中国精算师资格考试
指导丛书

非寿险精算数学

范兴华 主编
吴传俭 周俊所 王波 副主编
邹公明 主审

EI SHOUXIAN
JINGSUAN SHUXUE

清华大学出版社

感谢世纪保联（北京）软件技术有限公司对本书的出版资助

中国精算师资格考试指导丛书

非寿险精算数学

范兴华　主　编
吴传俭　周俊所　王　波　副主编
邹公明　主　审

清华大学出版社
北　京

内容简介

非寿险精算数学是非寿险精算师资格考试认证中的一门核心基础课程，既包括基本的概率统计知识诸如损失分布的数学模型、损失分布的统计推断方法、损失分布的随机模拟、相关分析与回归分析等，也包括时间序列分析、随机过程等高等的概率统计知识。该书还涵盖了效用理论和非寿险定价及巨灾风险的数学模型等非寿险基本定价理论。

本书适合高等院校精算专业师生、广大精算师应试者学习参考，同时也适合应用数学、金融数学、金融学、保险学等专业学生阅读学习。

图书在版编目（CIP）数据

非寿险精算数学/范兴华主编. —北京：清华大学出版社，2008. 6

（中国精算师资格考试指导丛书）

ISBN 978-7-302-16837-9

Ⅰ. 非…　Ⅱ. 范…　Ⅲ. 保险—精算学—资格考核—自学参考资料　Ⅳ. F840. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 006143 号

责任编辑：徐学军
责任校对：王凤芝
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：16.75　**字　数**：329 千字
版　　次：2008 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2008 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：28.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：024922—01

丛书序言

FOREWORD

在当今日益繁荣的商品经济社会里，保险作为分散和转移风险的一种有效工具，对经济的发展起着保驾护航的作用。与其他经济类学科的发展类似，保险的发展与数学也有不解之缘。有位名人说过这样一句话："一门科学只有成功地运用数学时，才算达到完善的地步。"早期保险学的发展十分缓慢，后来正是精算学的诞生大大推动了保险业的发展。作为保险公司的"守护神"——精算，受到了保险业的监管人士、管理决策人员的格外重视。与之相应的职业——精算师，也成为了令人尊敬与仰慕的职业。所谓精算学，实际上是将数学方法运用于金融保险所形成的一套理论体系。它包括：寿险精算数学、运筹学、统计学、经济学、金融学、保险学、法律、财务管理、利息理论、人口理论、修匀理论、生存模型、风险理论、非寿险精算数学、养老金数理技术、时间序列等。这一套理论经数百年的发展已日益成熟，它的重要性、权威性与科学性，已得到保险界的公认。

随着我国保险业的蓬勃发展，对精算人才的需求十分迫切。广大学子以及热爱保险事业的同仁纷纷投身到精算师资格考试中来。近几年来，市面上陆续出现了大量的保险精算学的相关教材和资料。但并没有相关的辅导用书，本人集数位有志同仁，经数年的共同努力，全心打造了这一套中国精算师资格考试应试指导用书，这套书包括：《复利数学》、《风险理论》、《非寿险精算数学》、《寿险精算数学》、《生命表构造理论》、《寿险精算实务》、《综合经济基础》、《中国精算师资格考试全真模拟习题集》等。这套丛书中的一部分已出版，并已对参加中国精算师资格考试的考生及相关读者给予了极大的帮助。但是由于我们水平及认识的局限，书中的遗漏和错误在所难免，望各位同仁专家、学者不吝赐教并予以指正。我们将不断完善这套丛书，以此来献给那些勇敢、智慧和勤勉的精算学习者。

在结束这则序言之际，有一些重要的事情必须要让读者知晓，那就是这套书的出版得到了国内保险企业管理软件生产商世纪保联（北京）软件技术有限公司的大力资助，作者在此表示衷心的感谢。顺便告诉大家一个喜讯，那就是

