

通俗数学文化丛书

1

数的家园

赵焕光^二著



科学出版社

www.sciencep.com

通俗数学文化丛书 (1)

数的家园

赵焕光 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍数系(自然数→整数→有理数→实数→复数→四元数→超穷数)的基本理论及数系在现实生活中的应用,探讨数系与人文(包括中国传统文化)的联系,追问数系诞生的历史源头,包括数字解读字的意义,认识数的前楼梯、自然数与整数、有理数与无理数、复数与四元数、无穷与超穷数等内容。

本书适合大学在读本科生、数学教育硕士研究生、中学数学教师、高校相关专业的数学教师阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数的家园/赵焕光著. —北京:科学出版社, 2008

(通俗数学文化丛书)

ISBN 978-7-03-021294-8

I. 数… II. 赵… III. 数系-普及读物 IV. 0143-49

中国版本图书馆 CIP 数据 (2008) 第 031068 号

责任编辑:张 扬 / 责任校对:陈玉凤

责任印制:赵德静 / 封面设计:黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 5 月第一次印刷 印张: 24 1/4

印数: 1—3 000 字数: 445 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈长虹〉)

《通俗数学文化丛书》编委会

顾 问：张奠宙 陆征一

主 编：赵焕光

副主编：林长胜 方均斌

编 委：闻仲良 应裕林 黄忠裕

黄友初 徐彦辉 谭金芝

温红蕾

《通俗数学文化丛书》序

在数学教学过程中，数学内容是主导因素，内容决定形式。数学教学设计的优劣，在乎数学内容的取舍、数学本质的呈现、数学价值的探究。至于采用怎样的教学方法，毕竟要服从内容的需要，好比吃饭，吃什么永远比怎么吃更重要。如果一味颂扬刀叉吃饭如何文明，鄙薄用筷子吃饭又如何落后，却不问饮食的营养和口味，大概是没有人会同意的。可惜的是，时下流行的是教学理念决定一切，教学方法成了决定性因素。于是乎，教师进修不再学习数学，更不研究数学，只在多媒体运用、师生对话、学生活动、合作讨论等方面下工夫，这是把马车放在马的前面，弄颠倒了。

鉴于此，数学教育的前辈告诫我们：要给学生一杯水，教师得有一桶水。数学教师得有广阔的数学视野、坚实的数学功底、深邃的数学思考，才能在教学中游刃有余，举手投足都能体现数学的价值，给人真善美的享受，潜移默化地影响学生。不然的话，你凭什么在教学中起主导作用呢？

不久前，赵焕光教授把《数的家园》等6本书的电子稿件作为一套《通俗数学文化丛书》，发到我的电子信箱里。浏览之后，觉得很有特点。因此，我想如果中小学的数学老师们能够读一下，当会给他们必须储备的那“一桶水”增加分量。

我欣赏整套丛书，是因为它有浓厚的人文主义品位。长期以来，数学受绝对主义数学哲学的影响，只认公理化的抽象结

构，摒弃人文主义的思考，以及与人类社会文化的深刻联系。一种极端的思想是，数学最好没有自然语言，能够全是符号公式的数学才是上品。其实，数学是人做出来的，数学家的思想行为必然打上社会文化的烙印，具备当时当地的人文气息。例如，古希腊的奴隶主“民主政体”，虽然是少数人的民主，但是少数人之间的“平等”要求用说理方法，以争取别人的支持，这就孕育了演绎推理的数学体系。另外，中国皇权政治体制，则要求知识分子为帝王的统治服务，因此产生了以田亩测量、赋税征收、徭役分配、土方计算等实用的“国家管理数学”。

该套丛书的另一特点是体现数学本质，作者把“数”、“形”、“代数”、“函数”、“概率”、“逻辑”等基本思想方法作为一个整体层层递进，抽丝剥茧地加以阐述，有很强的科学性。此外，该丛书不像先前的一些所谓“高观点”下的抽象叙述那样生涩难懂，而是把思考过程展现出来，加之配置了许多历史过程的描述，使读者觉得数学的产生与发展是很自然的事，并非天上掉下来的“林妹妹”。

数学，其实在意境上和文学相通。体会数学的意境，是一大乐趣。我曾有一短文，谈对称与对仗，附于文后。在这一点上，焕光教授等人的著作，与我的追求有某些共同之处。故因作者之请，欣然为之作序。

张奠宙

2007年深秋于华东师范大学

附 文

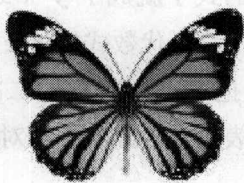
对称与对仗

——谈变化中的不变性

(张奠宙)

