课程代码：0022

高等教育自学考试新版

数学教材辅导系列

高等数学（工专）习题详解

附：高等数学（工专）自学考试大纲

吴纪桃　漆　毅　编著

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

高等教育自学考试新版 数学教材辅导系列

高等数学（工本）习题详解

高等数学（工专）习题详解

线性代数（经管类）习题详解

概率论与数理统计（经管类）习题详解

ISBN 978-7-302-14456-4

9 787302 144564 >

定价：20.00元

课程代码：0022

高等教育自学考试新版 数学教材辅导系列

高等数学（工专）习题详解

附：高等数学（工专）自学考试大纲

吴纪桃 漆 毅 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是2006年新版高教自考教材《高等数学(工专)》中每章的内容提要和全部习题的详细解答,具体内容包括:函数,极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,一元函数积分学,线性代数初步.本书在编写过程中充分考虑到自考生自学时的困难,解题过程更为详尽.

本书是自考生学习高等数学(工专)课程必备的教学辅导书,也可作为普通高校学生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工专)习题详解/ 吴纪桃,漆毅编著.—北京:清华大学出版社,2007.2
(高等教育自学考试新版数学教材辅导系列)
ISBN 978-7-302-14456-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①吴… ②漆… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 164581 号

责任编辑:佟丽霞
责任校对:赵丽敏
责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175
投稿咨询:010-62772015
地 址:北京清华大学学研大厦A座
邮 编:100084
邮购热线:010-62786544
客户服务:010-62776969
印 装 者:北京市清华园胶印厂
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印张**:14 **字数**:286千字
版 次:2007年2月第1版 **印次**:2007年2月第1次印刷
印 数:1~4000
定 价:20.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:024064-01

Word from Publisher

出版说明

根据近年来我国高等教育发展的新形势以及高等教育自学考试多年来的实践经验，2002年，全国高等教育自学考试指导委员会数学专业委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了高等教育自学考试某些专业数学课程考试大纲，同时也组织各高校的专家按照新的数学考试大纲编写了“全国高等教育自学考试指定教材公共课程”系列中的新版数学教材，包括《高等数学（工专）》、《高等数学（工本）》、《线性代数（经管类）》、《概率论与数理统计（经管类）》等.

为了使广大的自考生更好地学习上述课程，编写上述新版数学教材的主编组织起来编写了“全国高等教育自学考试新版数学教材辅导系列”，包括《高等数学（工专）习题详解》、《高等数学（工本）习题详解》、《线性代数（经管类）习题详解》、《概率论与数理统计（经管类）习题详解》等，这套丛书包括上述新版数学教材中每章的内容提要和全部习题的详细解答，既可以和上述新版数学教材配合起来使用，也可以作为单独的辅导书来使用.这套丛书的作者都是在各个高校从教多年的数学教师，有从事高教自考助学的丰富经验.所以，无论在新教材还是在与之配套的习题解答中，作者都能很准确地把握新大纲中考核知识点、难度、能力层次等项要求，并能针对广大自考生自学中的难点与困惑作出详细的注释和解答.

我们相信，这套系列丛书的推出将有利于指导广大自考生的自学活动，帮助他们走上自学成才的成功之路.

清华大学出版社

2006年10月

PERFACE

前言

2002年全国高等教育自学考试指导委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了工科类专业专科的自考课程“高等数学（工专）”自学考试大纲.与旧大纲相比，新大纲中对于微积分部分，只要求一元函数微积分的内容而删去了多元函数微积分的内容，增加了线性代数初步的内容，使得教材内容更能适合工专这一学历层次的要求，并且与“高等数学（工本）”的教学内容相衔接，体现了联系与差别，真正使其成为更高一级学历层次（工本）教学的先修课，这也是此次大纲修订的一项重要改革.

2006年根据新版考试大纲主编的教材《高等数学（工专）》（吴纪桃，漆毅主编）已正式出版，为了给自考生自学此门课程提供帮助和指导，笔者编写了本书.

