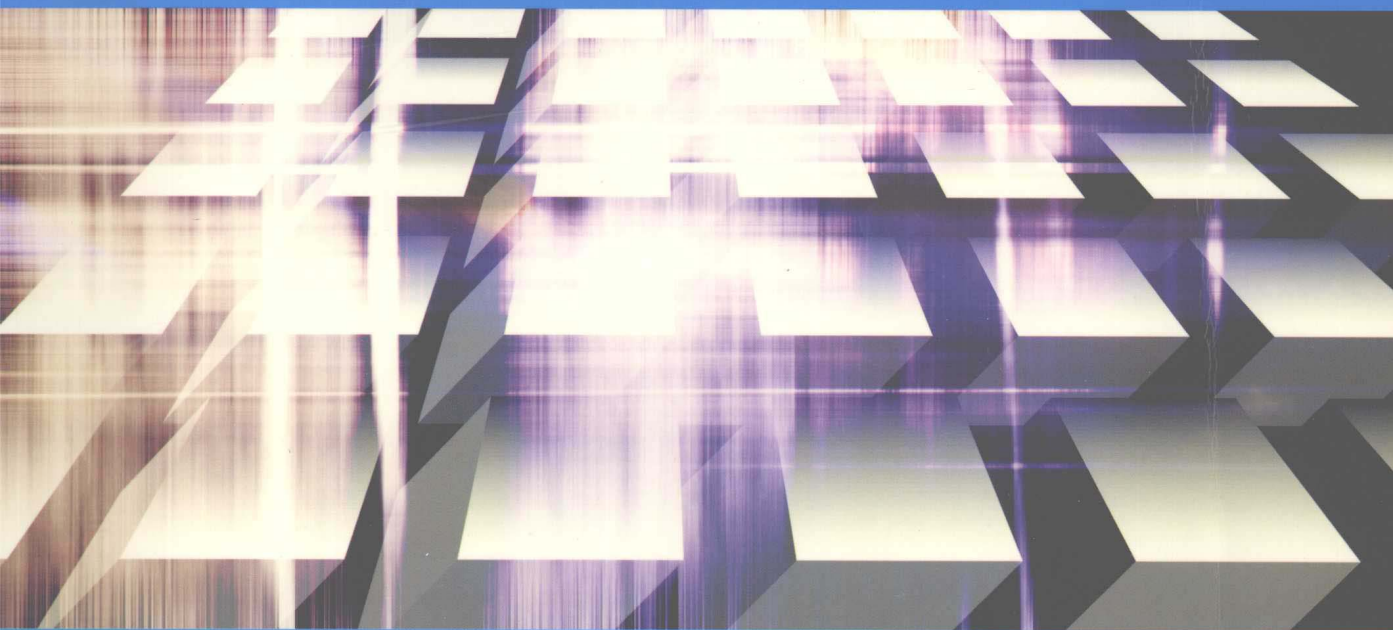


Nonlinear 夹层板壳 Theory and 非线性理论分析 Analysis Of Sandwich Plates and Shells

刘人怀 著

Nonlinear
Theory and Analysis of
Sandwich Plates and Shells



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

Nonlinear 夹层板壳 Theory and Analysis 非线性理论分析 Of Sandwich Plates and Shells

刘人怀 著

Nonlinear
Theory and Analysis of
Sandwich Plates and Shells



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目 (CIP) 数据

夹层板壳非线性理论分析/刘人怀著. —广州:
暨南大学出版社, 2007. 11
ISBN 978 - 7 - 81079 - 876 - 1

I. 夹… II. 刘… III. 夹层板—壳—非线性理论—研究
IV. O31 TS653. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 087018 号

出版发行: 暨南大学出版社

地 址: 中国广州暨南大学

电 话: 总编室 (8620) 85221601

营销部 (8620) 85225284 85228291 85220693 (邮购)

传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)

邮 编: 510630

网 址: <http://www.jnupress.com> <http://press.jnu.edu.cn>

排 版: 广州市星辰文化发展部

印 刷: 佛山市浩文彩色印刷有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 25.75

字 数: 469 千

版 次: 2007 年 11 月第 1 版

印 次: 2007 年 11 月第 1 次

定 价: 56.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社总编室联系调换)

