小智囊图书

QUANGUO GELEI CHENG REN
GAO DENG XUE XIAO
ZHAO SHENG KAO SHI JIAOCAI

全国各类成人高等学校招生考试教材

高等数学（一）

专科升本科

总主编　杨干忠
原中国人民大学成人教育学院院长
中国成人教育协会副会长
北京高等院校成人教育研究会理事长

中国社会出版社

小智囊图书

QUANGUO GELEI CHENG REN
GAO DENG XUE XIAO
ZHAO SHENG KAO SHI JIAOCAI

全国各类成人高等学校招生考试教材

高等数学（一）

专科升本科

主　编　谭毓澄
副主编　蔡文娱　叶正道　肖克奇
编　者　王建国

2007年最新版

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1/杨千忠总主编.—北京:中国社会出版社,2007.2

全国各类成人高等学校招生考试教材.专科升本科

ISBN 978-7-5087-1671-8

Ⅰ.高… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 023716 号

丛 书 名:全国各类成人高等学校招生考试教材
书　　名:专科升本科:高等数学(一)
总 主 编:杨千忠
责任编辑:尤永弘　薛丽仙

出版发行:中国社会出版社　邮政编码:100032
通联方法:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
电话:(010)66026804　(010)66051698　电传:(010)66051713
邮购部:(010)66060275
经　　销:各地新华书店

印刷装订:北京市通县华龙印刷厂
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:17.5
字　　数:280 千字
版　　次:2007 年 3 月第 4 版
印　　次:2007 年 3 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5087-1671-8
总 定 价:239.00 元(全八册)

前 言

为了帮助参加全国各类成人高等学校招生考试(含高职)的广大考生全面、系统、快速、高效地复习各门应考课程,我们严格按照教育部颁布的《2007 年全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》精心修订了本套"小智囊"系列丛书。

编者充分考虑成人高考特点,旨在提高考生灵活运用基础知识的能力,掌握解答各类习题的思路、方法、规律、技巧,重在提高应试效率。书中每章复习内容都设有六个栏目。其中"复习内容":以《大纲》为基础,对《大纲》中所要求的考试要点进行系统阐述、讲解。"例题解析":以《大纲》为基础,精选有代表性的习题进行详尽分析,并归纳总结。"自我测试":兼顾题型、重点难点、考点进行测试、练习。"自我强化训练":有针对性地选择设计相应的题目,使考生通过做题,提高应试能力。"自我测试参考答案":为《自我测试》中所列题目提供参考答案。"自我强化训练参考答案":为强化训练题提供参考答案。

本书具有以下特点:

一、体例科学。各科的内容选择既体现新大纲要求,又突出重点,分配合理,科学规范了适合成人学习特点的体系结构。

二、内容翔实。按新大纲要求注重吸收新知识、新成果,避免材料老化、陈旧,使考生适应成人高考的新变化,在应试中做到举一反三。

三、结构优化。本书严格依照新大纲的考点划分章节,保证了内容基本的区分度,力求做到有层次、有梯度、由浅入深、由低到高、相互补充、有机统一。

四、选题精当。内容选择和编写紧扣大纲,适合成人学习的特点,注重从知识立意向能力立意转变。注重学科基础、学科综合能力、学科实验能力的训练,以提高考生综合运用知识的应试能力。

本书由中国人民大学成人高等教育学院前院长杨干忠教授主编。编者来自各大重点院校和重点中学长期从事成人教育并具有丰富教学经验的教授、专家。因此,具有较高的权威性和首选性。我们相信,只要考生能够认真使用,真正掌握其宗旨,一定会达到满意的效果!