该公司正在致力于国产精算软件的研发，并且精算软件的核心部分已经开发完成，这项工作将大大提高精算工作者的工作效率，将精算师从繁琐的EXCEL表格中解放出来。另外作者还要感谢亦师亦友的精算大师们，譬如李秀芳教授、谢志刚教授、李晓林教授等，他们的鼓励、智慧及理念给作者完成这套丛书以莫大的帮助，在此表示衷心感谢。还有这套书的编审主任徐学军先生，他的精明与智慧是一样的出色。

范兴华

2008年4月于北京

前　言

PREFACE

“非寿险精算数学”是非寿险精算师资格考试认证中的一门核心基础课，这门课程可以决定一个精算师的职业素养与发展潜力，决定一个精算师是否可以游刃有余地处理实务中的精算问题。因此这门课的地位就像是高楼大厦的基础，它能决定大厦的高度。其实，即便是在寿险精算领域，这门课程也同样可以开拓寿险精算师的思路，从这门课的有关理论中获益匪浅。说到这儿，我想聪明的不畏艰难险阻的精算考生应该怎么对待这门课了。

或许有些读者想知道这本书的来由。这本书的编写与中国非寿险精算师考试用书的编写是同步的，当时华东师范大学的韩天雄教授主编中国非寿险精算师考试用书《非寿险精算数学》一书，他邀请我给此书编写习题。笔者在为这本书编写习题的同时，就顺势做成了一本辅导书，精算师王波博士为此做了大量的工作，还有一批精算师为这本书的出版付出过艰辛努力，他们分别是左东、唐迎凌、顾志方、陆正来、周俊所等，博士后吴传俭也给与本书的编写提出了许多建设性的指导意见，并组织了部分稿件，《保险研究》的副主编邹公明先生在编写精算辅导书方面经验丰富，对本书进行了细心审阅，并提出了许多宝贵建议。在此笔者向这些在百忙之中抽出时间为这本书的出版付出辛勤劳动的学者表示衷心的感谢。感谢世纪保联（北京）软件技术有限公司对本书的出版提供的帮助。

精算学在我们国家的发展速度非常快，随着学习者整体水平的提高，这本书的效用应该说越来越小了，尽管如此，作者还是尽了自己的最大努力，希望为中国精算事业的更加成熟，为保险业的更加稳健的又好又快发展作一点贡献。但是由于能力和水平有限，可能书中会出现这样或那样的错误和不足，请读者见谅，并批评指正。

范兴华

2008 年 4 月 16 日于北京

目 录

CONTENTS

第1章　损失分布

【内容要点】

1. 风险与损失的基本概念

(1) 风险的定义：在一定条件下，在特定的期间内，某一事件的实际结果与预期结果的差异就是风险。风险($X-EX$)是一个随机变量。

(2) 风险的特征：客观性、普遍性、社会性、不确定性、发展性。

(3) 在非寿险经营中，对风险的分类如下：

- 按照风险的性质：可以分为纯粹风险和投机风险。
- 按可保风险的要求：非投机风险；损失不能太小；非巨灾性；随机性；可统计性。
- 按照经营活动的内容：可以分为商品经营风险和资产经营风险。
- 按照风险波及的范围：可以分为基本风险和特殊风险。
- 按照风险的形态：可以分为潜在风险和意外风险。
- 按照风险发生的地点：可以分为经营内部风险和经营外部风险。

(4) 风险的度量方法(详见重难点解析)

- 最基本的方法——波动性方法。
- VaR 方法。
- 实务常用的监管方法——RBC 方法。

(5) 损失、索赔、赔款三者之间的关系如下：

- 损失，指的是保险标的在保险事故中遭到的实际损失额。
- 索赔，是保单持有人向保险公司提出的赔偿要求。不考虑道德风险要素时，索赔额基本等同于损失额。
- 赔款额，与保险标的的实际损失相关，但由于保险公司在理赔时还要考虑保险金额(赔款限额)、免赔额和承保比例等诸多因素，一般来说赔款不会超过损失额。