本书的编者都是从教多年的高校教师，并有从事高教自考助学的丰富经验.在本书的编写过程中，我们对教学的难点写得尽量详细，使得课堂教学的细微之处也能在本书中得以体现，使得本书成为教材的补充和细化，真正起到供广大自学考试考生参考的作用.

在使用此书时希望读者注意以下几个方面：

（1）教材中的习题应先由读者自行独立解答，然后再对照此书中的解答，找出其中的差异.

（2）读者在学习之初要熟练掌握基本初等函数的定义域、值域以及它们的图像，这是研究其他函数的基础.

（3）读者在做习题中的计算题时，不仅会计算，而且要算得十分熟练.本书中介绍了一些计算上的技巧和方法，读者在做习题时应注意使用这些方法.

本书的第1，2，3章由吴纪桃编写，第4，5，6章由漆毅编写.我们希望，凭借我们对广大自考生状况的深刻了解以及多年的教学经验而编写的这本习题解答能使读者学业有成.更恳请读者和同行教师能对书中的缺点和错误不吝赐教，我们将不胜感激.

编者

2007年1月

CONTENTS

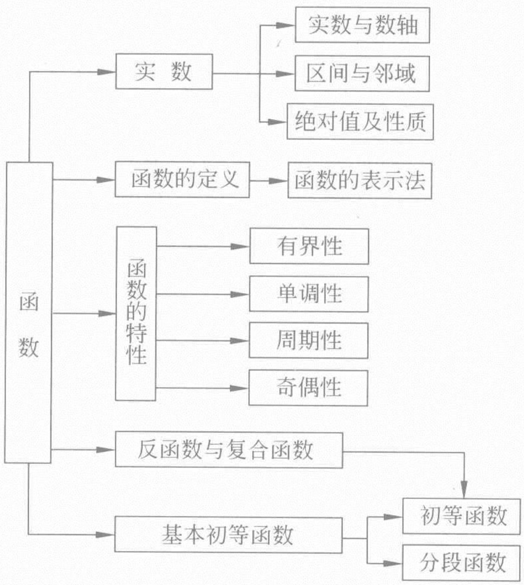
目录

Chapter 1

第1章

函　数

本章知识结构图



内容提要

1. 函数的概念

(1) 函数的定义：设 x, y 是两个变量，x 的变化范围是实数集 D. 如果对于任何的 $x \in D$，按照一定的法则都有唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$，称 D 是函数的定义域，称 x 是自变量，y 为因变量.

称 y 的取值所成的数集为函数的值域，记为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

(2) 函数的表示法：常用的函数表示法有三种，即公式法（解析法）、图像法和表格法.

2. 函数的基本特性

(1) 有界性：设函数 $f(x)$ 在数集 X 内有定义. 若存在正数 M，使得对任何 $x \in X$，都有

$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 内有界.

有界性的另一种等价的定义是：设函数 $f(x)$ 在数集 X 内有定义. 若存在常数 $m\leqslant M$，使得对任何 $x\in X$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 内有界. 这里 m 称为 $f(x)$ 的一个下界，M 为 $f(x)$ 的一个上界.

(2) 单调性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对于任何的 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加；若对于上述 x_1,x_2，都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

单调增加函数的图像是一条随着 x 增加而上升的曲线；单调减少函数的图像是一条随着 x 增加而下降的曲线.

函数的单调性一般与区间有关.

(3) 奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的. 若对于任何 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，而奇函数的图像则是关于原点对称的.

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$. 若存在常数 T，使得对于任何 $x\in\mathbb{R}$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，一般称满足上式的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的图像呈周期状，即在任意形如 $[x+nT,x+(n+1)T]$ 的区间上，函数的图像有相同的形状.

3. 常用函数的类型

(1) 基本初等函数：

常值函数　$y=c$；

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为实常数）；

指数函数、$y=a^x(a>0,a\neq1)$；

对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$；

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 $f(D)$. 若对于任何 $y\in f(D)$，在 D 内有唯一确定的 x 使 $f(x)=y$，则称这样形成的函数 x 为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，称 $y=f(x)$ 是直接函数.

