非线性脉冲微分系统

傅希林 闫宝强 刘衍胜 著

科学出版社
www.sciencep.com

非线性脉冲微分系统

傅希林　闫宝强　刘衍胜　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书详细论述了非线性脉冲微分系统的最新研究成果，主要内容包括非线性脉冲微分系统基本理论、几何理论、稳定性理论、边值问题以及非线性脉冲偏微分系统的振动理论，同时还给出了脉冲微分系统的若干应用模型.

本书可以作为高等院校数学及控制、管理、工程、医学等专业的大学生、研究生、教师及相关专业科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性脉冲微分系统/傅希林，闫宝强，刘衍胜著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021392-1

Ⅰ.非… Ⅱ.①傅… ②闫… ③刘… Ⅲ.非线性-微分-脉冲系统 Ⅳ.O172.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 034463 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张：22
印数：1—3 000 字数：423 000

定价：66.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前 言

作为一种瞬时突变现象, 脉冲现象在现代科技各领域的实际问题中普遍存在, 其数学模型往往可归结为脉冲微分系统. 最新研究表明, 脉冲微分系统来源于实践, 应用于实践, 在科技领域及工程技术中层出不穷, 有着重要的应用价值.

脉冲微分系统的研究始于 1960 年 Mil'man 和 Myshkis 的工作. 自 20 世纪 80 年代后逐渐引起微分系统学者的兴趣和关注, 特别是自 20 世纪 90 年代以来, 逐渐形成了非线性微分系统的热点研究领域, 并取得一批重要成果.

进入 21 世纪后, 作为非线性微分系统领域一个新的分支, 脉冲微分系统的研究十分活跃并取得了重要进展. 譬如, 脉冲自治系统的几何理论取得新的研究成果; 具无穷延滞的脉冲微分系统解的基本理论开始建立; 对于具依赖状态脉冲情形的研究取得重要突破; 脉冲泛函周期边值问题的研究取得可喜进展; 脉冲泛函偏微分系统的振动性取得深刻结果, 特别是关于脉冲微分系统的应用研究成果层出不穷.

本书旨在向读者阐述当前脉冲微分系统研究的主要内容、典型方法和最新成果, 其中包括作者及合作者近年的一些成果. 本书按照通常对非线性微分系统研究的核心课题划分章节和展开论述, 并自始至终突出阐述近年在 "脉冲" 与 "时滞" 共存情况下的最新研究成果. 譬如, 第 1 章重点阐述非线性脉冲微分系统的基本理论 (包括无穷延滞情形); 第 3 章重点介绍具有有界滞量、p 时滞以及无穷延滞的非线性脉冲微分系统的稳定性理论; 第 4 章研究非线性脉冲微分系统的周期边值问题解的存在性; 第 5 章阐述具有时滞的抛物型和双曲型脉冲偏微分系统的振动性; 第 2 章和第 6 章重点介绍脉冲微分系统的吸引子 (包括奇点吸引子、极限环吸引子和混沌吸引子) 的最新研究成果及应用模型.

希望本书能使更多的读者对当前非线性脉冲微分系统的理论与研究方法有一个基本的了解, 以便尽快掌握该领域的概貌. 当然限于我们的水平, 本书定会有不当之处, 敬请读者指正.

在撰写本书的过程中得到了郭柏灵院士的鼓励和支持, 我们表示由衷的感谢. 山东师范大学数学科学学院张立琴教授对该书提出宝贵意见并做了一定的工作, 在此表示深切的谢意. 本书的出版得到国家自然科学基金 (10571111)、山东省自然科学基金 (Y2005A07,Y2006A22,Y2007A10) 以及山东师范大学出版基金的资助, 在此一并致谢.

