p > p_F. \end{cases} \quad (1.10)$$

不难看出,如果分布函数 $n(p)$ 只在费米球面附近很小的范围内有别于(1.10)式,这个条件便得到满足.事实上,由于泡利原理,准粒子只在分布函数的“弥散区”内方能相互散射,并且由于散射的结果,它们应跃迁到同一区域的自由态上.所以,碰撞概率正比于该区域宽度的平方.相应地,准粒子能量以及动量的不确定度都正比于 $(\Delta p)^2$. 因此,当 Δp 足够小时,动量的不确定度不仅小于 p_F ,也小于 Δp .

可见,这里叙述的方法只适用于准粒子分布函数所描述的液体激发态,这个分布函数仅在临近费米面的窄域内才区别于“阶跃”函数.特别是,对于热力学平衡分布,只在足够低的温度时才能适用.平衡分布的弥散区(能量)宽度与 T 是同一数量级.而与碰撞有关的准粒子能量的量子不确定度与数值 $\hbar/\tau$ 是同一数量级,其中 τ 为准粒子的自由飞行时间.因此,理论适用的条件为

$$\hbar/\tau \ll T. \quad (1.11)$$

同时,如前所述,时间 τ 与弥散区宽度的平方成反比,即

$$\tau \propto T^{-2}.$$

所以,当 $T \rightarrow 0$ 时显然(1.11)式是满足的.对于粒子间相互作用并不微弱的液体,所有的能量参数与边界能量 ε_F 同一数量级;在此意义上说,条件(1.11)与条件 $T \ll |\varepsilon_F|$ ^②是等价的.

对于接近在 $T=0$ 时“阶跃”函数的分布,在一级近似下,泛函 ε 可用其在 $n(p) = \theta(p)$ 时的计算值去代替.于是 ε 成为动量的确定函数,而公式(1.7)便成为通常的费米分布.

此时,在费米球面附近[函数 $\varepsilon(p)$ 在此处才有直接的物理意义],可将 $\varepsilon(p)$ 按差 $p - p_F$ 的幂展开.我们有

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F), \quad (1.12)$$

其中

$$v_F = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right|_{p=p_F} \quad (1.13)$$

是费米面上准粒子的“速度”.在理想费米气体中,准粒子同真实粒子一样,有

① 为了后文需要指出,微商

$$\theta'(p) = -\delta(p - p_F),$$

事实上,当对包含 $p = p_F$ 的 p 的任意区间进行积分时,这个等式的两边给出相同的结果(等于1).

② 但是,对于液态³He,实验指出理论的定量适用范围实际上被限制在温度 $T \leq 0.1$ K 的范围(此时 $|\varepsilon_F| \approx 2.5$ K).

$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, 因此 $v_F = \frac{p_F}{m}$. 与此类似, 对费米液体可引入一个量

$$m^* = p_F / v_F, \quad (1.14)$$

称它为准粒子的有效质量; 并且这个量是正的(见 § 2 末).

用这样引入的物理量的术语, 可以将理论的适用条件写成 $T \ll v_F p_F$, 并且只有动量为 p 且 $|p - p_F| \ll p_F$ 的准粒子才有实际意义. 我们再一次强调上述情况, 并应指出, 这种情况特别赋予 p_F 和液体密度之间的关系式(1.1)以不平凡的特性, 因为它(对于费米气体)的明显结论是基于这样的概念: 粒子占满整个费米球的各态, 而不仅占满它表面的邻近区域①.

特别是, 有效质量可以用来确定低温下液体的熵 S 和热容量 C . 对这两个物理量可给出与理想气体公式相同的形式(第五卷 § 58), 在这里只需以有效质量 m^* 代替粒子质量 m :

$$S = C = V\nu T, \quad \nu = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (1.15)$$

(S 和 C 两个量, 由于与 T 成线性关系而相等). 事实上, 用分布函数表述的熵表达式(1.6)对于液体和气体都是一样的, 而在计算这个积分时, 仅仅 p_F 附近的动量区域起主要作用, 在这个区域内液体中准粒子的分布函数和气体中粒子的分布函数由同一个(1.8)式给出②.

在将理论展开之前, 我们先作如下的说明. 在费米液体中引进与气体粒子完全类似的准粒子概念, 虽然这种表述方法对于建立系统的理论最为方便, 但与此相连的物理图像却有缺陷, 即在这个图像中出现了个观察不到的被准粒子占满的费米球. 如果用只在 $T \neq 0$ 时才出现元激发来表述, 便可能消除这个缺陷. 在这种图像中, 费米球外的准粒子和球内的“空穴”都起着元激发的作用, 对于前者[与公式(1.12)的近似相对应]应将能量写成 $\varepsilon = v_F(p - p_F)$, 而对于后者能量应写成 $\varepsilon = v_F(p_F - p)$. 其中任何一种情况的统计分布, 都由化学势等于零的费米分布公式给出(此时元激发的数目不是常数, 而是决定于温度的量③):

$$n = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1}. \quad (1.16)$$

在这种图像中, 元激发只能成对地出现或消失, 因此动量为 $p > p_F$ 和 $p < p_F$ 的元激发的总数恒相等.

① (1.1)式的证明需要运用较复杂的数学方法, 以后将在 § 20 中给出.

② 对于液态 ^3He (在零压时): $p_F/\hbar = 0.8 \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$; $m^* = 3.1 m(^3\text{He})$; p_F 根据液体密度决定; m^* 根据热容量决定.

③ 我们记得(参看第五卷 § 63), 在这种条件下, 准粒子数 $N_{\text{准}}$ 决定于热力学平衡条件——在给定温度和体积下, 作为 $N_{\text{准}}$ 的函数的自由能 F 取最小值: $(\partial F / \partial N_{\text{准}})_{T,V} = 0$; 但这个微商是“准粒子的化学势”(不要把它同液体的化学势 μ 相混淆, μ 定义为 F 对真实粒子数 N 的微商).