未加特殊说明时，不严格区分一个分布究竟是损失分布、索赔额分布还是赔款额分布。

2. 一般的随机变量的分布及其数字特征

(1) 随机变量的分布及其数字特征列表(见表 1-1)

表 1-1

	连续型随机变量 X	离散型随机变量
分布函数 $F(x)=p(X\leqslant x)$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$	$F(x)=\sum_{X_i\leqslant x}p(x_i)$
分布密度函数 / 分布列	$f(x)\geqslant 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$	$p(x_i)=P(X=x_i)\geqslant 0, i=1,2,\cdots$ $\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i)=1$
数学期望 $E(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p(x_i)$
方差 $\mathrm{Var}(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p(x_i)$
数学期望与方差的性质	$\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2$ (1) $E(kX)=kE(X)$ (2) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ (3) 若 X 与 Y 相互独立,则 $E(XY)=E(X)E(Y)$ (4) $\mathrm{Var}(kX)=k^2\mathrm{Var}(X)$ (5) $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ (6) 若 X 与 Y 相互独立,则 $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$	
变异系数	$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)}$	
k 阶原点矩	$\mu_k=E(X^k)$	
k 阶中心矩	$v_k=E[X-E(X)]^k$	
偏度(X 的三阶矩存在时)	$\beta_1=\frac{E(X-EX)^3}{[E(X-EX)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{v_3}{(v_2)^{\frac{3}{2}}}$	
峰度(X 的四阶矩存在时)	$\beta_2=\frac{E(X-EX)^4}{[E(X-EX)^2]^2}-3=\frac{v_4}{(v_2)^2}-3$	
中位数 $x_{0.5}$	$F(x_{0.5})=\int_{-\infty}^{x_{0.5}}f(x)\mathrm{d}x=0.5$	—
众数 $\mathrm{mod}(X)$	使密度函数 $f(x)$ 达到最大的值	使概率 $P(X=x)$ 达到最大的值

(2) 财务稳定性系数 K

$K=\frac{Q}{P}$,其中 Q 是赔付随机变量的标准差；P 是所收的纯保费(一般是 $E(X)$)。假如损失变量服从二项分布,K 为：

$$K=\frac{Q}{P}=a\frac{\sqrt{np(1-p)}}{anq}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}q}$$

这里 n 为独立的风险单位个数，a 为每个单位的保额，p 为损失概率，q 为纯费率。

假定保险公司有 k 类业务，整个公司度量经营风险的财务稳定性系数

$$K=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[a_i^2 n_i p_i(1-p_i)]}}{\sum_{i=1}^{n}[a_i n_i p_i]}\quad i=1,2,\cdots,k$$

k 与 q，n 成反比，与 p 成正比。其中 a_i 为第 i 类业务的风险保额。

3. 连续型随机变量与损失额的分布

非寿险精算中的损失额 X 一般用非负连续型随机变量来表现。

常见连续型分布的知识要点如下表。读者应该对下表中的分布熟练掌握。

表 1-2　常见连续型分布

		密度函数	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $x\in\mathbb{R}$		$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	关于直线 $x=\mu$ 对称 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 称为标准正态分布：$\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
对数正态分布 $X\sim\ln(\mu,\sigma^2)$ $x>0$		$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}$	$e^{(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2}-1)$	汽车保险、工程保险、火灾损失保险等
帕雷托分布 $x>0$	简单参数	$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & x>\beta\\ 0 & x\leqslant\beta\end{cases}$	$\alpha>1$ 时，存在 $E(X)=\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$	$\alpha>2$ 时，存在 $\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2}\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\right)^2$	右偏斜。尾部趋于零的速度要比对数正态分布慢得多，多用来估计特大赔付
	一般帕雷托	$f(x)=\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}$	$\alpha>1$ 时，存在 $E(X)=\frac{\beta}{\alpha-1}$	当 $\alpha>2$ 时，存在 $\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$	
	广义帕雷托	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+k)\beta^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(\beta+x)^{\alpha+k}}$	$\alpha>1$ 时，存在 $E(X)=\frac{\beta k}{\alpha-1}$	当 $\alpha>2$ 时，存在 $\mathrm{Var}(X)=\frac{(\alpha+k-1)k\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$	

