杨启宇 / 著

无穷大史话

Talk of **Infinity** in History

四川出版集团 天地出版社

无穷大史话

Talk of **Infinity** in History

杨启宇 / 著

四川出版集团 天地出版社

图书在版编目（CIP）数据
无穷大史话/杨启宇著.—成都：天地出版社，2007.11
ISBN 978-7-80726-603-7

Ⅰ.无…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.数学—普及读物
Ⅳ.01—49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 117929 号

Wu Qiong Da Shi Hua
无 穷 大 史 话

作　　者：杨启宇
责任编辑：魏宗泽
封面设计：韩建勇
内文设计：古　蓉
责任印制：李　河
出版发行：四川出版集团·天地出版社
（成都市三洞桥路 12 号　邮政编码：610031）
网　　址：http：//www.tdph.net
电子邮箱：TianDicbs@vip.163.com
印　　刷：成都蜀通印务有限责任公司
版　　次：2007 年 11 月第一版
印　　次：2007 年 11 月第一次印刷
开　　本：130mm×184mm　1/32
印　　张：4
字　　数：51 千
定　　价：15.00 元
书　　号：ISBN 978-7-80726-603-7

作者简介

杨启宇，笔名安知，籍贯四川省自贡市，1948年生。曾下乡插队多年，后毕业于成都大学数学系。当过教师、编辑，现为自由撰稿人。任中华诗词学会理事、四川省诗词学会副会长、《四川诗词》执行主编、中华诗词（BVI）研究院学术委员。

著有《无穷大史话》、《知青沉浮录》、《军阀混战演义——巴蜀风云》、《杨启宇诗钞》及《苍山龙隐录》（未出版）、《新编天龙八部一百六十首》（未出版）等。

诗作《挽彭德怀元帅》曾获首届中华诗词大赛一等奖，小说《知青沉浮录》曾获成都市第二届金芙蓉文学奖。

文学创作之外，潜心研究数学，对集合论、图论颇有兴趣。

前　言

本书用通俗流畅的文笔，讲述了人类思维对玄奥莫测的无穷大领域的探索历程。从古代哲人的困惑到康托尔通过对角线法建立起无穷大的绚丽乐园，由此派生出的问题和矛盾促成了集合论公理体系的诞生。对数学本原的分歧导致希尔伯特、罗素、克朗列克三大派的论争。哥德尔不完全定理的出现，打开了灾难之门，数学真理的确定性随之丧失！最后简介了作者从认同康托尔对角线法对无穷大使用了完成时出发，却推出了与康氏矛盾的结果，进而只用一一对应法则，给出了无穷集与其幂集的一一对应，由此揭示了现有集合论无穷大理论的矛盾，宣告了无穷大绚丽乐园的幻灭。

作为一本具知识性、可读性、趣味性的科

普读物，作者避开专业的术语和复杂的证明，采用深入浅出描述性介绍，并结合逸闻趣事的写法，力求让未受过专门数学训练的读者能理解本书的主要内容。当然，由于涉及到的是人类思维最精深的层面，阅读中是需要读者开动脑筋的！至于作者 20 年潜心研究，质疑现有无穷大理论的两篇论文，则作为附录载于书后，可供有兴趣的读者参考，并希望能得到有关专家的批评指教。

目　录

第一章 古代哲人对无穷大的思考与困惑

第1.1节 数的产生和发展

自然界少数动物对数目具有一种天生的直觉，当然，这只限于较少的数目。例如乌鸦能分辨一、二、三、四；蜾蠃蜂在巢中给每个雄卵储存五条尺蠖，给雌卵储存十条作为食物……作为万物之灵的人类，对数目当然也具有天生的直觉，但这种直觉并不比动物高明多少！据国外精密心理测试，普通人的直接视觉数觉一般不超过四，至于触觉数觉，则更小。人类学上关于原始民族的研究，也印证了这一点。澳洲的土人没人能数过七；南非布须曼族除了一、二和多之外，再没别的数字。人类从