作 者

2007 年 12 月

目　录

绪　论

瞬时突变现象 (通常称为脉冲现象) 在现代科技各领域的实际问题中普遍存在, 且往往对实际问题的规律产生本质的影响. 因此, 在建立数学模型对这些实际问题进行研究时, 必须充分考虑脉冲现象的作用, 这类数学模型往往可归纳为脉冲微分系统. 脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑瞬时突变现象对状态的影响, 更深刻、更精确地反映事物的变化规律, 譬如, 对著名的产生蝴蝶效应的 Lorenz 系统考虑脉冲的影响, 经研究发现, 在不同脉冲输入时可导致 Lorenz 系统吸引子的轨道发生本质变化, 出现单圈的吸引子, 甚至是近似于周期的轨道 [2,13]. 又如著名的 Hopfield 神经网络模型, 最新研究表明, 脉冲也会对其动力学行为产生本质影响 [11,12]. 近年来, 脉冲微分系统在混沌控制、机密通信、航天技术、风险管理、信息科学、生命科学、医学、经济等领域均有重要应用 [12,14~22]. 因此, 脉冲微分系统来源于实践, 应用于实践, 在科技领域有着重要的应用价值.

鉴于脉冲微分系统在诸多科技领域实际问题的精细研究中日益显现出的深刻实际意义和应用价值, 对其研究引起了微分系统学者专家的重视与兴趣, 并逐渐形成非线性微分系统的热点研究领域. 学者们特别关注脉冲是如何对系统的状态进行影响的, 试图揭示脉冲导致系统规律出现的本质变化. 研究发现, 脉冲微分系统绝不是连续系统与离散系统的简单叠加, 而是综合了连续和离散系统的特征, 但又超出了连续和离散系统的范围, 还有许多带有根本性的问题亟待解决, 而脉冲微分系统解的不连续性也给研究带来了新的困难, 亟待寻求新的研究方法和途径. 因此, 关于脉冲微分系统的研究在理论上也极具吸引力和挑战性, 并具有重要理论意义.

作为非线性微分系统一个新的分支, 关于脉冲微分系统的研究已取得一批重要结果. Lakshmikantham 等对该领域 20 世纪 90 年代以前的基本研究成果进行了系统总结 [6], 其特点是所考虑的系统只含脉冲而不含时滞; 本书对 20 世纪 90 年代至 21 世纪初的若干重要研究成果进行了系统阐述, 其特点是着重阐述不含时滞的脉冲微分系统的几何理论、稳定性理论、边值问题、脉冲偏微分系统的振动理论. 值得指出的是, 对运动复杂情况的研究尚处于初始阶段, 而关于“脉冲”与“时滞”共存情况下的研究也只是取得了初步成果 [8~11], 因而本书主要侧重于对具有有界滞量脉冲时滞微分系统的基本研究成果的介绍. 近年关于脉冲微分系统的研究十分活跃, 并取得了重要进展. 譬如, 脉冲自治系统的几何理论又取得新的研究成果, 具无穷延滞的脉冲微分系统解的性质的研究取得了实质进展, 对于具依赖状态脉冲情形的研究取得重要突破, 脉冲泛函周期边值问题的研究成果层出不穷, 脉冲泛

函偏微分系统的振动性取得深刻结果. 特别是关于脉冲微分系统的应用研究取得可喜进展, 充分反映了脉冲微分系统在现代科技领域深刻的应用背景和重要的应用价值.

下面给出脉冲微分系统的一般定义.

定义 1 (脉冲微分系统) (i) 考虑微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \tag{1}$$

这里 $f: R^+ \times \Omega \to R^n$, $\Omega \subseteq R^n$ 是开集, R^n 是 n 维空间, $R^+ = [0,+\infty)$ 和

(ii) 集合 $M(t)$, $N(t) \subseteq \Omega$, $\forall t \in R^+$, 及

(iii) 算子 $A(t): M(t) \to N(t)$, $\forall t \in R^+$.

设 $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (1) 满足 $x(t_0) = x_0$ 的解, 并且具有下列特点: 点 $P_t = (t,x(t))$ 开始于 (t_0,x_0), 沿弧线 $\{(t,x): t \geqslant t > t_0, x = x(t)\}$ 运动直到点 $t_1 > t_0$, 在 t_1 处遇到集合 $M(t)$. 在 $t = t_1$ 处, $A(t)$ 将 $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ 变成 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, 这里 $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. 而 P_t 沿着系统 (1) 的解 $x(t) = x(t,t_1,x_1^+)$ 所代表的弧继续运动直到在 $t_2 > t_1$ 遇到 $M(t)$. 从而 $P_2(t_2,x(t_2))$ 被变成 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t)$, 这里 $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. 像前面一样, P_t 沿着系统 (1) 的解 $x(t) = x(t,t_1,x_2^+)$ 所代表的弧继续运动. 如果 P_t 系统 (1) 的解存在则一直进行下去. 我们将具有上述运动过程的 (i)~(iii) 综合起来称为脉冲微分系统, 由 P_t 所描述的弧称为积分弧, 而积分弧所代表的函数称为脉冲微分系统的解.

