21世纪保险学精算学系列教材

精算数学与实务

寿险精算部分

肖芸茹 · 主编

南開大學出版社

21 世纪保险学精算学系列教材

精算数学与实务

（寿险精算部分）

肖芸茹　主　编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

精算数学与实务. 寿险精算部分 / 肖芸茹主编. —天津:南开大学出版社,2007.11

(21世纪保险学精算学系列教材)

ISBN 978-7-310-02793-4

Ⅰ.精… Ⅱ.肖… Ⅲ.人寿保险—精算学—高等学校—教材 Ⅳ.F840.4 F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 163280 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2007 年 11 月第 1 版 2007 年 11 月第 1 次印刷

787×960 毫米 16 开本 15.75 印张 2 插页 296 千字

定价:24.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

总 序

南开大学是 1979 年国内保险业务恢复以后，在全国最早建立保险专业的高校。1984 年开始招收保险专业研究生，1985 年招收保险专业本科生；1988 年在国内率先招收精算研究生，培养了国内第一批精算研究生，在国内外产生了重要影响。1991 年南开大学建立了国际保险研究所，它是我国综合性大学中最早设立的保险研究机构。南开大学于 1994 年在国内高校中率先建立风险管理专业方向。1997 年招收保险方向博士生。南开大学于 2004 年增设保险专业研究生的社会保障方向，目前，南开大学正与国际上的保险组织和院校积极合作培养保险专业的本科生和研究生。与此同时，在保持保险精算教育特色的基础上，南开大学积极与国际保险组织合作，引进财产保险教育体系。应当说，二十多年来南开大学保险学科的发展已取得了较大的成就，并已得到社会的认可。

多年来，南开大学风险管理与保险学系教师在致力于保险人才培养的同时，一直注重保险教材建设，并编写了一批在国内有影响的保险专业教材，如刘茂山教授编写的《保险经济学》，王海柱教授主编的《保险管理学》，刘茂山教授主编的《保险学原理》，江生忠教授主编的《保险会计学》，李秀芳教授主编的《保险精算》，赵春梅副教授、陈丽霞副教授、江生忠教授编写的《保险学原理》，以及我系教师参编的、由原中国人民保险公司组织编写的教材《社会主义保险学》；国家人事部考试中心及中国保监会组织编写的《保险理论与实务》，原国家教委组织编写的统编教材《保险学》，中国人民银行组织编写的《海上保险》，中国精算师资格考试用书《利息理论》等。近年来，南开大学保险学系教师又出版了多本教材，如李秀芳教授编写的《寿险精算实务》、《中国寿险业资产负债管理研究》，张连增副教授编写的《风险论》，刘茂山教授主编的《国际保险学》，江生忠教授主编的《人身保险市场与营销》、《保险中介教程》、《保险经营管理学》等。此外，南开大学保险学系教师还编写了多本属于保险理论前沿问题的保险专著，同样在国内保险业界产生了重要影响。应当说，多年来南开大学风险管理与保险学系保险教材及专著的建设对于提高师资水平和教学质量，推动南开大学保险学科的发展发挥了重要的作用。

目前，我们之所以再编写一套“21 世纪保险学精算学系列教材”，其主要原因或考虑是：

一是保险学科属于应用型学科，所以及时更新教材是必要的。目前我国保险专业教材建设虽然在数量上已增加不少，但有些教材的内容与保险业的快速发展相比还是略显陈旧，个别教材的内容还不能反映世界或国内保险业快速发展的现状，呈现理论与实践相脱节的现象。这不仅引起了保险业界的不满，而且保险专业的教师和学生也有同样的感觉。因此，尽管在保险学教材种类已有不少的情况下写教材、出丛书可能会有微词，但我们认为还是有必要的。

二是通过丛书系统地体现南开大学保险学教育的特色。南开大学风险管理与保险学系教师虽已出版多种保险专业教材，但还没有编写一套完整的保险与精算教材丛书。通过编写系统性的教材，目的之一就是希望从整体上推动南开大学保险学科的发展。目前，虽然国内已有部分院校出版了保险专业教材的丛书，但仅是反映某些院校的保险教育状况。此外，在保险教材建设领域，相隔一段时间增加一套丛书还是有利于保险教育的。需要指出的是，编写和出版丛书仅是手段而不是最终的目的。所以，我们全体编写人员已达成共识，不能为编写丛书凑数量而忽视质量，不能片面地追求丛书中各书籍在同一时间出版而形成所谓的“丛书”。当然，我们也希望在不长的时间内能完成该套丛书的编写和出版。