由于修订时间紧迫,疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评、指正。

编　者

目　　录

第一章　极限和连续

【复习内容】

一、极限

（一）数列的极限

1. 数列定义

一列按一定顺序排列的数，如 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为数列，记作$\{x_n\}$，其中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为一般项或通项．数列也可看作定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$ 上函数 $x_n=f(n)$ 的函数值，即 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$．例如(1)$1,3,5,\cdots(x_n=2n-1)$；(2)$\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots\left(x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$；(3)$0,1,0,1,\cdots\left(x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$；(4)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\left(x_n=\frac{1}{n}\right)$．

2. 数列的有界性与单调性

(1) 数列$\{x_n\}$，若存在正数M，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|x_n|\leqslant M$成立，则称$\{x_n\}$为有界数列，否则称为无界数列．

(2) 数列$\{x_n\}$，若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，总有 $x_n\leqslant x_{n+1}$，则称$\{x_n\}$为单调增加数列；反之，若总有 $x_n\geqslant x_{n+1}$，则称$\{x_n\}$为单调减少数列，具有性质(1)和(2)的数列称为单调有界数列．

3. 数列极限的定义

给定数列$\{x_n\}$，当n无限增大时($n\to\infty$)，x_n 无限趋近于某个常数A，即 $|x_n-A|$ 无限趋近于0，则称$\{x_n\}$以A为极限或称$\{x_n\}$收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$．

4. 收敛数列的性质

(1) 收敛数列的极限是唯一的（极限存在的唯一性）．

(2) 收敛数列必有界．有界为$\{x_n\}$收敛的必要条件而非充分条件．

(3) 若数列$\{x_n\}$收敛于A，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则数列$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{k_n}\}$也必定收敛于$A$．

5. 收敛准则

(1) 单调有界数列必有极限．

(2) 夹逼准则　设数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，如果 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．

6. 数列极限的四则运算

若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}y_n$
$= a \pm b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty}x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}y_n$
$= ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$
$= \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$

7. 重要极限

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$

(二) 函数的极限

1. 自变量 $x\to\infty$ 时函数极限的定义

(1) 设 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 上有定义，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A，即 $|f(x)-A|$ 无限趋于零，则称当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=A$.

(2) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,a)$ 内有定义，如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A. 即 $|f(x)-A|$ 无限趋于零，则称当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ 内有定义，如果当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限趋于常数A，即 $|f(x)-A|$ 无限趋于零，则称当$x\to\infty$时 $f(x)$ 以A为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

2. 自变量 $x\to x_0$ 时函数极限的定义(双边极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A，即 $|f(x)-A|$ 无限趋于零，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

3. 函数左、右极限的定义(单边极限)

(1) 当 x 从 x_0 左侧$(x<x_0)$ 趋于 x_0 时，(记为 $x\to x_0^-$)，$f(x)$ 无限趋于常数 A，即 $|f(x)-A|$ 趋于零，称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

(2) 当 x 从 x_0 右侧$(x>x_0)$ 趋于 x_0 时，(记为 $x\to x_0^+$)，$f(x)$ 无限趋于 A，即 $|f(x)-A|$ 无限趋于零，称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$. 左、右极限也可用符号 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 表示.

4. 函数极限存在的充分必要条件

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，即左、右极限都存在且相等.

5. 唯一性定理

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，则极限值必唯一.

6. 函数极限存在的夹逼准则

设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域(或 $|x| > M$) 内有定义，若

(1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

7. 函数极限的四则运算法则

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在自变量 x 的同一极限过程中，有 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$= A \pm B$

(2) $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$= A \cdot B$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

$= \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$

8. 重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(三) 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量定义

若函数 $f(x)$，有 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时为无穷小量(以 0 为极限的变量).

2. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量.

3. 无穷小量的比较

设 a，b 为同一极限过程中的无穷小量，

(1) 若 $\lim \dfrac{a}{b} = 0$，则称 a 是较 b 高阶的无穷小量，记作 $a = o(b)$.

(2) 若 $\lim \dfrac{a}{b} = \infty$，则称 a 是较 b 低阶的无穷小量.

(3) 若 $\lim \dfrac{a}{b} = c$(c 为常数,$c \neq 0$),则称 a 与 b 是同阶无穷小量.

(4) 若 $\lim \dfrac{a}{b} = 1$,则称 a 与 b 为等价无穷小量,记作 $a \sim b$.