数学中有对称，诗词中讲对仗。乍看上去两者似乎风马牛不相及，其实它们在理念上具有鲜明的共性：在变化中保持着不变性质。

数学中说两个图形是轴对称的，是指将一个图形沿着某一条称之为对称轴的直线折叠过去，能够和另一个图形重合。这就是说，一个图形“变换”到对称轴另外一边，但是图形的形状没有变，如下图所示。



这种“变中不变”的思想，在对仗中也反映出来了。例如，让我们看唐朝王维的两句诗：

“明月松间照，清泉石上流。”

诗的上句“变换”到下句，内容从描写月亮到描写泉水，确实有变化。但是，这一变化中有许多是不变的：

“明”——“清”（都是形容词）

“月”——“泉”（都是自然景物，名词）

“松”——“石”（也是自然景物，名词）

“间”——“上”（都是介词）

“照”——“流”（都是动词）

对仗之美在于它的不变性。假如，上联的词语变到下联，含义、词性、格律全都变了，就成了白开水，还有什么味道？

世间万物都在变化之中，但只单说事物在“变”，不说明什么问题。科学的任务是要找出“变化中不变的规律”。一个民族必须与时俱进，不断创新，但是民族的传统精华不能变。京剧需要改革，可是京剧的灵魂不能变。古典诗词的内容千变万化，但是基本的格律不变。自然科学中，物理学有能量守恒、动量守恒；化学反应中有方程式的平衡，分子量的总值不能变。总之，唯有找出变化中的不变性，才有科学的、美学的价值。

数学上的对称本来只是几何学研究的对象，后来数学家又把它拓展到代数中。例如，二次式 $x^2 + y^2$ ，当把 x 变换为 y ， y 变换为 x 后，原来的式子就成了 $y^2 + x^2$ ，结果仍旧等于 $x^2 + y^2$ ，没有变化。由于这个代数式经过 x 与 y 变换后形式上与先前完全一样，所以把它称为对称的二次式。进一步说，对称，可以用“群”来表示，各式各样的对称群成为描述大自然的数学工具。

物质结构是用对称语言写成的。诺贝尔物理学奖获得者杨振宁回忆他的大学生活时说，对他后来的工作有决定影响的一个领域叫做对称原理。1957 年李政道和杨振宁获诺贝尔奖的工作——“宇称不守恒”的发现，就和对称密切相关。此外，为杨振宁赢得更高声誉的“杨振宁-米尔斯规范场”，更是研究

“规范对称”的直接结果。在“对称和物理学”一文最后，他写道：“在理解物理世界的过程中，21世纪会目睹对称概念的新方面吗？我的回答是，十分可能。”^①

对称是一个十分宽广的概念，它出现在数学教材中，也存在于日常生活中，能在文学意境中感受它，也能在建筑物、绘画艺术、日常生活用品中看到它，更存在于大自然的深刻结构中。数学和人类文明同步发展，“对称”只是纷繁数学文化中的标志之一。

^① 见《杨振宁文集》第444，703页。

序

赵焕光教授在他著的《数的家园》前言中说：“尽可能让读者在沿途欣赏到更多的迷人景观。”确实如此，在我伏案阅读该书初稿时，不时感到赏心悦目，不时又觉亮点闪现、耳目一新，甚至拍案叫好，真是美不胜收，大有“相见恨晚”之感。这真是一本难得的数学文化优秀作品。

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的。为什么不叫“形学”或其他什么学，而叫“数”学！可见“数”字当头，“数”之重要。因此，作者把《数的家园》排在《通俗数学文化丛书》的第一本，十分妥帖、恰当、相称。该书以数概念的历史发展为主线索：

自然数→整数→有理数→实数→复数→四元数→超穷数
并从主线索上发出枝枝脉络伸向各方，千姿百态，丰满动人。

脉络伸向自然数、无理数、负数、虚数……的历史源头。书稿提供的史料极其丰富，它营造了一个时间隧道，引领你逆溯而上，来到不同国家、不同时代的历史巨人那里，去聆听他们关于数是怎么说的。让你知道数是如何从远古而来，有坦途，更有急流险滩，不断演变、发展，直到我们现在看到的各种数的现代模样。

脉络伸向生活实际社会环境层面，把数学生活化、趣味化、智力化和人文化。书中提供的大量数字民俗、数字入诗、英语词汇赋值、大数字给人的惊奇……精彩纷呈。让你看到，

那些普普通通的数，竟能释放出如此多的“新”、出乎意料的“奇”和舒悦被陶冶的“美”。这“新、奇、美”的数字百花园怎能不让人兴奋不已？它足以激发中学生和业余数学爱好者的兴趣、爱好和追求。