内 容 简 介

著者将廿余年来在国内外学术期刊上所发表的 31 篇关于夹层板壳非线性理论的学术论文汇编成本书，以促进这一领域研究的发展。本书涉及了夹层圆形板、夹层环形板、夹层椭圆板、夹层矩形板、复合材料面层夹层板、夹层扁球壳、夹层扁锥壳、复合材料面层夹层壳和等效夹层壳的非线性弯曲、稳定和振动问题，其中绝大多数工作属国际上首次研究。本书既建立了理论，又给出了解析解，便于阅读和应用。

本书既可作为高校力学专业和相关专业老师和研究生的参考书，又可作为航天、航空、航海、建筑和包装等工程设计师与工程师的设计制造指导书。

作者简介

刘人怀, 1940年生, 四川成都人。1963年毕业于兰州大学并留校任教。1978年调入中国科技大学, 1985年升任教授。1981年成为西德洪堡研究会员, 赴鲁尔大学进行科研。1986年任上海工业大学副校长。1991年调入暨南大学任副校长, 1995年12月至2006年1月任校长, 现任暨南大学应用力学研究所所长。1999年11月遴选为中国工程院机械与运载工程学部院士, 2000年9月又遴选为中国工程院工程管理学部首批院士。

在板壳力学理论与应用, 特别是板壳非线性力学方面, 进行了系统性研究。著作6本, 论文150余篇。先后获中国科学院、国家教育委员会、国务院侨务办公室和广东省人民政府自然科学奖、科学技术进步奖一等奖4项、二等奖2项, 以及国家级教学成果奖二等奖1项, 省级教学成果奖一等奖3项。同时还获全国优秀归侨、侨眷知识分子, 国家有突出贡献的中年专家, 国务院政府特殊津贴, 国务院侨办优秀教师, 广东省南粤教书育人优秀教师, 广东省劳动模范, 香港理工大学杰出中国学人等荣誉称号, 以及日本创价大学最高荣誉奖。

现兼任教育部高校力学教学指导委员会主任、教育部科技委员会管理科学部主任、中国工程院工程管理学部副主任、中国振动工程学会理事长、中国力学学会副理事长, 中国复合材料学会副理事长, 中国仪器仪表学会常务理事兼仪表元件学会理事长、《振动工程学报》主编、《复合材料学报》副主编、《应用数学与力学》常务编委等职。

序 言

夹层板壳是一种新型构件，由一块厚夹心和两块薄表层所构成。由于这种构件具有高刚度和轻重量的优良特性，故在航天、航空、造船、建筑和包装等工程中得到了广泛的应用。

近 60 年来，在国际上，已有众多学者对其展开了理论研究。但是，由于夹层结构的复杂和非线性数学的困难，极大多数研究均限于线性理论分析，关于非线性分析的论文如凤毛麟角。显然，这种研究状况无法满足近年来科学技术突飞猛进的需求。于是，著者从上世纪七十年代末开始，对夹层板壳进行了非线性理论研究。迄今，已在国内外学术期刊上发表了 31 篇学术论文，其中一些工作是与助手和学生合作完成的。为了促进夹层板壳非线性分析的进一步研究，现将这些论文进行整理，汇编成书出版。为了便于大家使用，已将用英文写作的论文译成中文。同时，有个别地方还订正了过去印刷等方面出现的错误和疏忽。书中难免会有一些谬误，望读者不吝赐教。



2006 年 3 月 3 日于暨南大学明湖苑

目 录

第一章 夹层圆形板	(1)
1.1 夹层圆板的非线性弯曲	(3)
1.2 夹层圆板大挠度问题的精确解	(25)
1.3 在边缘力矩作用下夹层圆板的非线性轴对称弯曲问题	(44)
1.4 对称线布载荷作用下夹层圆板的非线性弯曲	(58)
1.5 夹层圆板大挠度问题的进一步研究	(87)
第二章 夹层环形板	(97)
2.1 夹层环形板的非线性弯曲	(99)
2.2 变厚度夹层环形板的非线性弯曲	(112)
第三章 夹层椭圆形板	(125)
3.1 夹层椭圆形板的非线性振动	(127)
第四章 夹层矩形板	(135)
4.1 简支夹层矩形板的非线性弯曲	(137)
4.2 考虑横向剪应力在层间连续的夹层板非线性分析	(156)
4.3 夹层矩形板的非线性振动	(161)
第五章 复合材料面层夹层板	(179)
5.1 复合材料面层夹层板中转动一致有效理论	(181)
5.2 正交复合材料面层夹层板非线性理论及应用	(189)
第六章 夹层壳	(201)
6.1 夹层壳的非线性理论: (1) 中厚度壳的精确运动学	(203)
6.2 夹层壳的非线性理论: (2) 近似理论	(223)
6.3 一般夹层旋转壳在轴对称变形下的大挠度方程	(242)