这么有限的数目直觉，发展到今天对数学的高度的认知，真是不可思议的奇迹！

考察这一发展的历程，首先应是数和计数的产生，而这应早在仓颉造字之前，故无史可稽，我们只能从常理来推测。随着生活和生产的发展，原始人从直觉开始，有了数的概念和计数的需求。两只羊、两个野果、两柄石斧，是不同的事物，但数量关系上却都对应着数字2。从不同的具体事物个数中抽象出数字的概念，其间不知道经过了多少年代，这是人类早期理智思维的一大飞跃！与抽象出数字同步发展的，便是计数。人类双手十个手指，便是天生的最佳“便携式”计数器。直到今天，人类仍保持屈指数数的习惯。

遇到较大的数目，用完十指之后，为了不致混淆，最方便的办法，便是在地上或树上划一短划，或摆一小石块、小树叶之类做记号，这便产生了进位。

有了进位，人类计数能力长足发展，依次从：1，2，3…10，11，12，13…101，102，103…一直数下去，便产生了自然数（正整数）

的概念。面对一个苹果等分成四块的数量关系，又产生了分数（有理数）的概念。现在的小学生都知道，分数是指能写为$\frac{n}{m}$形式的数，其中 m、n 都是整数，m 不能为 0. 如：$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{6}$，$\frac{6}{9}$，等等。这里举例的三个分数看似不同，却都相等。原因是后两个的分子、分母分别有公因数 2、3. 我们取$\frac{2}{3}$作为这一类分数的代表，称为既约分数。即分子分母除 1 外没有公因数。每个分数都可以通过约分成为既约分数。

如果说有理数的发现还是自然数的一种自然直观的推广，那么无理数的发现则完全是人类抽象推理的产物。在人类古文明中，古希腊文明以其理性思辨为特征，出现了毕达哥拉斯、柏拉图、亚里士多德、欧几里得、阿基米德等著名的数学大师。他们开创性的工作，为现代数学奠定了基础。以毕达哥拉斯为代表的毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”。他们从五

光十色的世界的纷繁表象中探求其本质，认为用数与数的关系可以给出合理的解释。音乐的音阶、几何的图形、行星的运动……概莫能外，整个宇宙是以数学方式设计的！当然，毕达哥拉斯学派所谓的数，只限于正整数，他们虽然也承认并使用正整数之比，却不认为这也是数。

毕达哥拉斯学派从埃及引进了“黄金三角形”，即三边之比为 3 比 4 比 5 的三角形（这就是中国古代的勾股定理）。通过毕达哥拉斯本人进一步的研究，发现了更多的这类三角形，如三边之比为：5 比 12 比 13，7 比 24 比 25，8 比 15 比 17 等等。最后他总结出一条著名定理：任何直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方。对今天初中生都熟知的这条定理，在当时却是了不起的大发现，据说毕达哥拉斯为此特地以一头牛祭献神祇。

正当毕达哥拉斯学派沉浸于这一联系几何与算术的精美定理带来的喜悦之中时，定理的一个直接推论却带来了理想破灭的噩梦！

按这一定理，一个边长为 1 的等腰直角三

角形设其斜边长为 x，那么 $x^2=1^2+1^2=2$，由 $1^2<2=x^2<2^2$，知 $1<x<2$，故 x 不是正整数。按毕达哥拉斯学派的信条，x 一定是某两个正整数之比，也就是说 x 可写为某个既约分数$\frac{n}{m}$（m、n 为正整数，且没有 1 以外的公因数）。如果到此为止，则仍然天下太平！但古希腊人穷根究底的思辨精神却不肯止步，毕达哥拉斯的学生希帕苏斯决心要将这个 x 弄个水落石出。

由$\left(\frac{n}{m}\right)^2=2$，得 $n^2=2m^2$ 显然 n^2 是偶数，从而 n 也是偶数，不妨设 $n=2k$.

那么由 $n^2=(2k)^2=4k^2=2m^2$ 得 $2k^2=m^2$，从而 m 也是偶数，即 $m=2r$.

