



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

《自动控制原理（第五版）》立体化教材

自动控制原理

题海大全

胡寿松 / 主编

薛安克 / 主审



科学出版社

www.sciencep.com

TP13/3=5A2D

2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

《自动控制原理(第五版)》立体化教材

自动控制原理题海大全

胡寿松 主编

薛安克 主审

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为胡寿松主编的《自动控制原理(第五版)》、《自动控制原理简明教程(第二版)》的学习指导性教学配套用书。本书形成了一个系统且完整的自动控制原理题库,其内容包括解题的数学基础及600余道母题的详解。这些母题包含了概念题、一般题、设计题、技巧题、证明题以及难题等6类,便于配制满足各种基本要求的试卷内容。

本书在解题过程中,给出了科学、完善的解题步骤,并注重一题多解,以便相互校核。特别是,书中大部分题目给出MATLAB验证程序,便于研究系统参数的不同选择对系统性能的影响,从而丰富了解题内容,可进一步升华读者对自动控制理论的掌握和应用,并便于生成数量不限的试题。

本书可作为自动控制、电气工程及其自动化、机械设计制造及其自动化、电子信息工程、测控技术与仪器等专业的自动控制原理课程的教学配套用书,并可供广大学生考研、提高学习质量和教师出题之用。

书中附赠《MATLAB辅助分析与设计软件2.0》光盘,以便于读者使用本书。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理题海大全/胡寿松主编. —北京:科学出版社,2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

(《自动控制原理(第五版)》立体化教材)

ISBN 978-7-03-021066-1

I. 自… II. 胡 III. 自动控制理论—高等学校—习题 IV. TP13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第017149号

责任编辑:刘俊来 马长芳 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年3月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2008年3月第一次印刷 印张:31 1/2

印数:1—5 000 字数:738 000

定价:48.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

本书是与胡寿松教授主编的《自动控制原理(第五版)》、《自动控制原理简明教程(第二版)》(科学出版社,2007年)相配套的学习指导性教学用书,同时兼容于其他各种自动控制原理教材。

为了满足广大读者深入掌握自动控制技术的需求,适应广大学生考研和教师出题的需要,我们编著和出版了这本《自动控制原理题海大全》,从而填补了相关书籍的出版空白。

本书系统地给出了自动控制原理各类题目的详解,这些题目包含了概念题、一般题、设计题、技巧题、证明题以及难题等6类,便于配制满足各种基本要求的试卷菜单。

本书在解题过程中,给出了科学而完善的解题步骤和方法,并注重一题多解,以方便相互校核。特别是,书中给出了绝大多数题目的MATLAB验证程序,除可核实求解结果的正确性外,还便于修改系统参数,完善控制系统设计性能,同时在时域、复域和频域中直观地展示平行设计结果,以更好地满足实际控制系统的设计需求,使读者进一步升华对控制理论的掌握和应用。书中附赠《MATLAB辅助分析与设计软件2.0》光盘,以便于读者使用本书。

我们深信,通过学习和应用本书,读者一定会在定性分析、定量计算、知识综合运用、解题技巧、MATLAB掌握以及数形结合等能力方面,得到进一步提高。

本书由胡寿松教授主编,薛安克教授主审,参加编著工作的还有张军峰博士、孙新柱讲师、张敏博士和陶洪峰博士。在本书编著过程中,得到了庞全、姜周曙、文成林、张刚、田建艳、夏良正、费树岷、王执铨、胡维礼、王永、吴晓蓓、何亚群、刘亚、李小平、王凤如、丁勇、王从庆、方华京、冯江等教授的支持和帮助,在此深致谢忱。

对于本书存在的错误和不妥之处,恳请广大读者不吝指正。

胡寿松

2007年10月

目 录

前言

第一章 数学基础.....	1
1-1 拉普拉斯变换	1
1-2 z 变换	11
1-3 矩阵代数初步	17
第二章 控制系统的数学模型	21
第三章 时域分析法	65
第四章 根轨迹法.....	123
第五章 频率响应法.....	201
第六章 线性系统的校正方法.....	302
第七章 线性离散系统的分析与校正.....	335
第八章 非线性控制系统分析.....	381
第九章 线性系统的状态空间分析与综合.....	426
参考文献.....	497