三是注意教材的层次化，写出理论性相对较强的教材。由于保险学科具有应用性强的特征，所以目前有些保险学教材往往注意教材的应用性而忽视教学的梯度或对象的差异性，以及教材使用对象的层次性。即教材的使用对象不明确，同一教材大学可以用，大专可以用，中专也可以用。事实上，随着我国保险业发展水平的不断提高和经营管理的逐步成熟，培养多层次的保险人才又重新成为保险教育界所面临的一个现实问题。设立保险专业的院校既要培养保险大专人才，也要培养保险本科生和保险硕士生，此外还需要培养高层次的保险博士生。所以，根据不同层次的保险教育编写具有不同特点的保险专业教材是必要的、合理的。此外，编写保险教材还应把握院校教育与公司教育的差异和特点。公司在职教育固然有其特殊性和必要性，不能被院校教育所替代，而院校教育同样也应有自己的地位和特点，不能变成公司在职教育。所以在教材建设上，两者同样也不能互相替代。最后，需要指出的是，保险学科虽然具有实践性和应用性的特征，但这并不能否定保险学作为一个独立的学科所应具有的理论性，即使涉及保险业务的一种教材，也同样存在一定的原理和理论。所以，编写院校保险教材，强调理论性是合理的。就该套丛书而言，我们的指导思想就是：该丛书的使用对象是高等院校保险专业的本科生，并强调教材的理论性。

参加编写该套教材的作者主要是南开大学风险管理与保险学系的教师，他们大多数是年轻教师，具有很好的教育背景，并具有较丰富的教学经验和较强的科研能力。此外，为提高教材的质量，我们还邀请了武汉大学、中国对外经贸大学、

天津财经大学、广州金融学院等院校的部分教师参与我们的教材编写。在编写体制上完全实行主编负责制，由主编确定大纲，组织编写人员，并最后定稿。当然，在写作过程中，为提高教材质量，编写人员也有交流和沟通，并请相关的教师进行审阅。

如何进行教材建设，并写出经得起时间考验的经典教材，对教师来说是一个永恒的课题。所以，该套教材的推出难免存在这样或那样的问题，以致影响到该丛书没有达到我们的初衷。对此，敬请读者批评指正，我们不胜感激。

最后，我们要感谢南开大学出版社的同志，他们为该套教材的出版投入了很大的精力，对此我们深表谢忱。

南开大学风险管理与保险学系主任

江生忠教授

2005 年 6 月 1 日于南开大学

前　言

“保险精算学”是广泛应用在经济、金融、保险等领域的一门新型交叉学科，它是以数学、概率统计为研究基础和手段，对经济、金融、保险等领域经营管理的各个环节进行数量分析，为提高经营管理水平、制定经营管理决策而提供科学依据和方法技术的一门重要学科。“保险精算”既不是“应用数学”，也不仅仅是保险经营中的一种单纯技术，而是形成了一整套系统的、科学的、规范化的学科体系。

“保险精算教育”在国际上目前包括专业、课程体系，本、硕、博学程，精算实务技术，以及全国及世界各个系列的“精算师考试”。

国际上研究 “保险精算学”和开展“保险精算教育”已有近300年的历史，而在1984年“精算教育”才引入我国。因为我国保险业务从1990年才正常连续开展起来，因此“保险精算学”只在较少高校相继开设，相关教材比较少；而且由于我国保险精算实务技术发展比较滞后，从事精算教学和研究的教师及相关人员很少，因此目前教材的编著基本上沿袭国外20世纪60～80年代的教材体系的译著，致使初学精算的各类读者和考试精算师的各种人才对有些教材很难入门和学习。

作为从事精算教学十几年的教师，我们深切体会到，当前我国精算学科的研究和教学，精算实务技术的运用和推广，需要一套由浅入深、讲授切入点清楚、结合保险实际需求、知识点明确突出、上下连贯通达的教材。目前有的教材一开始就是抽象模型的引入、繁琐公式的罗列；一般教材语言的直译性较强，又较难结合当前的具体实务；有的教材案例太少，往往是原始数据表之后，输出一大堆计算结果数据表，而缺乏对案例和综合例题的具体计算、分析过程，这给教师讲授和学生学习、研究和实务工作人员的运用带来一系列的困难，使之不能掌握理论、方法、技术和实证计算的全过程。