续表

	密度函数	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
伽玛分布 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ $x>0$	$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}x^{\alpha-1}$ $\alpha,\beta>0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	偏度系数 $\beta_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$，变异系数 $k=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ $\alpha=1$ 时，是指数分布
对数伽玛分布 $\ln X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$	$f(x)=\frac{\beta^\alpha(\ln x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)x^{\beta+1}}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\alpha$	$\left(\frac{\beta}{\beta-2}\right)^\alpha-\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{2\alpha}$	
韦伯分布	$f(x)=c\gamma x^{\gamma-1}e^{-cx^\gamma}\ x>0$	$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c^{\frac{1}{\gamma}}}$	$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)}{c^{\frac{2}{\gamma}}}-\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c^{\frac{1}{\gamma}}}\right]^2$	$\gamma=1$ 时，是指数分布
χ^2 分布	$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}$ $x>0$	n	$2n$	$\chi^2(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$

常见分布的衍生分布在表 1-3 列出。对于这类分布，读者应该重点了解其是如何派生出来的，不必强行记忆。

表 1-3

	密度函数与分布函数	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
变换伽玛分布	$f(x)=\frac{\tau e^{-x}x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha)}$ $G(x;\alpha,\theta,\tau)=\frac{\int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau}e^{-t}t^{\alpha-1}dt}{\Gamma(\alpha)}$ 其中 $u=\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau,0<x<\infty$, $\alpha>0,\theta>0,\tau>0$	$\frac{\theta\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{\theta^2\Gamma\left(\alpha+\frac{2}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}-\left[\frac{\theta\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}\right]^2$	$\tau=1$ 时，是伽玛分布 $\tau=1,\alpha=1$ 时，是指数分布 $\alpha=1$ 时，是韦伯分布

续表

	密度函数与分布函数	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
逆变换伽玛分布	$f(x)=\dfrac{\tau e^{-u}u^{\alpha}}{x\Gamma(\alpha)}$ $G(x;\alpha,\theta,\tau)=1-\dfrac{\int_0^u e^{-t}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}{\Gamma(\alpha)}$ 其中 $u=\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\tau}$ $0<x<\infty,\alpha>0,\theta>0,\tau>0$	$\dfrac{\theta\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\theta^2\Gamma\left(\alpha-\frac{2}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}-\left[\dfrac{\theta\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\alpha)}\right]^2$	
变换贝塔分布	$f(x)=\dfrac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}\cdot\dfrac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma\alpha}\gamma}{x\left[1+\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}\right]^{\alpha+b}}$ $F(x;a,b,\gamma,\theta)=\dfrac{\Gamma(\alpha+b)\int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+b}}e^{-t}\mathrm{d}t}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}$ $0<x<\infty,a,b,\theta,\gamma>0$	$\dfrac{\theta\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(b-\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}$	$\dfrac{\theta^2\Gamma\left(\alpha+\frac{2}{\gamma}\right)\Gamma\left(b-\frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}-\left[\dfrac{\theta\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(b-\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}\right]^2$	$a=1$ 时，是 Burr 分布 $a=1,\gamma=1$ 时，帕雷托分布 $a=1,b=1$ 时，对数分布
逆高斯分布	$f(x)=\left(\dfrac{\theta}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\dfrac{\theta}{2x}\left(\dfrac{x-\mu}{\mu}\right)^2\right]$ $0<x<\infty$	μ	$\dfrac{\mu^3}{\theta}$ $\theta>0$	

4. 离散型随机变量与损失次数的分布

非寿险精算中的赔款次数 N 是个取值为非负整数的离散型随机变量。常见离散型分布的知识要点如下表。读者应该对下表中的分布熟练掌握。

表 1-4

	分布列	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots,n)$	λ	λ	常用来描述小概率发生的次数；非寿险精算数学中最常用的分布； 泊松分布具有可加性