第七章 夹层扁球壳	(253)
7.1 边缘均布力矩作用下圆底夹层扁球壳的非线性屈曲	(255)
7.2 夹层扁球壳的非线性稳定性	(268)
第八章 夹层扁锥壳	(275)
8.1 夹层扁锥壳的非线性稳定性	(277)
8.2 变厚度夹层截顶扁锥壳的非线性稳定性分析	(293)
8.3 夹层扁锥壳的非线性振动	(305)
第九章 复合材料面层夹层壳	(321)
9.1 考虑横向剪应力连续的复合材料面层夹层壳非线性 一致有效理论	(323)
9.2 考虑层间应力连续条件的夹层扁壳的非线性屈曲	(334)
9.3 复合材料面层夹层扁壳非线性精化理论及应用	(341)
第十章 等效夹层壳	(351)
10.1 双层正交正放网格扁壳结构的非线性弯曲理论	(353)
10.2 斜放四角锥扁网壳的非线性弯曲理论	(360)
10.3 矩形底双层网格扁壳的非线性弯曲	(370)
10.4 矩形底双层网格扁壳的非线性屈曲	(376)
10.5 双层柱面网格扁壳的非线性稳定性分析	(384)
10.6 双层球面网格扁壳的非线性稳定性分析	(391)
10.7 大跨度双层网壳的非线性动态响应	(397)

第一章 夹层圆形板

1.1

夹层圆板的非线性弯曲

符 号

r, θ, z	圆柱坐标系
a	夹层圆板的半径
t, h	表板和夹心厚度
h_0	上、下表板中面间的距离
E, ν	表板材料的弹性模量和泊松比
G_2	夹心剪切模量
D_f	表板的抗弯刚度
D, C	夹层圆板的抗弯和抗剪刚度
q	均布横向载荷
$u_i, v_i, w_i (i=1, 2, 3)$	上表板、夹心和下表板的径向、环向和法向位移
u, w	夹层圆板中面上点的径向位移和挠度
ψ	上、下表板中面上任意点在变形后的连线与夹层圆板变形前法线的夹角
$\varepsilon_{ri}, \varepsilon_{\theta i}, \varepsilon_{zi}, \gamma_{r\theta i},$ $\gamma_{\theta z i}, \gamma_{rz i} (i=1, 2, 3)$	上表板、夹心和下表板点的伸长和剪切应变分量

* 应用数学和力学, 2(2), 173 ~ 190 (1981)