因此，本书试图从上述几个方面努力，把我们十几年教学中总结整合的教学内容贯穿到讲授模式和脉络中，特别结合近几年国际国内精算师考试的内容，融入不断更新的知识和有代表性的实证分析案例，希望对相关方面的教师的教学和其他读者的学习研究能力及考试成绩的提高有所裨益。

本书是由从事多年精算教学的老师、多年参加精算考试并获得优异成绩的精

算研究生以及特邀的在保险公司第一线从事保险精算实务工作和研究的 FSA（精算师）等共同撰写而成的。

本书共分两篇："寿险精算"（上篇）和"寿险精算实务"（下篇）。

每章包括讲授精算方法和技术的理论基础、方法机理、相关原则和具体的有关计算过程；既有较多的为巩固、掌握特定方法的算例，也有把全章内容融会贯通的综合性实例，还有近几年在寿险公司实务中应用技术的案例分析过程，包括收集统计数据、运用相应的方法技术、上机进行电算的全过程。

其中寿险精算部分突出的特点是描述严谨而且易懂，不是罗列抽象的模型，实例较多并且结果准确；不仅有定价和准备金的计算方法，还有寿险公司实务中定价和准备金评估的过程演示。这部分精算实务的内容对学生在课堂上学了方法和机理后到保险公司实习或实际工作很有益处。

南开大学风险管理与保险学系 2004 年设立了"精算统计实验室"，对本科生讲授这两门课主要都是在实验室进行的，除讲授基本理论、方法和技术外，结合运用 Excel 等精算软件进行教学实习，使学生掌握从事实际课题计算和分析的全过程。

本书可作为保险精算专业本科生（包括研究生）的教材，适用于非保险精算专业本科生和研究生自学或参考，也适合作为保险公司等各类相关人员从事研究和实务工作以及考试精算师有关人员的参考教材；对应用经济、金融、财会等方面的相关人员也可作为保险精算入门学习和应用的参考书。

本书 1～5 章，由南开大学风险管理与保险学系李勇权副教授编写；6、7 章，由中国人寿保险公司精算师蒋晓虎先生编写。山西保监局的王丽娜女士提供了寿险精算部分的习题和答案。全书由肖芸茹教授统稿定稿。

本书编写过程中得到了南开大学李秀芳、江生忠等老师的指导和支持，得到了南开大学出版社莫建来等老师的支持和帮助，在此一并表示感谢。

对于本书存在的不足和错误，真诚地希望各方面的读者给以斧正，并提出宝贵的意见。

肖芸茹

2007 年 5 月于南开大学

目　录

上篇　寿险精算

下篇　寿险精算实务

上篇　寿险精算

第一章　生命表基础

寿险精算的主要讨论都是建立在确定生命（如被保险人）生存情况的基础上。生命表是对一定数量的人口自出生（或一定年龄）到全部死亡这段时间内的生存和死亡情况的记录。生命表描述和分析这一定数量的人口以什么样的死亡率死去的全过程。精算学的发展始于对生命表的研究。

1.1　基本概念

1. 我们用符号(x)表示 x 岁的生命/人，用$T(x)$表示(x)从现在直到死亡之间的时间长度，显然，(x)在何时死亡是未知的，是不确定的，因此$T(x)$不是一个确定的数，而是一个随机变量，$T(x)$为(x)的未来生命时间长度随机变量。

用X表示(x)死亡时的年龄。显然，X也是一个随机变量，并且$T(x)=X-x$，称X为(x)的寿命随机变量。

如果$(x)=(0)$，即一个新生婴儿，那么很显然，新生婴儿的未来生命时间长度恰好等于其寿命，即$T(0)=X$。

假设新生儿的寿命随机变量 X 是一个连续型随机变量，并且其分布函数为$F_X(x)$，即

$$F_X(x)=P_r(X\leqslant x),\ x\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