续表

	分布列	期望 $E(X)$	方差 $\mathrm{Var}(X)$	备注
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$	np	$np(1-p)$	计算时常用两种近似方法：泊松分布近似，利用中心极限定理
几何分布	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $(0<p<1,k=1,2,\cdots,n)$ $(x=0,1,2,\cdots)$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	是伯努利试验中首次成功前，失败次数的分布
负二项分布	$P(X=k)=C_{r+k-1}^r p^r(1-p)^{k-r}$ $(r\geqslant 1,0<p<1,k=r,r+1,\cdots)$	$\frac{r\cdot(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	灾害事故和发病情形的统计问题，在风险不同质情况下赔款发生次数的分布；当 $r=1$ 时的负二项分布就是几何分布

【本章重难点解析】

这一章介绍了非寿险中风险、损失、损失额分布和损失次数分布的基本知识，这些大都是最基础的概率论知识及其应用。如果读者已经学习过概率论，那么对这一章的把握将不会十分困难。

本章的重点是精算数学的常用分布及其特征，包括损失额分布（特别是正态分布、对数正态分布、一般帕雷托分布、伽玛分布、韦伯分布和 χ^2 分布）和损失次数分布（特别是泊松分布、二项分布和负二项分布）。要求读者对以上分布掌握熟练。

本章的难点并不突出，但仍然需要注意的一些具有保险行业特色的运用。下面将具体分别加以说明。

1. 风险的度量方法

(1) 对 VaR 的补充说明

记 X 为某期间的最大损失，分布函数为 $F(x)$，其反函数为 $F^{-1}(x)$，置信水平为 c（取 95%～99%）对于在险值 VaR，满足 $P(X>\mathrm{VaR})=1-c$

即，$P(X\leqslant\mathrm{VaR})=c$，$F(\mathrm{VaR})=c$

所以 $\mathrm{VaR}=F^{-1}(c)$，即 VaR 是 X 分布的 c 分位数。

(2) RBC 方法的补充说明

RBC 方法是美国保险监督官协会（NAIC）引进的实务操作方法，用于评估保险公司资本和盈余的充足性。非寿险公司的 RBC 方法有一套完整而复杂的计算公式，读者只需掌握以下两点

$$\text{最低风险资本}=\sqrt{R_1^2+R_2^2+R_3^2+R_4}$$

$$\text{风险资本(RBC)比率}=\frac{\text{总调整资本}}{\text{最低风险资本}}\times 100\%$$

其中，R_1—资产风险，R_2—信用风险，R_3—承保风险，R_4—资产负债表外风险。

总调整资本＝公司资本金－特定赔款准备金

注：R_i 一般由更具体的公式给出。如资产风险 R_1 通常由固定收益债券和短期投资等乘以规定的风险因子计算，承保风险 R_3 通常根据公司的平均赔付率和市场赔付率确定。

2. 财务稳定系数 K

【例 1.1】 某公司承保业务如表 1-5 所示，为保证保单组合的财务稳定系数 $K=0.1$，问再保险的自留额 x 应定为多少？

表 1-5

类　别	承保单位数量 n_i	单位保额 a_i	损失概率 p_i
一	6 000	5 000	2%
二	1 000	30 000	2%
三	300	100 000	2%

解　这里给出另一种做法。

根据 $K=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{a\sqrt{np(1-p)}}{anq}=\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{nq}}$，和 $K_{1+2+\cdots+n}=\dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[a_i^2 n_i p_i(1-p_i)]}}{\sum_{i=1}^{n}[a_i n_i p_i]}$