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 在 Oxy 坐标系中的图像是重合的，而反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 在 Oxy 坐标系中的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 复合函数：设函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_u，$u=\varphi(x)$ 定义域为 D_x. 如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 $\varphi(D_x)$ 包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_u 内，即 $\varphi(D_x)\subset D_u$，那么，对于任何 $x\in D_x$，有 $u=\varphi(x)$ 与之对应，又 $u=\varphi(x)\in D_u$，又有 $y=f(u)$ 与之对应，从而对于任何 $x\in D_x$，有确

定的 y 值与之对应，即 y 是 x 的函数，称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$. 称 u 是中间变量.

(4) 初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算，并能用一个解析式(公式)表示的函数称为初等函数.

(5) 分段函数：如果 $f(x)$ 在其定义域的不同的子区间内，其对应法则有着不同的初等函数表达式，则称 $f(x)$ 为分段函数.

习题详解

习题 1.1　实数

1. 在数轴上表示出下列各点：$1,0,-\frac{1}{2},-1,-1.52$.

解　如图 1.1 所示.

2. 用区间表示下列各不等式，并将它们表示在数轴上：

(1) $-1\leqslant x\leqslant 2$；　　(2) $1.5<x<3$；

(3) $-\infty<x\leqslant -1$；　　(4) $x\geqslant 1$；

(5) $|x|<1$；　　(6) $0<|x-a|<\delta(\delta>0)$.

解　(1) $[-1,2]$. 如图 1.2 所示.

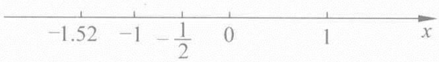


图 1.1

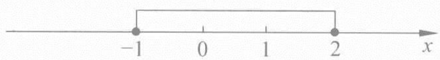


图 1.2

(2) $(1.5,3)$. 如图 1.3 所示.

(3) $(-\infty,-1]$. 如图 1.4 所示.

图 1.3

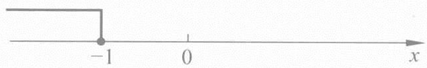


图 1.4

(4) $[1,+\infty)$. 如图 1.5 所示.

(5) $(-1,1)$. 如图 1.6 所示.

图 1.5

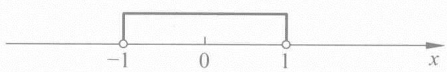


图 1.6

(6) $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$. 如图 1.7 所示.

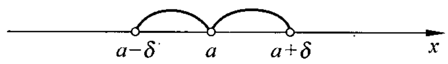


图 1.7

3. 解下列不等式：

(1) $|x+1|<2$；　　(2) $|1+2x|\leqslant 3$；

(3) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right|<1$；　　(4) $x^2-4x+3>0$；

(5) $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$；　　(6) $0<(x-2)^2\leqslant 4$.

解 (1) 原不等式可化为

$$-2<x+1<2,$$

不等式各端加 -1，有

$$-3<x<1,$$

所以该不等式的解集为 $(-3,1)$.

(2) 原不等式可化为

$$-3\leqslant 1+2x\leqslant 3.$$

不等式各端加 -1，有

$$-4\leqslant 2x\leqslant 2,$$

不等式各端乘 $\dfrac{1}{2}$，有

$$-2\leqslant x\leqslant 1,$$

所以该不等式的解集为 $[-2,1]$.

(3) 原不等式可化为

$$-1<5-\frac{1}{x}<1,\quad 且\quad x\neq 0.$$

不等式各端加 -5，有

$$-6<-\frac{1}{x}<-4,\quad 且\quad x\neq 0,$$

不等式各端乘 -1，有

$$4<\frac{1}{x}<6,\quad 且\quad x\neq 0.$$

由上面不等式可知 $x>0$，在上面不等式各端乘 x，有

$$4x<1<6x,$$

于是

$$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}.$$

所以该不等式的解集是 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4}\right)$.

(4) 原不等式可化为 $(x-1)(x-3)>0$，于是有

$$\begin{cases}x-1>0,\\x-3>0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x-1<0,\\x-3<0,\end{cases}$$

解得 $$x>3 \quad 或 \quad x<1.$$
所以该不等式的解集是$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

(5) 不等式等价于
$$\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}<0, \quad 且 \quad x\neq -2,$$
即 $$\frac{x-3}{x+2}<0, \quad 且 \quad x\neq -2.$$
所以 $$\begin{cases} x-3<0, \\ x+2>0 \end{cases} 或 \begin{cases} x-3>0, \\ x+2<0, \end{cases}$$
即 $$-2<x<3.$$
所以该不等式的解集是$(-2,3)$.