显然，$F_X(x)$为新生儿将在x岁之前死亡的概率。

与上述死亡概率对应，定义生存函数$s_X(x)$为

$$s_X(x)=1-F_X(x)=P_r(X>x),\ x\geqslant 0 \tag{1.1.2}$$

即$s_X(x)$为新生儿将在x岁仍然活着的概率。

我们约定$F_X(0)=0$，或$s_X(0)=1$，即所考虑的(0)是活着的。

例 1.1.1　假设某地区新生婴儿的寿命随机变量在（0，100）上服从均匀分布，求：

（1）该地区新生婴儿寿命随机变量的分布函数；

（2）该随机变量的生存函数；

（3）该地区新生婴儿将在（55，81）之间死亡的概率。

解　由上面的定义，有

（1） $F_X(x)=P_r(X\leqslant x)=\int_0^x \frac{1}{100}\mathrm{d}x=x/100$；

（2） $s_X(x)=P_r(X>x)=1-F_X(x)=(100-x)/100$；

（3） $P_r(55<X\leqslant 81)=s_X(55)-s_X(81)=26/100$。

2. 考虑一般的(x)。首先，(x)将在$y(>x)$岁仍然生存的概率为

$$P_r(X>y\mid X>x)=s_X(y)/s_X(x) \tag{1.1.3}$$

或

$$\begin{aligned}F_{T(x)}(y-x)&=P_r(T(x)<y-x)=[F_X(y)-F_X(x)]/s_X(x)\\&=[s_X(x)-s_X(y)]/s_X(x)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

其在y岁之前死亡的概率为

$$\begin{aligned}P_r(x<X\leqslant y\mid X>x)&=[F_X(y)-F_X(x)]/s_X(x)\\&=[s_X(x)-s_X(y)]/s_X(x)\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

或

$$s_{T(x)}(y-x)=P_r(T(x)>y-x)=s_X(y)/s_X(x) \tag{1.1.6}$$

3. 在精算学里，通常用符号p、q来表示生存概率和死亡概率，更具体地，用符号${}_tp_x$表示(x)将在t年后仍然生存的概率，用${}_tq_x$表示(x)将在接下来的t年内死亡的概率，有

$$\begin{aligned}{}_tp_x&=P_r(T(x)>t)=P_r(X>x+t\mid X>x)\\&=s_X(x+t)/s_X(x)=s_{T(x)}(t),\qquad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

和

$$\begin{aligned}{}_tq_x&=1-{}_tp_x=P_r(T(x)\leqslant t)\\&=F_{T(x)}(t)=[s_X(x)-s_X(x+t)]/s_X(x)\text{，}\quad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

当$(x)=(0)$时，因为$T(x)=T(0)=X$，所以

$${}_tq_0=P_r[T(0)=X\leqslant t]=F_X(x),\quad t\geqslant 0$$

和

$${}_tp_0=s_X(x),\quad x\geqslant 0$$

特别地，$t=1$时，可以将上述符号左下角的t省略不写，即

$q_x=P_r[(x)$将在未来1年内死亡$]=P_r(T(x)\leqslant 1)$

$p_x=P_r[(x)$将活到年龄$x+1]=P_r(T(x)>1)$

4. 用$t\mid$来表示延期t（年）。因此，对于(x)将在t年后的u年内死亡的概率，我们可以用${}_{t|u}q_x$来表示，即

$$ {}_{t|u}q_x = P_r[t < T(x) \leqslant t+u] = {}_{t+u}q_x - {}_t q_x = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x \tag{1.1.9} $$

上式中，如果 $u=1$，则可简记为 ${}_{t|}q_x$。

例 1.1.2　对例 1.1.1 所述地区的 (x)，求 ${}_t p_x$ 和 ${}_t q_x$，其中 $x+t \leqslant 100$。

解　由例 1.1.1 知

$$ s_X(x) = (100-x)/100 $$

所以，有

$$ {}_t p_x = s(x+t)/s(x) = (100-x-t)/(100-x) $$

和

$$ {}_t q_x = 1 - s(x+t)/s(x) = t/(100-x) $$

本例中，如果 $x+t>100$，则有 ${}_t p_x = 0$，${}_t q_x = 1$。

5. 考虑连续随机变量 $T(x)$ 的整数部分，用 $K(x)$ 表示之，即 $K(x)=[T(x)]$。同时令 $S(x)=T(x)-K(x)$。分别称 $K(x)$ 和 $S(x)$ 为 (x) 的简略未来生命时间长度随机变量和 (x) 的未来生命时间长度剩余随机变量。有

$$ \begin{aligned} P_r[K(x)=k] &= P_r[k \leqslant T(x) < k+1] = P_r[k < T(x) \leqslant k+1] \\ &= {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = {}_k p_x q_{x+k} = {}_{k|} q_x \;, k=0,1,2\cdots \end{aligned} \tag{1.1.10} $$

和

$$ F_{K(x)}(y) = P_r[K(x) \leqslant y] = \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1} q_x $$