脉络伸向数学知识自身和数学教学。人们可以从书中得到关于数的不同层面、平台上的相应知识，可以是初级的、感性的、有趣的，也可以是进一步的，最后则是极其严密完整的数的概念的现代刻画与呈现，以适应不同读者的不同要求。这种“深入浅出”的叙述方式，才是引导人们在把握数概念本质方面有一些“深入浅出”的感悟。书稿十分注意不仅给出“结果”，而且给出思维过程、思维的“脚手架”。因此，数学教学可以从中得到启迪与借鉴，有利于师范院校数学专业学生知识水平的提高，有利于中学数学老师数学水平的提高。

脉络伸向近代数学前沿。第2章的“前楼梯”和第6章的“超穷数”是该书较专业、较载重的部分，这是为进一步学习近代数学的读者而准备的。即使这样，作者对“无穷”所作的人文意境的铺垫，是何等精彩，是任何无数学专业训练的读者皆可赏阅而且有所收获的。从诗人、艺术家、哲学家、政治家，直至我们的数学家，是如何谈论、如何使用“无穷”的。这种由远而近，由人文背景而至数学内部的视觉推进，无不给人以遐想驰骋的效果。

脉络伸向数学哲学领域。该书著的每一章与每一节开始部分的论述，某些段落中的大篇幅议论，充满了哲理，作者在对数学深层次地理解、领悟后，升华到了哲学高度的认识，才能行文独到而栩栩如生，带给你抽象枯燥数学之外的思维顿觉一新的享受。

《数的家园》反映了作者高深的数学功底和对数学的人文哲学思考之非数学功力。该书集“通俗”、“趣味”、“人文意境”、“哲学思考”、“逻辑严密”于一体，具有引人入胜的可读性和随意翻阅的可选择性的特点。不同文化层次的读者，可以选择自己感兴趣又需要的部分阅览，其他部分不读也无妨，真有可谓“各取所需”。因此，从中学生到数学教育类研究生，从业余数学爱好者到中学数学老师、大学基础数学课老师，皆可成为《数的家园》的读者。

王祖樾

于杭州电子科技大学

2007年12月

(注：王祖樾先生为原浙江省数学会普委会主任，曾长期执教于浙江师范大学)

前言

我国著名数学教育家张奠宙先生一直在呼吁师范教育必须解决好“居高临下”的问题，并且他带头用实际行动反对数学教育中的“去数学化”愈演愈烈的有害倾向。张先生对数学教育事业的执着追求精神以及他对我国数学教育理论建构的贡献及其独到见地，深深地影响着我。

自1998年开始的近10年，笔者一直想为我国的数学教育事业发展做一点实事，特别是从2000年评上教授职称以来，全力以赴地在数学教育理论与实践探索中耕耘，始终坚持对数学文化素质提高及“居高临下”这两个大问题作一些小的思考。经过将近10年的磨炼与积累，整理了一点东西，近期打算陆续出版《通俗数学文化丛书》。丛书由6本书组成，书名分别为《数的家园》、《形的殿堂》、《代数天地》、《函数王国》、《随机世界》与《逻辑故乡》，它们可作为中学数学新课改的配套读物。

首先，简单介绍第一件“作品”——《数的家园》的写作思路。著名的美国数学史家M·克莱因(M. Kline, 1908~1992年)认为：“有关数的想法是沿着两条不同的溪流汇合的，其中一条是综合的溪流，起源于用木棍记数，并进行建造复杂度越来越高的数的概念，这很像用原子来建造一个复杂的分子一样；另一条是分析的溪流，数学家们用把复杂性分解为最原始的元素的方法，自然地达到了数的精髓。这两条溪流都

很重要。”数系理论建构是数学家们的核心任务之一，数系理论建构过程的本质就是数系扩张的过程。按照逻辑扩张的程序，数系扩张的过程应该是“自然数→整数→有理数→实数→复数”，继之四元数、八元数等。四元数、八元数理论是在复数理论的基础上发展起来的，复数理论建立在实数理论的基础上，实数理论的地基又是建立在有理数理论之上的，进而有理数理论又是建立在整数理论上的，然而整数又是由自然数派生出来的。于是，要解决源头的问题，最终归结到用集合论的方法给自然数下公理化定义。这项工作，由意大利数学家皮亚诺（G. Peano，1858~1932年）首开先河德国数学家冯·诺伊曼（Von Neumann，1903~1957年）等逐渐给予完善。本书的整体写作思路主要是沿着综合的溪流漫步的，尽可能让读者在沿途欣赏到更多的迷人景观，同时兼顾分析的溪流，对各种数做出本质的刻画。