$$\sigma_{ri}, \sigma_{\theta i}, \sigma_{zi}, \tau_{r\theta i},$$

$$\tau_{\theta zi}, \tau_{rzi} (i=1,2,3) \quad \text{上表板、夹心和下表板点的正应力和剪应力分量}$$

$$\sigma_{ro}, \sigma_{\theta o} \quad \text{夹层圆板中面内的径向和环向应力}$$

$$U_{i(i=1,2,3)} \quad \text{上表板、夹心和下表板的应变能}$$

$$V \quad \text{外力功}$$

$$U \quad \text{夹层圆板的总势能}$$

$$M_r, Q_r \quad \text{夹层圆板的径向弯矩和横向力}$$

$$m_r \quad \text{表板的径向弯矩}$$

$$\varphi \quad \text{应力函数}$$

$$\rho \quad \text{无量纲径向坐标}$$

$$k \quad \text{夹层圆板的无量纲特征参数}$$

$$W, W_0 \quad \text{夹层圆板中面上点的无量纲挠度及其中心值}$$

$$S_r, S_r(0) \quad \text{夹层圆板中面内的无量纲径向应力及其中心值}$$

$$S_\theta, S_\theta(0), S_\theta(1) \quad \text{夹层圆板中面内的无量纲环向应力及其中心和边缘值}$$

$$P \quad \text{无量纲横向载荷}$$

$$A_2, A_3, B_2, B_3, \alpha_1, \dots,$$

$$\alpha_9, \lambda_1, \lambda_2, l_{1,1}, \dots, l_{11,3},$$

$$m_1, \dots, m_{33}, n_{0,2}, \dots,$$

$$n_{22,6}, R_1, \dots, E_{33} \quad \text{辅助量}$$

$$L \quad \text{微分算子}$$

一、前言

夹层板是航空、宇航和船舶制造等工业部门中的重要结构元件，它由三层，即一块厚夹心和两块薄板所构成，因为这种板具有高的刚度和轻的重的特性，所以在工业中应用十分广泛。因此，夹层圆板已经成为一些研究者的对象^[1-4]。但是对于其非线性弯曲方面的问题，则由于非线性数学的困难而仅有少数人探讨过，作者^[5]使用修正迭代法^[6-11]曾对边缘力矩作用下的夹层圆板的非线性弯曲进行过研究，获得了相当精确的三次近似解析解。中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组^[12]使用摄动法

对均布横向载荷作用下的夹层圆板的非线性弯曲求解, 得到了简支和固定边界条件下的二次近似解。

本文所研究的夹层板, 是上、下表板厚度相等、材料各向同性, 夹心材料横观各向同性的薄圆板。我们使用变分法导出了这种夹层圆板的非线性轴对称弯曲理论的平衡方程和边界条件。当表板很薄时, 还导出了简化方程。最后, 使用修正迭代法对承受均布横向载荷作用的具有滑动固定边界条件的夹层圆板进行了研究, 获得了相当精确的三次近似解析解。所得结果可供工程设计时参考应用。

二、基本方程

在推导基本方程和边界条件时, 引进下列假设:

- ①材料服从于虎克定律。②夹心横向不可压缩。③夹心沿板面方向不能承受载荷。④表板为直法线假设, 夹心中面法线在变形后保持直线。

现在, 考虑在均布横向载荷作用下半径为 a 的夹层圆板, 其坐标、尺寸如图 1 所示。在轴对称和上述假设下, 夹层圆板中任意一点的位移为:

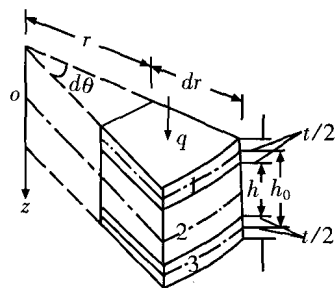


图 1 夹层圆板的坐标和尺寸

$$\text{上表板} \left[\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + t \right]$$

$$u_1 = u + \frac{h_0}{2}\psi - \left(z - \frac{h_0}{2} \right) \frac{dw_1}{dr}, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = w \quad (2.1)$$

$$\text{下表板} \left[-\left(\frac{h}{2} + t \right) \leq z \leq -\frac{h}{2} \right]$$

$$u_3 = u - \frac{h_0}{2}\psi - \left(z + \frac{h_0}{2} \right) \frac{dw_3}{dr}, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = w \quad (2.2)$$

$$\text{夹心} \left[-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right]$$

$$u_2 = u + \frac{z}{h} \left(h_0\psi + t \frac{dw_2}{dr} \right), \quad v_2 = 0, \quad w_2 = w \quad (2.3)$$

将式(2.1)、(2.2)和(2.3)分别代入下述夹层圆板的几何方程:

$$\varepsilon_{r1} = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_{\theta i} = \frac{u_i}{r}, \quad \varepsilon_{zi} = \gamma_{r\theta i} = \gamma_{\theta z i} = \gamma_{rz i} = 0 \quad (2.4)$$

$i = 1, 3$

$$\gamma_{rz2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{dw_2}{dr}, \quad \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{z2} = \gamma_{r\theta2} = \gamma_{\theta z2} = 0 \quad (2.5)$$

便得:

上表板

$$\varepsilon_{r1} = \frac{du}{dr} + \frac{h_0}{2} \frac{d\psi}{dr} - \left(z - \frac{h_0}{2}\right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{\theta1} = \frac{u}{r} + \frac{h_0}{2r} \psi - \left(z - \frac{h_0}{2}\right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