第一章 数学基础

1-1 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换法是一种求解线性微分方程的简便运算方法。拉普拉斯变换可以将许多普通函数,如正弦函数、阻尼正弦函数和指数函数,转变为复变量 s 的代数函数,从而将复杂的线性微分方程求解问题,转化为简单的复变量 s 的代数方程求解问题。

1. 拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 为时间 t 的函数,且当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$,则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

相应的拉普拉斯反变换则为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

式中,收敛横坐标 c 为实常量,其实部应大于 $F(s)$ 所有奇点的实部。

1) 拉普拉斯变换的存在性

如果拉普拉斯积分收敛,则函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。若存在一个正实常数 σ ,使得函数 $e^{-\sigma t}|f(t)|$ 在 t 趋于无穷大时趋于零,则称函数 $f(t)$ 为指数级的。

如果 $f(t)$ 在 $t > 0$ 范围内的每一个有限区间上分段连续,且当 t 趋于无穷大时函数 $f(t)$ 为指数级的,则 $f(t)$ 的拉普拉斯积分是收敛的。

如果 $\sigma > \sigma_c$,函数 $e^{-\sigma t}|f(t)|$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t}|f(t)| \rightarrow 0$,且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t}|f(t)| \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma < \sigma_c$$

则 σ_c 的值称为收敛横坐标。

对于函数 $f(t) = Ae^{-\alpha t}$,若

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t}|Ae^{-\alpha t}| \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma > -\alpha$$

则收敛横坐标 $\sigma_c = -\alpha$ 。只有当 s 的实部 σ 大于收敛横坐标 σ_c 时,积分 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ 才是收敛的。因此,必须将算子 s 选定为一个能使上述积分收敛的常数。

从函数 $F(s)$ 的极点来看,收敛横坐标 σ_c 相当于 s 平面内 $F(s)$ 最右边的极点的实部。例如

$$F(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

则 $\sigma_c = -1$ 。可以看出,对于 $t, \sin \omega t$ 和 $t \sin \omega t$ 这样一些函数,其收敛横坐标为零;对于 $e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}$ 和 $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ 这样一些函数,其收敛横坐标为 $-\alpha$ 。但是,对于那些比指数函数增加得更快的函数,不可能找到合适的收敛横坐标值。因此,像 e^{t^2} 和 te^{t^2} 这类函数,不能进行拉普拉

斯变换。

应当指出,在物理上可以实现的信号,总是可以进行拉普拉斯变换的。

2) 指数函数

考虑下列指数函数:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中 A 和 α 为常数,则指数函数的拉普拉斯变换可以求得如下:

$$F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{A}{s + \alpha}$$

3) 阶跃函数

考虑下列阶跃函数:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t > 0 \end{cases}$$

式中 A 为常数,当 $A=1(t)$ 时,则为单位阶跃函数。

阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s}$$

4) 斜坡函数

考虑下列阶跃函数:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中 A 为常数。

斜坡函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = At \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \end{aligned}$$

5) 正弦函数

考虑下列正弦函数:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \sin \omega t, & t \geq 0 \end{cases}$$

式中 A 和 ω 为常数。由于

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

故正弦函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[A \sin \omega t] = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

类似地, $A \cos \omega t$ 的拉普拉斯变换可导出为

$$F(s) = \mathcal{L}[A \cos \omega t] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

6) 平移函数

设函数为 $f(t)$, 当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$; 平移函数为 $f(t-a)1(t-a)$, 其中 $a \geq 0$, 且 $t < a$ 时 $f(t-a)1(t-a) = 0$, 则平移函数的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = \int_0^{\infty} f(t-a)1(t-a)e^{-st} dt$$

令 $\tau = t-a$, 有

$$\int_0^{\infty} f(t-a)1(t-a)e^{-st} dt = \int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau$$

因 $\tau < 0$ 时 $f(\tau)1(\tau) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau &= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} e^{-as} d\tau \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-as} F(s) \end{aligned}$$