易求 $K_1=0.09$，$K_{1+2}=0.12$，$K_{1+2+3}=0.16$

因为要求的财务稳定系数 $K=0.1$，$K_1<K<K_{1+2}<K_{1+3}$

所以再保险的自留额 $30\ 000>x>5\ 000$。

即第二、第三类业务都必须分保，将第二类和第三类保单看作同一种业务，利用

$$K^*=\frac{\sqrt{Q^2+x^2np(1-p)}}{P+xnp}$$

其中，Q 为第一类业务赔付的标准差：$Q^2=5\ 000^2\times 6\ 000\times 0.02\times 0.98=2\ 940\ 000\ 000$

P 为第一类业务赔付的纯保费：$P=5\ 000\times 6\ 000\times 0.02=60\ 000$

$$0.1=\frac{\sqrt{2\ 940\ 000\ 000+x^2\times 1\ 300\times 0.02\times 0.98}}{60\ 000+x\times 1\ 300\times 0.02}$$

解得：$x=18\ 565.68$　或　$-1\ 899.01$（舍去）

自留额应该定为 19 000 元。

所以，韩天雄主编的考试教材中使用的计算方法是一种近似计算。当要求的财务稳定系数 K（本题 0.1）非常接近的一类保单的 K_1（本题 0.09）时，这种近似计算的精确度较高。

3. 对数正态分布

【例 1.2】 某保险公司承保的工程险损失额 X，已知 $\ln(X)\sim N(2,6)$。若定义保费为平均损失额加上“安全附加费用”，此“安全附加费用”是损失额标准差的 1/100。求此类保单的单位保费。

解 X 的期望由 $e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}=e^{(2+\frac{6}{2})}=148.4$

X 的方差为 $e^{(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2}-1)=e^{(2\times2+6)}(e^6-1)=8\ 864\ 084.1$

X 的标准差为 $\sqrt{8\ 864\ 084.1}=2\ 977.3$

保费为 $148.4+2\ 977.3/100=178.2$

帕雷托分布、伽玛分布(包括指数分布)也是考察的重点，更多的分析见习题解答。

4. 自留额与限额损失再保险的应用

对单位保单的损失额 X 而言，若规定免赔额为 d，未加特殊说明时，认为单位保单的赔付额为 $I_d(X)$，$I_d(X)=\begin{cases}X-d, & X>d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

单位保单的期望赔付为

$$E(I_d)=\int_d^{\infty}(x-d)f(x)\mathrm{d}x=E(X)-d+\int_0^d(d-x)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_d^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x=E(X)-\int_0^d[1-F(x)]\mathrm{d}x$$

需要注意的是：

(1) 以上的 4 种表达式都非常有用，如果在解题时能灵活运用，可以在很大程度上简化计算。

(2) 若 X 是离散型变量，则“$\int$”变成“$\sum$”，$f(x)$ 表示 X 的概率密度函数。如 $E(I_d)=\sum_{x=d}(x-d)f(x)$。

离散型的 $E(I_d)$ 还有递推式：$E(I_{d+1})=E(I_d)-[1-F(d)]$

对总损失 S 而言，自留额为 d 的限额损失再保险性质同上。但再限额损失再保险中，$I_d(S)$ 代表着再保险的纯保费。

相关习题详见习题解答中的 T14，T15，T16，T17。

5. 损失次数的分布

【例 1.3】 某类保单中，每一风险单位在一年内发生索赔的次数 X 服从参数为 0.01 的泊松分布。已知公司承保了 30 个风险单位。问在三年内这批保单不发生索赔的概率。

解 从题意可知，30 个风险单位独立同分布，根据泊松分布的可加性，这批保单在三年内发生索赔的次数 S 服从泊松分布。

参数 $\lambda=0.01\times30\times3=0.9$

所以三年内不发生索赔的次数的概率为 $P(S=0)=e^{-\lambda}=e^{-0.9}=0.4066$

二项分布、负二项分布(包括几何分布)也是考察的重点,更多的分析见习题解答。

6. 负二项分布在非同质保单中的应用

韩天雄主编的教材 1.4.3 中已证明"索赔次数 N 服从参数为 Λ 的泊松分布,若 Λ 是服从 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的随机变量,则 N 服从 $k=\alpha,p=\dfrac{\beta}{\beta+1}$ 的负二项分布。"这是一个重要的结论,不仅在实务中运用广泛,在解题中也经常遇到。相关习题详见习题解答中的 T10,T11。