进一步有

$$ P_r[(K=k) \cap (S \leqslant s)] = P_r[(K < T \leqslant k+s)] = {}_k p_{x\,s} q_{x+k} $$

和

$$ f(s \mid X > x) = f_{T(x)}(x+s) = {}_s p_x \mu_{x+s} $$

在不致引起混淆的情况下，可以将 $T(x)$ 简记为 T，将 $K(x)$ 简记为 K，将 $S(x)$ 简记为 S。

例 1.1.3　对例 1.1.1 所述地区的 (x) $(x<75)$，求其未来生命时间长度的整数部分为 25 岁的概率。

解　由前述定义有

$$ \begin{aligned} P_r[K(x)=25] &= P_r[25 \leqslant T(x) < 26] = {}_{25} p_x - {}_{26} p_x \\ &= [s(x+25) - s(x+26)]/s(x) = 1/(100-x) \end{aligned} $$

6. 定义

$$ \mu(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-\mathrm{d}\ln s(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.11} $$

为致命力。

由定义，有

$$-\mu(y)=\mathrm{d}\ln s(y)$$

从而有

$$ {}_tp_x=\exp[-\int_x^{x+t}\mu(y)\mathrm{d}y]=\exp[-\int_0^t\mu(x+s)\mathrm{d}s] \tag{1.1.12}$$

特别地，$x=0$时，有

$$ {}_xp_0=s_X(x)=\exp[-\int_0^x\mu(s)\mathrm{d}s] \tag{1.1.13}$$

于是

$$F_X(x)=1-s_X(x)=1-\exp[-\int_0^x\mu(s)\mathrm{d}s]$$

并且

$$F'_X(x)=f_X(x)=\mu(x)\exp[-\int_0^x\mu(s)\mathrm{d}s]={}_xp_0\mu(x)$$

令 $F_{T(x)}(t)$ 和 $f_{T(x)}(t)$ 分别记 $T(x)$ 的分布函数和概率密度函数，因为 $F_{T(x)}(t)={}_tq_x$，所以

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{T(x)}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tq_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{1-\exp[-\int_x^{x+t}\mu(y)\mathrm{d}y]\}\\ &=\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-\int_x^{x+t}\mu(y)\mathrm{d}y]\}\exp[-\int_x^{x+t}\mu(y)\mathrm{d}y]={}_tp_x\mu(x+t),\quad t\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

于是

$$ {}_tq_x=\int_0^t{}_sp_x\mu(x+s)\mathrm{d}s$$

特别地

$$ {}_\infty q_x=\int_0^\infty{}_tp_x\mu(x+t)\mathrm{d}t=1$$

另外，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-{}_tp_x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tp_x={}_tp_x\mu(x+t) \tag{1.1.15}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}{}_np_x=0$，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln{}_np_x)=\infty$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}(\int_x^{x+n}\mu(y)\,\mathrm{d}y)=\infty$$

例 1.1.4　对于例 1.1.1 中的 X，求 $\mu(x)$。

解

因为

$$f(x)=1/100$$
$$S(x)=1-F(x)=(100-x)/100$$

所以

$$\mu(x)=f(x)/S(x)=1/(100-x)$$

1.2　生命表

生命表通常由一些给出每一个年龄的 q_x、l_x、d_x 以及一些其他的衍生函数在一些年龄上的数值的表组成。在给出这种表之前，我们先讨论其中一些函数的意义。

1.2.1　生命表函数与生存函数

考虑一群新生婴儿，共 $l_0=100\ 000$ 名。每个婴儿的死亡情况是相互独立并且具有相同的概率分布，他们的生存情况由生存函数 $s(x)$ 给出。

令 $L(x)$ 表示这群人在 x 岁还活着的人数。用 $j=1, 2, \cdots, l_0$ 来记这些人，则有

$$L(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

其中 I_j 为 j 的示性函数，即

$$I_j=\begin{cases}1, & \text{如果 } j \text{ 生存到 } x\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}E\,[I_j]&=P_r\{j\text{在}x\text{岁还活着}\}=P_r\{T(0)>x\}\\&=s(x), \qquad\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ l_0\end{aligned}$$

所以

$$E\,[L(x)]=\sum_{j=1}^{l_0} E\,[I_j]=l_0 s(x)$$

记 $l_x=E\,[L(x)]$，即 l_x 为 l_0 个新生儿中预期生存到 x 岁的人数，于是