式中 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

于是 $\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as} F(s), \quad a \geq 0$

7) 脉动函数

考虑下列脉动函数:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_0}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0, \quad t_0 < t \end{cases}$$

式中 A 和 t_0 为常数。由于

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t-t_0)$$

故脉动函数的拉普拉斯变换

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t-t_0)\right] = \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0})$$

8) 脉冲函数

考虑下列脉冲函数:

$$g(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0, \quad t_0 < t \end{cases}$$

则脉冲函数的拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{As}{s} = A$$

9) $f(t)$ 与 $e^{-\alpha}$ 相乘

若 $f(t)$ 可拉普拉斯变换, 且其拉普拉斯变换为 $F(s)$, 则 $e^{-\alpha}f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha}f(t)e^{-st} dt = F(s + \alpha)$$

类似地, 若有

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s), \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = G(s)$$

则有

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha} \sin \omega t] = F(s + \alpha) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha} \cos \omega t] = G(s + \alpha) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

10) 时间比例尺

设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 改变时间比例尺的函数为 $f(t/\alpha)$, 其中 α 为正常数, 则 $f(t/\alpha)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \int_0^{\infty} f(t/\alpha)e^{-st} dt$$

令 $t/\alpha = t_1, \alpha s = s_1$, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t/\alpha)] &= \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-s_1 t_1} d(\alpha t_1) \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-s_1 t_1} dt_1 = \alpha F(s_1) \\ &= \alpha F(\alpha s) \end{aligned}$$

例如, 考虑 $f(t) = e^{-t}, f(t/5) = e^{-0.2t}$, 由于

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s + 1} = F(s)$$

因此

$$\mathcal{L}[f(t/5)] = \mathcal{L}[e^{-0.2t}] = 5F(5s) = \frac{5}{5s + 1}$$

11) 拉普拉斯变换的积分下限

在某些情况下, 若函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处有一个脉冲函数, 这时必须明确指出拉普拉斯积分下限是 0_- 还是 0_+ , 因为对这两种下限, $f(t)$ 的拉普拉斯变换是不同的。设

$$\mathcal{L}_+ [f(t)] = \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}_- [f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}_+ [f(t)] + \int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st} dt$$

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数, 则因 $\int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st} dt \neq 0$, 故有

$$\mathcal{L}_+ [f(t)] \neq \mathcal{L}_- [f(t)]$$

显然, 如果在 $t=0$ 处不具有脉冲函数, 则有

$$\mathcal{L}_+ [f(t)] = \mathcal{L}_- [f(t)]$$

常用函数的拉普拉斯变换对照表, 见表 1-1。

表 1-1 常用函数拉普拉斯变换对照表

序号	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
6	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at}-e^{-bt})$
7	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}[(a_0-a)e^{-at}-(a_0-b)e^{-bt}]$
8	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(a-b)}[be^{-at}-ae^{-bt}]$
9	$\frac{s+a_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_0}{ab} + \frac{a_0-a}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{a_0-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
10	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_0}{ab} + \frac{a^2-a_1a+a_0}{a(a-b)}e^{-at} - \frac{b^2-a_1b+a_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
11	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
12	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a_0-a}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{a_0-b}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{a_0-c}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
13	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a^2-a_1a+a_0}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{b^2-a_1b+a_0}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{c^2-a_1c+a_0}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
14	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
15	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
16	$\frac{s+a_0}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} (a_0^2+\omega^2)^{1/2} \sin(\omega t + \varphi)$, $\varphi = \arctan \frac{\omega}{a_0}$
17	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
18	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{a_0}{\omega^2} - \frac{(a_0^2+\omega^2)^{1/2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi)$, $\varphi = \arctan \frac{\omega}{a_0}$
19	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{a_0-a}{a^2+\omega^2} e^{-at} + \frac{1}{\omega} \left[\frac{a_0^2+\omega^2}{a^2+\omega^2} \right]^{1/2} \sin(\omega t + \varphi)$ $\varphi = \arctan \frac{\omega}{a_0} - \arctan \frac{\omega}{a}$
20	$\frac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin \omega t$