(6) 不等式等价于
$$|x-2|\leqslant 2, \quad 且 \quad x\neq 2,$$
即 $$-2\leqslant x-2\leqslant 2, \quad 且 \quad x\neq 2.$$
在上面不等式各端加2,得
$$0\leqslant x\leqslant 4, \quad 且 \quad x\neq 2.$$
所以该不等式的解集为$[0,2)\cup(2,4]$.

4. 设$a>0,b<0$,则下式中正确的是(　　).

(A) $\left|\frac{a}{b}\right|=-\frac{a}{|b|}$　　(B) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{b}$

(C) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{|b|}$　　(D) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{b}$

解 应该选择(C).

由教材1.1节中例4知,
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},$$
由题设知$a>0,b<0$,所以$|a|=a,|b|=-b$.于是
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=\frac{a}{|b|}=\frac{a}{-b}=-\frac{|a|}{b}.$$
与四个选择项对比可知(C)正确,其余均不正确,故应选择(C).

习题1.2　函数的定义及其表示法

1. 求下列函数的定义域和值域,并画出函数图像:

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$;　　(2) $y=\frac{1}{x}$;

(3) $y=\arctan|x|$;　　(4) $y=\ln(1-x)$;

(5) $y=\cos(x+1)$;　　(6) $y=|x|x$;

(7) $y=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$

解 (1) 定义域为$[0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 如图 1.8 所示.

(2) 定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 如图 1.9 所示.

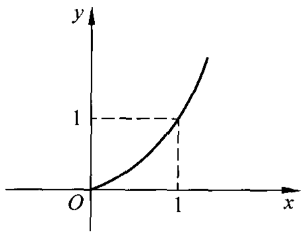


图 1.8

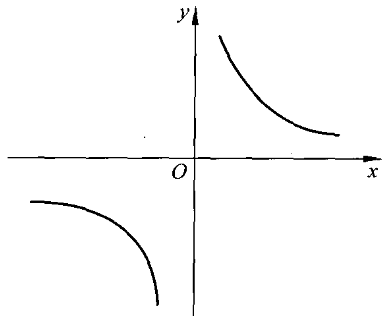


图 1.9

(3) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. 如图 1.10 所示.

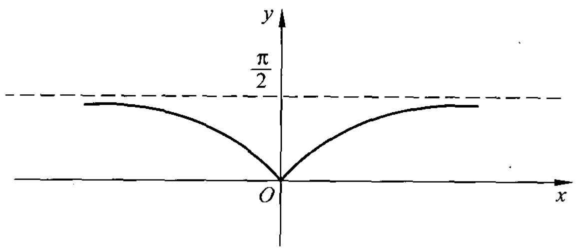


图 1.10

(4) 定义域为$1-x>0$,即$x<1$,或$(-\infty,1)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 如图 1.11 所示.

(5) 定义域为$-\infty<x+1<+\infty$,即$-\infty<x<+\infty$,或$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$. 如图 1.12 所示.

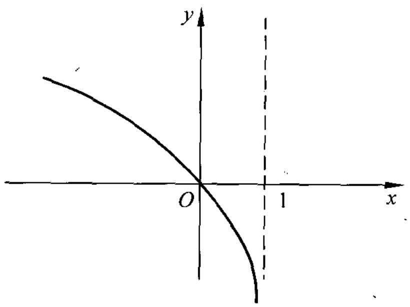


图 1.11

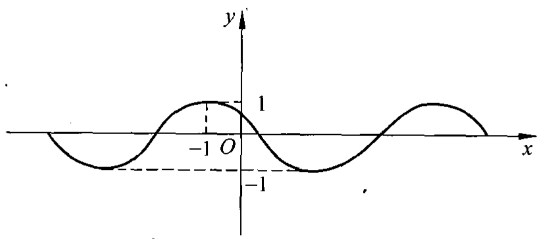


图 1.12

(6) 由于

$$y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$$

所以其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.如图 1.13 所示.