7. 关于有免赔额时的赔付随机变量的说明及解释

已知某类风险单位的损失 X,其分布函数为 $F_X(x)$,密度函数为 $f_X(x)$。此类保单规定免赔额为 d。下面分别讨论两个极易混淆的变量。

(1) 显然具有免赔额 d 时的赔付额随机变量 Y 为

$$Y=\begin{cases}X-d, & X>d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由全概率法则可知 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\leqslant y)\\&=P(X-d\leqslant y\mid X>d)P(X>d)+P(0\leqslant y\mid X\leqslant d)P(X\leqslant d)\\&=P[(X-d\leqslant y)\cap(X>d)]+P(X\leqslant d)\\&=P(d<X\leqslant d+y)+P(X\leqslant d)\\&=F(d+y)-F(d)+P(X\leqslant d)\\&=F(d+y)\end{aligned}$$

再求密度函数,对上式中的 y 求导可得

$$f_Y(y)=f_X(d+y)$$

(2) 在具有免赔额 d 时保险公司实际发生赔付额随机变量若设为 Y,则 Y 为

$$Y=X-d\mid X>d$$

先求其分布函数,如下:

$y\leqslant0$ 时,显然 $F_Y(y)=0$

$y>0$ 时,显然 $X>d$

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y\mid X>d)=P(X-d\leqslant y\mid X>d)\\&=P(d<X\leqslant y+d\mid X>d)=\frac{F_X(y+d)-F_X(d)}{1-F_X(d)}\end{aligned}$$

综合得

$$F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{F_X(y+d)-F_X(d)}{1-F_X(d)}, & y>0\\ 0, & y\leqslant0\end{cases}$$

再求密度函数，对上式中 y 求导可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X(y+d)}{1-F_X(d)}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

显然(1)中的 Y 不等于(2)中的 Y，从统计的角度来看，其区别在于定义(2)中的 Y 时，样本总体缩小了。更深入的讨论见例 1.4 和习题 T14。

【例 1.4】 当此知识点中的 $X\sim U(0,100)$ 且 $d=20$ 时，求以上讨论的两种 Y 的密度函数?

解 第一种 Y 的密度函数为

$$f(y)=\left(\frac{d+y}{100}\right)'=\frac{1}{100},\quad 0<y\leqslant 80$$

$$f(y)=P(X<20)=0.2,\quad y=0$$

这显然是一个混合分布。

第二种 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{f_X(y+d)}{1-F_X(d)}=\frac{\dfrac{1}{100}}{1-\dfrac{d}{100}}=\frac{1}{100-d}$$

$$=\frac{1}{100-20}=\frac{1}{80},\quad 0\leqslant y\leqslant 80$$

注：在再保险与生存模型有关应用中，第二种随机变量 Y 大有用武之地。再保险中再保险人赔付随机变量就是第二种 Y；生存模型中人的余命随机变量 $T(0)$ 与 $T(x)$ 的关系就是上述例 1.4 中随机变量 X 与第二种随机变量 Y 的关系。$T(0)$ 与 $T(x)$ 分别代表 0 岁的人的余命随机变量与 x 岁的人的余命随机变量。

【习题解答】

1. 下列数据为一保险公司有效保单在 1999 年 7 月的所有发生赔款的金额(单位：元)

250，280，50，314，250，90，450，180，150，250，

309，2 100，206，150，146，220，300，50，220，688

计算样本均值及标准差。

解 这道题是考察对样本均值和方差的数理统计基础，

根据 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,S^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

将题中 20 个数据带入，即可解出

$$\overline{X}=332.65;\quad S=428.59$$

2. 已知 $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx=n!$ (n 为非负整数)

(a) 求证 $f(x)=e^{-x}x^r/r!\,(x\geqslant 0)$ 为一概率密度函数；