	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
21	$\frac{s+a_0}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}[(a_0-a)^2+\omega^2]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0-a}$
22	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
23	$\frac{1}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}+\frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}\omega}e^{-at}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{-a}$
24	$\frac{s+a_0}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{a_0}{a^2+\omega^2}+\frac{[(a_0+a)^2+\omega^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0-a}-\arctan\frac{\omega}{-a}$
25	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{a_0}{a^2+\omega^2}+\frac{[(a^2-\omega^2-a_1a+a_0)^2+\omega^2(a_1-2a)^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega(a_1-2a)}{a^2-\omega^2-a_1a+a_0}-\arctan\frac{\omega}{-a}$
26	$\frac{1}{(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}+\frac{e^{-at}}{\omega[(c-a)^2+\omega^2]^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{c-a}$
27	$\frac{s+a_0}{(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{a_0-c}{(a-c)^2+\omega^2}e^{-ct}+\frac{1}{\omega}\left[\frac{(a_0-a)^2+\omega^2}{(c-a)^2+\omega^2}\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0-a}-\arctan\frac{\omega}{c-a}$
28	$\frac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{1}{c(a^2+\omega^2)}-\frac{e^{-ct}}{c[(a-c)^2+\omega^2]}+\frac{e^{-at}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}[(c-a)^2+\omega^2]^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{-a}+\arctan\frac{\omega}{c-a}$
29	$\frac{s+a_0}{s(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\frac{a_0}{c(a^2+\omega^2)}+\frac{(c-a_0)e^{-ct}}{c[(a-c)^2+\omega^2]}+\frac{e^{-at}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}\left[\frac{(a_0-a)^2+\omega^2}{(c-a)^2+\omega^2}\right]^{1/2}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0-a}-\arctan\frac{\omega}{c-a}-\arctan\frac{\omega}{-a}$
30	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{e^{-at}+at-1}{a^2}$
31	$\frac{s+a_0}{s^2(s+a)}$	$\frac{a_0-a}{a^2}e^{-at}+\frac{a_0}{a}t+\frac{a-a_0}{a^2}$
32	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+a)}$	$\frac{a^2-a_1a+a_0}{a^2}e^{-at}+\frac{a_0}{a}t+\frac{a_1a-a_0}{a^2}$
33	$\frac{s+a_0}{(s+a)^2}$	$[(a_0-a)t+1]e^{-at}$
34	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
35	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1-(1+at)e^{-at}}{a^2}$
36	$\frac{s+a_0}{s(s+a)^2}$	$\frac{a_0}{a^2}+\left(\frac{a-a_0}{a}t-\frac{a_0}{a^2}\right)e^{-at}$

	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
37	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+a)^2}$	$\frac{a_0}{a^2} + \left(\frac{a_1a-a_0-a^2}{a}t + \frac{a^2-a_0}{a^2} \right) e^{-at}$
38	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
39	$\frac{s+a_0}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}[a_0-(a_0-a)e^{-at}]$
40	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t - \varphi)$, $\varphi = \arctan(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$
41	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t)$
42	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi)$, $\varphi = \arctan(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$

2. 拉普拉斯变换定理

1) 实微分定理

设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则应用分部积分法求拉普拉斯变换积分, 有

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right]$$

从而

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

同理可证

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

2) 终值定理

如果函数 $f(t)$ 和 $df(t)/dt$ 是可拉普拉斯变换的, 象函数 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换, 并且极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

为了证明该定理, 在 $df(t)/dt$ 的拉普拉斯变换中, 令 s 趋于零, 即

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

因为 $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$, 所以得

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt = f(t) \Big|_0^{\infty} = f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

从而

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

应当指出, 当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在, 才能应用终值定理, 这意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t)$ 将稳定到确定值。如果 $sF(s)$ 的所有极点均位于左半 s 平面, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在; 如果 $sF(s)$ 有极点位于虚轴或位于右半 s 平面内, $f(t)$ 将分别包含振荡的或按指数规律增长的时间函数分