一个脉冲微分系统的解有三种情况: (a) 是连续函数, 这时积分弧不遇到 $M(t)$ 或在 $A(t)$ 的不动点遇到 $M(t)$; (b) 具有有限个不连续点的逐段连续函数, 这时在 $A(t)$ 的有限个非不动点上遇到 $M(t)$; (c) 具有可数个不连续点的逐段连续函数, 这时在 $A(t)$ 的可数个非不动点上遇到 $M(t)$.

P_t 遇到 $M(t)$ 时所在的时刻 t_k 称为脉冲时刻. 假设脉冲微分系统的解在所有脉冲时刻都是左连续的, 即 $x(t_k^-) = \lim\limits_{h\to 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$.

下面就 (i)~(iii) 的不同来描述不同的系统.

I. 不依赖于状态的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列面 $\{M_k | M_k = \{(t_k,x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 这里 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, 且 $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$. 设算子 $A(t)$ 仅在 t_k 处有定义, 满足

$$A(t_k): \Omega \to \Omega, \quad x \to A(t_k)x = x + I_k(x),$$

这里 $I_k: \Omega \to \Omega$. 因此, 集合 $N(t)$ 仅与 t_k 有关且 $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$. 对于上面所选择的 $M(t_k)$, $N(t_k)$ 和 $A(t_k)$, 不依赖于状态的脉冲微分系统的数学模型如下

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, k = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{2}$$

系统 (2) 也可称为固定时刻脉冲微分系统.

II. 依赖于状态的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列面 $\{S_k | S_k = \{(t,x) | t = \tau_k(x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 这里 $\tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots < \tau_k(x) < \cdots$, 且 $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k(x) = +\infty$. 设算子 $A(t)$ 满足

$$A(t) : \Omega \to \Omega, \quad x \to A(t)x = x + I_k(x),$$

这里 $I_k : \Omega \to \Omega$. 因此, 集合 $N(t) = A(t)M(t), t = \tau_k(x)$. 对于上面所选择的 $M(t)$, $N(t)$ 和 $A(t)$, 不依赖于状态的脉冲微分系统的数学模型如下

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq \tau_k(x), k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), k = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{3}$$

定义 2 (脉冲泛函微分系统) (i)$'$ 考虑泛函微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x_t), \tag{4}$$

这里 $f : R^+ \times \Omega' \to R^n$, $\Omega' \subseteq PC([-\tau, 0], R^n)$ 是开集,

$$\begin{aligned} PC([-\tau,0],R^n) = \{x : [-\tau,0] \to R^n \,|\, & x(t) \text{ 在 } [-\tau,0] \text{ 上左连续}, \\ & \text{在 } [-\tau,0] \text{ 上除至多可列个点外右连续}, \\ & \text{且在这至多可列个点上右极限存在}\}, \end{aligned}$$

τ 是有限正数或 $+\infty$, 建立适当的范数使之成为赋范线性空间;

(ii)$'$ 集合 $M(t), N(t) \subseteq \Omega$, $\forall t \in R^+$, 这里 $\Omega \subseteq R^n$ 是开集, 且 $\{x(t) | x \in \Omega', t \in [-\tau, 0]\} \subseteq \Omega\}$;

(iii)$'$ 算子 $A(t) : M(t) \to N(t)$, $\forall t \in R^+$.

按照与定义 1 同样的思想, 可以给出"脉冲泛函微分系统"和"脉冲泛函微分系统的解"的定义. 不依赖于状态的脉冲泛函微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x_t), & t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x_t), & t = t_k, k = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{5}$$

和依赖于状态的脉冲泛函微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x_t), & t \neq \tau_k(x), k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x_t), & t = \tau_k(x), k = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{6}$$

亦可类似定义.

注 1　在依赖于状态的脉冲微分系统和依赖于状态的脉冲泛函微分系统中, 系统的解可能碰到同一脉冲面 $t=\tau_k(x)$ 多于一次甚至无限多次, 造成在同一脉冲面上有规律的碰撞, 这种现象可称为**脉动现象**[6]. 当前的研究一般考虑脉冲微分系统和脉冲泛函微分系统没有脉动的情况.