下表板

$$\varepsilon_{r3} = \frac{du}{dr} - \frac{h_0}{2} \frac{d\psi}{dr} - \left(z + \frac{h_0}{2}\right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \frac{u}{r} - \frac{h_0}{2r} \psi - \left(z + \frac{h_0}{2}\right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

夹心

$$\gamma_{rz2} = \frac{h_0}{h} \left(\psi + \frac{dw}{dr}\right) \quad (2.8)$$

将式(2.6)、(2.7)和(2.8)分别代入下述虎克定律:

$$\sigma_{ri} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ri} + \nu \varepsilon_{\theta i}), \quad \sigma_{\theta i} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta i} + \nu \varepsilon_{ri}),$$

$$\sigma_{zi} = \tau_{r\theta i} = \tau_{\theta z i} = \tau_{rz i} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (2.9)$$

$$\tau_{rz2} = G_2 \gamma_{rz2}, \quad \sigma_{r2} = \sigma_{\theta2} = \sigma_{z2} = \tau_{r\theta2} = \tau_{\theta z2} = 0 \quad (2.10)$$

便得:

上表板

$$\sigma_{r1} = \sigma_{r0} + \frac{Eh_0}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\nu}{r} \psi\right) - \frac{E}{1-\nu^2} \left(z - \frac{h_0}{2}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr}\right),$$

$$\sigma_{\theta1} = \sigma_{\theta0} + \frac{Eh_0}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\psi}{r} + \nu \frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{E}{1-\nu^2} \left(z - \frac{h_0}{2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2}\right) \quad (2.11)$$

下表板

$$\sigma_{r3} = \sigma_{r0} - \frac{Eh_0}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\nu}{r} \psi\right) - \frac{E}{1-\nu^2} \left(z + \frac{h_0}{2}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr}\right),$$

$$\sigma_{\theta3} = \sigma_{\theta0} - \frac{Eh_0}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\psi}{r} + \nu \frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{E}{1-\nu^2} \left(z + \frac{h_0}{2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2}\right) \quad (2.12)$$

夹心

$$\tau_{rz2} = \frac{G_2 h_0}{h} \left(\psi + \frac{dw}{dr}\right) \quad (2.13)$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_{ro} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{r}u + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right], \\ \sigma_{\theta o} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.14)$$

由弹性体应变能的公式:

$$U_i = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{rz} \gamma_{rz}) r dr d\theta dz \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

得到表板和夹心的应变能公式

$$\begin{aligned}U_i &= \frac{1}{2E} \iiint_{V_i} [(\sigma_{ri} + \sigma_{\theta i})^2 - (1-\nu)\sigma_{ri}\sigma_{\theta i}] r dr d\theta dz, \quad i = 1, 3 \\ U_2 &= \frac{1}{2G_2} \iiint_{V_2} \tau_{r2}^2 r dr d\theta dz\end{aligned}\quad (2.16)$$

将式(2.11)、(2.12)和(2.13)代入式(2.16), 并对 z 进行积分, 使得

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{t}{2E} \iint_{s_1} [(\sigma_{ro} + \sigma_{\theta o})^2 - 2(1+\nu)\sigma_{ro}\sigma_{\theta o}] r dr d\theta + \frac{th_0}{2} \iint_{s_1} \left(\sigma_{ro} \frac{d\psi}{dr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sigma_{\theta o} \psi \right) r dr d\theta + \frac{D_f}{2} \iint_{s_1} \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr d\theta + \frac{D}{4} \iint_{s_1} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \frac{\psi}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] r dr d\theta, \\ U_3 &= \frac{t}{2E} \iint_{s_3} [(\sigma_{ro} + \sigma_{\theta o})^2 - 2(1+\nu)\sigma_{ro}\sigma_{\theta o}] r dr d\theta + \frac{th_0}{2} \iint_{s_3} \left(\sigma_{ro} \frac{d\psi}{dr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sigma_{\theta o} \psi \right) r dr d\theta + \frac{D_f}{2} \iint_{s_3} \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr d\theta + \frac{D}{4} \iint_{s_3} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \frac{\psi}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] r dr d\theta, \\ U_2 &= \frac{C}{2} \iint_{s_2} \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr d\theta\end{aligned}\quad (2.17)$$