量,因而 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 将不存在。显然,如果 $f(t)$ 是正弦函数 $\sin \omega t$,则 $sF(s)$ 将有位于虚轴上的极点 $s = \pm j\omega$,因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 不存在,所以终值定理不适用于这类函数。

3) 初值定理

初值定理是终值定理的对偶定理。如果函数 $f(t)$ 和 $df(t)/dt$ 均可拉普拉斯变换,并且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在,则有

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

为了证明该定理,利用 $df(t)/dt$ 的 \mathcal{L}_+ 变换

$$\mathcal{L}_+ \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_+)$$

由于

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \rightarrow 0, \quad \forall t \in [0_+, \infty)$$

因此

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0_+)] = 0$$

证得

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

应当指出,在应用初值定理时,对 $sF(s)$ 的极点位置没有限制,因此对于正弦函数,初值定理是成立的。

4) 积分定理

如果函数 $f(t)$ 是指数级的,且 $f(0_-) = f(0_+) = f(0)$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$,则

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int f(t) dt \right] &= \int_0^{\infty} \left[\int f(t) dt \right] e^{-st} dt = \left[\int f(t) dt \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(t) dt \Big|_{t=0} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数,则 $f^{-1}(0_+) \neq f^{-1}(0_-)$ 。此时,必须对积分定理作如下修改:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ \left[\int f(t) dt \right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_+)}{s} \\ \mathcal{L}_- \left[\int f(t) dt \right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_-)}{s} \end{aligned}$$

5) 复微分定理

若函数 $f(t)$ 可拉普拉斯变换,则除了在 $F(s)$ 的极点之外,有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)] &= \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = - \frac{d}{ds} F(s) \end{aligned}$$

类似地,令 $tf(t) = g(t)$,有

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[\tan(t)] = - \frac{d}{ds} G(s) = - \frac{d}{ds} \left[- \frac{d}{ds} F(s) \right] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

重复上述过程,可得

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

6) 卷积定理

考虑下列卷积函数

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

由于 $\tau > t$ 时, 有 $f_1(t-\tau)1(t-\tau) = 0$, 因此

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]dt \end{aligned}$$

令 $t-\tau=\lambda$, 并改变积分次序, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)e^{-st}dt \int_0^\infty f_2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F_1(s)F_2(s) \end{aligned}$$

式中

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f_1(t)], \quad F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

拉普拉斯变换的基本性质如表 1-2 所示。

表 1-2 拉普拉斯变换的基本性质

	基本运算	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	拉普拉斯变换定义	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
2	位移(时间域)	$f(t-\tau_0)1(t-\tau_0)$	$e^{-\tau_0 s}F(s), \tau_0 > 0$
3	相似性	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
4	一阶导数	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
5	n 阶导数	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6	不定积分	$\int f(t)dt$	$\frac{1}{s}[F(s) + f^{-1}(0)]$
7	定积分	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
8	函数乘以 t	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
9	函数除以 t	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(s)ds$
10	位移(s 域)	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
11	初始值	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
12	终值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
13	卷积	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$

3. 拉普拉斯反变换

求拉普拉斯反变换的简单方法是利用拉普拉斯变换表。如果某个变换式 $F(s)$ 在表中不能找到,那么可以把 $F(s)$ 展成部分分式,写成 s 的简单函数形式,再去查表。

应当指出,这种寻求拉普拉斯反变换的简单方法基于如下事实:对于任何连续的时间函数,它与其拉普拉斯变换之间保持唯一的对应关系。

一般,象函数 $F(s)$ 是复变量 s 的有理代数分式,可以表示如下:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

式中,系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 和 b_1, b_2, \cdots, b_m 都是实常数; m 和 n 为正整数,通常 $m < n$ 。

为了把 $F(s)$ 展成部分分式,需要对 $A(s)$ 进行因式分解,得到

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

式中, $s_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 称为 $F(s)$ 的极点。

1) $F(s)$ 无重极点

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - s_i}$$

式中, c_i 为待定常数,称为 $F(s)$ 在极点 s_i 处的留数,可按下式计算:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s)$$