本书的第1章为漫谈数字，主要探讨理解数字意义的重要性。第2章为认识数的前楼梯，这一章为从现代数学观点认识数做准备性工作，核心内容是集合论观点构建。第3章为自然数与整数，这一章值得推荐的内容是对自然数定义的解读体会。第4章为有理数与无理数，这是本书的重心所在，这一章最值得推荐的内容有两项：一项是关于有理数的实际应用；另一项是关于无理数的定义解读。第5章为复数与四元数，这一章完成两项任务：一项是解读复数的概念及意义；另一项是介绍四元数诞生的过程。第6章为无穷与超穷数，这是本书最困难的话题之一，在这一章中，我们自己认为有必要特别向大家推荐“相识无穷”这一节。

本书的写作风格与通常的数学科普著作有较大区别，与通

常的数学教育著作也有所区别。在写作的过程中，我们力求在“知识通俗”与“理论高雅”之间寻求平衡，也力求寻找重要知识点的源头。此外，在部分章节中，还列出若干趣味性思考题及未解决的某些历史名题作为附录，我们不打算（有些问题也不可能）给出参考答案，其用意是让有兴趣探索的读者去查阅更多的资料，发现更多的问题。我们的“野心”比较大，第1个愿望是让我们的师范学生（包括本科生与硕士研究生）通过阅读本书提高数学文化修养；第2个愿望是让我们的同行（包括高校、中学数学教师）在本书中能发现他们所需要的点滴东西；第3个愿望是寻缘，如果有高中生或者其他人士也能对本书发生兴趣，真乃是非常荣幸。

写书的过程是艰辛的，见到白纸黑字的印刷本子是高兴的。在高兴之余，需要讲太多太多的感恩话语。首先我最想感恩的人是我妻钱亦青，本书稿是她一个字一个字从电脑键盘上帮我敲打出来的。没有她始终如一的支持与帮助，我不可能在事业上取得点滴成绩。

接着，我要感恩我的养父赵东棉、岳父钱绍泰、岳母孙琼珠、哥哥郑贤齐等所有亲人与长辈。再接着，我要从内心感谢马大康先生。在我的工作经历中，能遇上马大康教授（现任温州大学校学术委员会主任，原温州师范学院院长）那样学识渊博、为人儒雅的好领导，实在是三生有幸。在写作本书过程中作者得到马先生的鼓励，信心倍增。在这里，我还要特别厚谢我的大学恩师王祖樾教授（原浙江省数学会普委会主任），他在本书的写作过程中给了大量的无私帮助，不仅在文字润色方面提了不少好建议，而且在学术观点上也不惜赐教。在本书完稿的过程中，有许多同仁及朋友帮了很多忙，他们分别是陆征

一、方均斌、王玮明、林长胜、黎祥军、张宗劳、张乃敏、黄忠裕、应裕林、黄友初、李中月、钱亦红等。大恩不言谢！但我还是从心底里说，诚心感谢支持我、帮助我的所有亲人与朋友！另外，我的研究生陈远兰、李树茂、张章、毛蓓蕾、岳芳珍、王娜在书稿校对中帮了很多忙，在这里也说一声谢谢！

最后，还需作一点声明。作者在本书的写作过程中参阅了大量文献，除了部分内容注明出处外，大多数内容经过笔者综合整理后就不再注明出处，我们把所有被参阅过的著作名称都列在参考文献中，我们真诚地向被参阅过的所有文献的作者致以深深的谢意！

赵焕光

2007年10月于温州黄龙

目 录

《通俗数学文化丛书》序

序

前言

第1章 漫谈数字	1
1.1 数字的意义	1
1.1.1 数字的作用	1
1.1.2 数字与民俗	4
1.1.3 数字入诗	8
附录 A 与数字有关的三个人文地理话题	12
1.2 数字与记数	14
1.2.1 印度-阿拉伯数字及十进制记数法	15
1.2.2 中国数字与中国历史上的干支记数法	18
1.2.3 二进位制数及《易经》中的八卦	21
1.2.4 罗马数字及其他进位制	33
附录 B 英语中的数词	38
1.3 大数字	42
1.3.1 科学记数法与数字分级	42
1.3.2 大数字溯源	46
1.3.3 大数字迷惑及生理学解释	48
1.3.4 大数字的模型与精彩比喻	52
1.3.5 大数字研究及应用	53