这与 m，n 没有 1 以外的公因数矛盾，也就是说 x 不可能是任何两个整数之比！

居然现实中有不能表示为正整数之比的量，这岂不破坏了宇宙的和谐！为了不泄露天机，毕达哥拉斯学派的人便把第一个揭示出这一灾难性真相的希帕苏斯投到大海中让其葬身

鱼腹，然后彼此发誓保守秘密。并将这类不可度量的数取名为“阿洛贡”（*Alogon*）即“不可说”，以免触怒造物主而降灾于人类。

今天的人根本无法想象，纯数学的无理数的诞生，也会令数学家以生命为代价！然而真理是掩盖不住的，此后不过一百年，古希腊人便已接受了无理数这一概念。

如果说为了解方程 $3x=2$ 引入了分数；$x+1=0$ 引入了负数；$x^2=2$ 引入了无理数；从而构造出实数体系。那么为了解方程 $x^2+1=0$ 引进了虚数，从而构造出了完备的复数体系。（所谓完备的意思是说，任何一个复系数的一元 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$. 在复数域中都有且只有 n 个根。这一完满的结果，是 19 世纪著名数学家高斯漂亮的代数基本定理的直接推论。）这一关于数系的演进，从古埃及一直延续到 19 世纪才算完成。

第1.2节　古代哲人对无穷大的思考与困惑

与对数目的思考和探索同步，人类对数数也进行了不断的思考和探索。哪怕是自然数，只要一直数下去，一个不可回避的问题便提了出来：自然数究竟有没有穷尽？因为对任意大的自然数 n，都有下一个 $n+1$，所以自然数是无穷的！那么什么是无穷？无穷有些什么性质？这一虽不实际却扰人的问题，便如鬼魅般纠缠在进行形而上的思考的古代哲人头脑中。

中国公元前4世纪的思想家墨翟，在其所著《墨经》一书的《经上》、《经说上》中，给出了对无穷的定义。

［经］穷，或有前不容尺。

［经说］穷，或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。

其中的“或”为古代域字，指区域。［经］的意思是说：有穷的区域，用尺一次接一次地去量，量到某一次之后，剩下的大小不会超过一尺，这是对有穷的定义。［经说］则补充说

明，用尺一次接一次去量某个区域，如果量到某次之后剩下的不超过一尺，就叫有穷；如果量到任何一次之后剩下的总超过一尺，则叫无穷。这里给出了人类对无穷的第一个定义。

这一定义涉及到用无穷的过程刻画无穷大量，及有穷与无穷的根本区分。用现代数学的语言表示，就是说：任意有限长度 l，用长度为 d 的尺一次接一次地去量它，一定存在自然数 n，使得量 n 次以后，剩下的不足 d，即是：$0 \leqslant l - nd < d$，也就是：$nd \leqslant l < (n+1)d$，而对无穷的量，则不存在这样的自然数 n。这实际上就是著名的阿基米德公理，而墨翟比阿基米德要早约两百年。

墨翟在《墨经》的《经下》、《经说下》中又进一步提出：

［经］非半弗斱则不动，说在端。

［经说］非：斱半进前取也，前则中无为半，犹端也。前后取则端中也。斱必半，毋与非半，不可斱也。

这里的“斱”（音捉）是分割的意思，经文的意思是说，取一物平分为两半，将前面的

一半又平分为两半，如此继续分割下去，势必分到一个不可再分的“端”。这里的端相当于几何中的点。［经说］进一步补充说明，如果去掉前后的部分而保留中间的一半，那么这个不可分割的端将留在中间。这里谈到了对有限长的无限分割必然终止于一点，这与毕达哥拉斯学派关于数是离散的点及古希腊另一哲学家德谟克利特的原子学说及近代极限理论颇有暗合之处。

后期的墨家学派却有不同的认识，《庄子·天下篇》中列举了桓团、公孙龙等辩者提出的论题二十三条，其中之一是：

一尺之棰，日取其半，万世不竭。

意思是，一尺长的木棒，第一天去掉半尺，即$\frac{1}{2}$尺，第二天去掉剩下半尺的一半，即$\frac{1}{4}$尺，如此继续，永远也没有终止。与墨翟认为止于端正好相反。

这里谈到了无穷的过程，同时认为尺是连续的量，可以永远分割而不终止于一点。与古