4. 等价无穷小量的代换

设 $a \sim a'$,$b \sim b'$,则 $\lim \dfrac{a}{b} = \lim \dfrac{a'}{b'}$

在求极限时,经常用到下列一些等价的无穷小量:

$\sin x \sim x \quad (x \to 0) \quad e^x - 1 \sim x (x \to 0) \quad \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$

$(1+x)^2 - 1 \sim 2x \quad (x \to 0)$

熟记一些等价无穷小量,并在求极限过程中适时地代换将给求极限带来很大的便捷.

5. 无穷大量定义

若函数 $f(x)$,在 x 的某一变化过程中,$|f(x)|$ 无限增大,称 $f(x)$ 为无穷大量,记作 $\lim f(x) = \infty$,这种写法,只是描述变化趋势,不是极限.

6. 无穷小量与无穷大量的关系

若 a 为无穷小量($a \neq 0$),则 $\dfrac{1}{a}$ 为无穷大量,即互为倒数关系.

二、函数的连续性

(一) 函数连续性的概念

1. 函数在一点连续的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,且 $x_0 + \Delta x$ 也属于 x_0 的该邻域,

(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

这是两个等价定义.

2. 函数在一点左连续与右连续的定义

如果 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

如果 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

3. 函数在一点连续的充分必要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,即函数既是左连续又是右连续.

4. 函数在区间上连续的定义

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续;如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且在点 a 处右连续、在点 b 处左连续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(二) 函数间断点

如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1) 在 $x = x_0$ 处没有定义;

(2) 在 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$；

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，或称 $f(x)$ 在 x_0 处间断，点 x_0 称为 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

(三) 初等函数的连续性

第一，连续函数的和、差、积、商(分母不为 0) 是连续的.

第二，连续函数构成的复合函数是连续的.

第三，严格单调连续函数的反函数为单调连续函数.

第四，基本初等函数在其定义域内是连续的.

第五，初等函数在其定义域区间内是连续的. 若 x_0 为定义域区间内一点，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$. 即符号lim 与 f 可交换顺序，这是对连续函数而言.

(四) 闭区间上连续函数的性质

设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

第一，最大、最小值定理. 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，$f(x_1) = m$，$f(x_2) = M$. 且有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

第二，介值定理. 对任意的 c，$m < c < M$，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = c$.

第三，零点定理. 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$. 零点定理常常用来判定方程 $f(x) = 0$ 根的存在性与根的范围.

【例题解析】

例 1. 填空题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x > 0 \\ x^2 + a, x \leqslant 0 \end{cases}$，当 $a =$ ________ 时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 若 $a =$ ________，则当 $x \to 0$ 时，$\sin x^2 \sim x^a$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0}(x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sin x) =$ ________.

(4) $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n^2 - n} - n) =$ ________.

(5) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + ax)^{\frac{1}{2x}} = 3$，则 $a =$ ________.

(6) 设当 $x \to 0$ 时，ax^2 与 $\tan\dfrac{x^2}{4}$ 为等价无穷小，则 $a =$ ____.

(7) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + 2^{-\frac{1}{x}}}{1 - 2^{-\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ____.

(8) 函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$ 的间断点为 ________.

解:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 + a) = a$

$a = 1$

答案:$a = 1$

(2) 当 $x \to 0$ 时,$\sin x^2 \sim x^2$,所以 $x^2 \sim x^a$

$a = 2$

答案:$a = 2$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sin x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$= 0 + 1$

$= 1$

答案:1

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1}$

$= -\dfrac{1}{2}$

答案:$-\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + ax)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1 + ax)^{\frac{1}{ax}\cdot\frac{a}{2}} = e^{\frac{a}{2}}$

则 $e^{\frac{a}{2}} = 3, a = 2\ln 3$

答案:$2\ln 3$

(6) 由于 ax^2 与 $\tan\dfrac{x^2}{4}$ 为等价无穷小,从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2}{\tan\dfrac{x^2}{4}} = 1$

又由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2}{\tan\dfrac{x^2}{4}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2}{\dfrac{x^2}{4}}$ (等价无穷小代换)

$= \lim\limits_{x\to 0} 4a = 1$　　故 $a = \dfrac{1}{4}$

答案:$a = \dfrac{1}{4}$.