(7) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[1,+\infty)$,且 $y=0$.如图 1.14 所示.

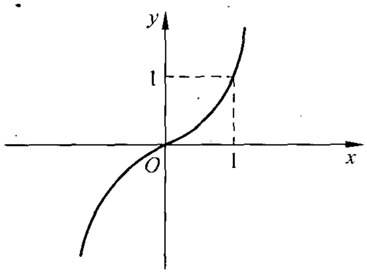


图 1.13

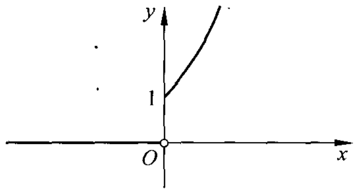


图 1.14

2. 在下列各组函数中,$f(x)$和 $g(x)$是否表示同一函数?为什么?

(1) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$; (2) $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$; (4) $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$.

解 (1) $f(x)\neq g(x)$.

由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,所以当 $x<0$ 时,$g(x)=-x$,而 $f(x)=x$,此时它们的对应法则不同,故它们不是同一函数.

(2) $f(x)\neq g(x)$.

由于 $f(x)=x$ 当 $x<0$ 时有定义,而 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 当 $x<0$ 时无定义,所以它们的定义域不同,故它们不是同一函数.

(3) $f(x)\neq g(x)$.

由于 $f(x)=\ln x^2$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)=2\ln x$ 的定义域只有$(0,+\infty)$,所以它们的定义域不同,故它们不是同一函数.

(4) $f(x)\neq g(x)$.

由于当 $x=0$ 时,$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$无定义,而当 $x=0$ 时 $f(x)=x$ 有定义,所以它们的定义域不同,故它们不是同一函数.

3. 求下列函数的函数值:

(1) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,求 $f(0),f(1),f(a),f(1-a)$;

(2) $f(x)=\sin x$,求 $f(1+h),\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2}, & x\geqslant 1,\\ 1, & x<1,\end{cases}$ 求 $f(-1),f(1),f(0),f(3)$;

(4) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant 1,\\ x^2+1, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(0),f(1),f(1.5),f(1+k)$.

解 (1) $f(0)=\sqrt{1+0^2}=1$.

$f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$.

$f(a)=\sqrt{1+a^2}$.

$f(1-a)=\sqrt{1+(1-a)^2}=\sqrt{2-2a+a^2}$.

(2) $f(1+h)=\sin(1+h)$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sin(1+h)-\sin 1}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h+2}{2}}{h}.$$

(3) $f(-1)=1$.

$f(1)=\frac{1^2-1}{2}=0$.

$f(0)=1$.

$f(3)=\frac{3^2-1}{2}=4$.

(4) $f(0)=1-2\times 0=1$.

$f(1)=1-2\times 1=-1$.

$f(1.5)=(1.5)^2+1=3.25$.

$$f(1+k)=\begin{cases}1-2(1+k), & |1+k|\leqslant 1,\\ (1+k)^2+1, & |1+k|>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-1-2k, & -2\leqslant k\leqslant 0,\\ 2+2k+k^2, & k<-2 \text{ 或 } k>0.\end{cases}$$

4. 某市居民在购房时，当面积不超过 120 m^2 时，按总房价的 1.5%向政府交税，当面积超过 120 m^2 时，除 120 m^2 要执行前述的税收政策外，超过 120 m^2 的部分还要按超过部分的房价的 3%向政府交税. 当房屋单价是 l 元/m^2 时，试建立购房总价 y 与房屋面积 x 之间的函数关系.

解 按题意，若 $x\leqslant 120$ 时，购房款是

$$lx\text{(元)},$$

需交的税款是

$$lx\times 1.5\%\text{(元)},$$

购房总价是

$$y=lx+lx\times 1.5\%;$$

若 $x>120$，购房款是

$$lx\text{(元)},$$

120 m^2 需交税款是

$$120l\times 1.5\%\text{(元)},$$