于是,可方便求得原函数

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t}$$

上式表明,有理代数分式函数的拉普拉斯反变换,可表示为若干指数项之和。

2) $F(s)$ 有多重极点

设 $A(s) = 0$ 有 r 个重根 s_1 ,则 $F(s)$ 可写为

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{(s - s_1)^r (s - s_{r+1}) \cdots (s - s_n)} \\ &= \frac{c_r}{(s - s_1)^r} + \frac{c_{r-1}}{(s - s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_{r+1}}{s - s_{r+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n} \end{aligned}$$

式中,待定常数 c_{r+1}, \cdots, c_n 按 $F(s)$ 无重极点时的留数计算

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s), \quad i = r + 1, r + 2, \cdots, n$$

而重极点对应的待定常数 $c_r, c_{r-1}, \cdots, c_1$,则按下式确定:

$$\begin{aligned} c_r &= \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)^r F(s) \\ c_{r-1} &= \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d}{ds} [(s - s_1)^r F(s)] \\ &\vdots \\ c_{r-j} &= \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(j)}}{ds^j} [(s - s_1)^r F(s)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{r-1}} [(s-s_1)^r F(s)]$$

从而,原函数

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[\frac{c_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \dots + c_2 t + c_1 \right] e^{s_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{s_i t}$$

需要说明的是:对于分母中包含较高阶次多项式的复杂函数 $F(s)$,进行部分分式展开相当费时。在这种情况下,建议采用 MATLAB 方法,可参见《自动控制原理(第五版)》(胡寿松主编,科学出版社)中的附录 C。

1-2 z 变 换

z 变换是从拉普拉斯变换直接引申出来的一种变换方法,它实际上是采样函数拉普拉斯变换的一种变形。因此, z 变换又称为采样拉普拉斯变换,是研究线性离散系统的重要数学工具。

1. z 变换定义

设连续函数 $e(t)$ 是可拉普拉斯变换的,则

$$E(s) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$

由于 $t < 0$, 有 $e(t) = 0$, 故上式又可表示为

$$E(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$

对于 $e(t)$ 的采样信号

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT)$$

其拉普拉斯变换为

$$E^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^*(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \right]$$

由广义脉冲函数的筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) f(t) dt = f(nT)$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = e^{-snT}$$

于是采样拉普拉斯变换可表示为

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-snT}$$

令 $z = e^{sT}$, 其中 T 为采样周期, z 是复平面上定义的一个复变量,称为 z 变换算子。则采样信号 $e^*(t)$ 的 z 变换定义为

$$E(z) = E^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

记作

$$E(z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

注意,定义式中后一记号是为了书写方便,并不意味是连续信号 $e(t)$ 的 z 变换,而仍指采样信号 $e^*(t)$ 的 z 变换。

2. z 变换方法

1) 级数求和法

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} = e(0) + e(T)z^{-1} + e(2T)z^{-2} + \cdots + e(nT)z^{-n} + \cdots$$

上式是离散时间函数 $e^*(t)$ 的无穷级数表达形式。通常,对于常用函数 z 变换的级数形式,都可以写出其闭合形式。

2) 部分分式法

先求出已知连续时间函数 $e(t)$ 的拉普拉斯变换 $E(s)$,然后将有理分式函数 $E(s)$ 展成部分分式之和的形式,使每一个部分分式对应简单的时间函数,其相应的 z 变换是已知的,于是可以查 z 变换表,方便地求出 $E(s)$ 对应的 z 变换 $E(z)$ 。

常用时间函数的 z 变换表如表 1-3 所示。由表可见,这些函数的 z 变换都是 z 的有理分式,且 $E(z)$ 分母 z 多项式的最高次数与 $E(s)$ 分母 s 多项式的最高次数相等。

表 1-3 z 变换表

序号	拉普拉斯变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
1	e^{-nsT}	$\delta(t-nT)$	z^{-n}
2	1	$\delta(t)$	1
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$
7	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{T^2ze^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^2} + \frac{T^2ze^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})} + \frac{z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$