(7) 由于在 $x = 0$ 两侧,$-\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势不同,故要用到左、右极限.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1 + 2^{-\frac{1}{x}}}{1 - 2^{-\frac{1}{x}}} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{-\frac{1}{x}}}{1-2^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=-1$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

答案:不存在.

(8) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x+1)}$,令$(x-2)(x+1)=0$,得$x_1=2,x_2=-1$

答案:$x_1=2,x_2=-1$

例 2. 单项选择题

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}=$ [　　]

A. 0　　B. 3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 1

(2) 当$x\to+\infty$时,下列函数极限存在的是 [　　]

A. $y=\dfrac{e^x-1}{x}$　　B. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

C. $y=\sin x$　　D. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

(3) 若$\lim f(x)$存在,$\lim g(x)$不存在,则$\lim[f(x)+g(x)]$ [　　]

A. 不存在　　B. 可能存在也可能不存在

C. 存在　　D. 存在且极限为零

(4) 如果$\lim\limits_{x\to\infty} kx\sin\dfrac{3}{x}=1$,则$k$为 [　　]

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. 1

C. 3　　D. $\dfrac{1}{2}$

(5) 函数$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x} & x>0\\ \dfrac{1}{1+x^2} & x\leqslant 0\end{cases}$在$x=0$处间断是因为 [　　]

A. $f(x)$在$x=0$处无定义

B. $f(x)$在$x=0$处左、右极根存在但不相等

C. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

D. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq f(0)$

(6) 设$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ e^{2ax}+e^{ax}+1 & x\geqslant 1\end{cases}$,要使$f(x)$在$x=1$处连续,则$a=$ [　　]

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. 0

(7) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ x & 0\leqslant x<1 \\ 2-x & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在

A. $x=0$，$x=1$ 处都间断

B. $x=0$ 处间断，$x=1$ 处连续

C. $x=0$ 处连续，$x=1$ 处间断

D. $x=0$，$x=1$ 处都连续

【　】

解:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+2}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot 1$

$=\dfrac{1}{3}$

答案:C

(2) 由于 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

答案:B

(3) 假设$\lim[f(x)+g(x)]$存在，则

$\lim g(x)=\lim[f(x)+g(x)-f(x)]$

$=\lim[f(x)+g(x)]-\lim f(x)$

与题设中$\lim g(x)$不存在矛盾

答案:A

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}kx\sin\dfrac{3}{x}=3k\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{3}{x}}{\dfrac{3}{x}}=3k=1,k=\dfrac{1}{3}$

也可根据等价无穷小量代换得

$\lim\limits_{x\to\infty}kx\sin\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}kx\cdot\dfrac{3}{x}=3k=1,k=\dfrac{1}{3}$

答案:A

(5) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

答案:C

(6) 由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(e^{2ax}+e^{ax}+1)=e^{2a}+e^{a}+1$，所以有 $a=0$

答案:D

(7) 由于 $f(0)=0$，$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断,在 $x=1$ 处连续.

答案:B

例 3.已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x-1$,求 $f(x)$.

解:设 $e^x+1=t$,则 $x=\ln(t-1)$,于是

$$\begin{aligned}f(t)&=e^{2\ln(t-1)}+e^{\ln(t-1)}-1\\&=(t-1)^2+(t-1)-1\\&=t^2-t-1\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x^2-x-1$

例 4.求函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2x+1}$ 的定义域.

解:由函数表达式有

$$\begin{cases}x-1\neq0\\2x+1\geqslant0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\neq1\\x\geqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad 所以定义域为\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$$

例 5.求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\cdot\sin x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+2x}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^3}{x+x^3}$

解:

(1) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0$$

(2) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{2}{x}\cdot(-1)}=e^{-1}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{2}$

(5) 由于分子最高项为 $-x^3$，分母最高项为 x^3，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^3}{x+x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=-1$

例 6. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{3x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

解：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}})^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{3x}$