其中

$$D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eth_0^2}{2(1-\nu^2)}, \quad C = \frac{G_2 h_0^2}{h} \quad (2.18)$$

均布横向载荷 q 的外力功为

$$V = \iint_s q \omega r dr d\theta \quad (2.19)$$

这样, 夹层圆板的总势能为

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 - V \\ &= \frac{t}{E} \iint_s [(\sigma_{r_0} + \sigma_{\theta_0})^2 - 2(1 + \nu) \sigma_{r_0} \sigma_{\theta_0}] r dr d\theta + D_f \iint_s \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr d\theta + \frac{D}{2} \iint_s \left[\left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1 - \nu) \frac{\psi}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] r dr d\theta + \frac{C}{2} \iint_s \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr d\theta \\ &\quad - \iint_s q \omega r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

根据势能原理, 以 u 、 w 、 ψ 作自变量, 对总势能变分为零, 有

$$\delta U = 0 \quad (2.21)$$

将式(2.20)代入, 经部分积分后, 可得夹层圆板在均布横向载荷 q 作用下的大挠度理论的平衡方程和边界条件:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_0} - \frac{d}{dr}(r\sigma_{r_0}) &= 0, \\ 2D_f \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - 2t \frac{d}{dr} \left(r\sigma_{r_0} \frac{dw}{dr} \right) \\ &- C \frac{d}{dr} \left[r \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right) \right] - qr = 0, \\ D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) - C \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22a-c)$$

当 $r = 0$ 时或当 $r = a$ 时,

$$\begin{aligned} r\sigma_{r_0} &= 0, \text{ 或 } \delta u = 0, \\ 2rD_f \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - 2rt\sigma_{r_0} \frac{dw}{dr} - rC \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right) &= 0, \text{ 或 } \delta w = 0, \\ rM_r = Dr \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right) &= 0, \text{ 或 } \delta \psi = 0, \\ rm_r = -D_f r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\psi}{r} \frac{dw}{dr} \right) &= 0, \text{ 或 } \frac{d}{dr}(\delta w) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

关于应变协调方程, 可由方程(2.14)消去位移 u 求得

$$\sigma_{r_0} - \frac{d}{dr}(r\sigma_{\theta_0}) - \frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \quad (2.24)$$

方程(2.22)和(2.24)就是夹层圆板大挠度理论的基本方程, 而边界条件(如简支、夹紧固定、滑动固定和悬空等)由式(2.23)决定。

引入应力函数 φ :

$$\sigma_{r0} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \sigma_{\theta 0} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} \quad (2.25)$$

则方程(2.22a)自动满足, 而方程(2.22b、c)和(2.24)成为

$$\begin{aligned} & 2D_f \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - 2t \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) \\ & - C \frac{d}{dr} \left[r \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right) \right] - qr = 0, \\ & D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) - C \left(\psi + \frac{dw}{dr} \right) = 0, \\ & \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi}{dr} + \frac{E}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.26a-c)$$

将方程(2.26a)乘以 dr , 积分一次, 可解得

$$\psi = \frac{2D_f}{C} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \left(\frac{2t}{Cr} \frac{d\varphi}{dr} + 1 \right) \frac{dw}{dr} - \frac{1}{2C} qr \quad (2.27)$$

将此式代入方程(2.26b), 得

$$\begin{aligned} & \frac{2DD_f}{C} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - (D + 2D_f) \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} \\ & - \frac{2tD}{C} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{2t}{r} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} qr = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

于是, 基本方程组(2.22)和(2.24)被简化为(2.28)和(2.26c)两个方程。

由方程(2.28)、(2.26c)和边界条件(2.23)不难看出, 当夹心剪切模量 G_2 无限增强(即 $C \rightarrow \infty$)时, 它们将转化为单层圆板(厚度为 $h + 2t$)的基本方程和边界条件。

三、方程的简化

若表板很薄, 即 $t \ll h$, 那么上述方程可被简化。此时式(2.1)~(2.3)成为:

上表板

$$u_1 = u + \frac{1}{2} h_0 \psi, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = w \quad (3.1)$$

下表板

$$u_3 = u - \frac{1}{2} h_0 \psi, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = w \quad (3.2)$$

夹心