注 2　在更广的情况下, 有些作者用 $I_k(t,x)$, $I_k(t,x_t)$ 分别代替 $I_k(x)$ 和 $I_k(x_t)$, 这种情况更复杂一些.

对于脉冲微分系统和脉冲泛函微分系统, 由于其不同的背景, 分别列出不同的初值条件

$$x(t_0^+)=x_0,\quad (t_0,x_0)\in R^+\times\Omega, \tag{7}$$

$$x(t_0^+)=x_0,\quad x_{t_0}=\Phi,\quad (t_0,x_0)\in R^+\times\Omega,\quad (t_0,\Phi)\in R^+\times\Omega' \tag{8}$$

和不同的边值条件

$$x(a^+)=x_0,\quad x(b)=x_0',\quad (a,x_0),\ (b,x_0')\in R^+\times\Omega', \tag{9}$$

$$x(a^+)=x_0,\ \ x_{t_0}=\Phi,\ \ x(b)=x_0',\ \ (a,x_0),(b,x_0')\in R^+\times\Omega,\ \ (t_0,\Phi)\in R^+\times\Omega'. \tag{10}$$

本书第 1 章主要研究具有固定时刻脉冲泛函微分系统的基本理论和依赖于状态脉冲泛函微分系统的基本理论, 包括解的局部存在性、饱和解的存在性、解的存在唯一性及解对初值函数的连续依赖性等, 其中脉冲泛函微分系统的连续依赖性有待于进一步完善. 第 2 章阐述非线性脉冲微分系统的几何理论的基本结果. 着重阐述具固定时刻脉冲自治系统的闭轨的存在性、奇点与分支、横截异宿轨道与混沌和任意时刻脉冲微分自治系统极限环存在的充要条件. 重点揭示脉冲对微分系统的吸引子 (包括奇点吸引子、极限环吸引子和混沌吸引子) 的重要影响, 刻画其轨线的相图的拓扑结构发生的本质变化. 第 3 章重点介绍具有界滞量、p 时滞以及无穷延滞的脉冲泛函微分系统的稳定性理论及具有依赖状态脉冲的微分系统的稳定性的新结果. 第 4 章研究脉冲泛函微分系统的边值问题解的存在性, 主要有非 Lipschitz 条件下脉冲泛函微分方程周期边值问题、一阶脉冲泛函微分方程周期边值问题、二阶脉冲泛函微分方程周期边值问题和 Banach 空间中非线性脉冲奇异微分方程边值问题. 所用方法为单调迭代技巧、上下解方法和锥上的不动点指数理论等. 第 5 章重点研究具有时滞的脉冲偏微分系统的振动性. 利用特征函数与脉冲时滞微分不等式, 分别在 Dirichlet 边界条件和 Robin 边界条件下给出了具有时滞的抛物型与双曲型脉冲偏微分系统的振动准则. 第 6 章给出了非线性脉冲微分系统的应用. 分别讨论了整合–激发电路模型、具有脉冲的捕食者–食饵模型、具有脉冲和时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络模型以及 Hopfield 神经网络模型的动力学行为, 还讨论了超吕混沌系统的脉冲控制与同步及一类新的脉冲耦合网络的同步.

参 考 文 献

[1] Bainov D D and Simeonov P S. Systems with Impulse Effect:Stability, Theory and Applications. New York:Halsted Press, 1989.

[2] 林伟. 复杂系统中的若干理论问题及其应用. 复旦大学博士学位论文, 2002.

[3] 顾凡及, 李训经, 阮炯. 动态神经元的网络模型. 生物物理学报, 1992, 8: 339~345.

[4] Mil'man V D, Myshkis A D. On the stability of motion in nonlinear mechanics. Sib.Math. J., 1960: 233~237(In Russian).

[5] Samoolenko A M, Perestyuk N A. Differential Equations with Impulse Effect. Moscov: Visca Skola, 1987.

[6] Lakshmikantham V, Bainov D D and Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.

[7] George Ballinger, Xinzhi Liu. Existence, uniqueness results for impulsive delay differential equations. Applicable Analysis, 2000, 74: 71~93.

[8] Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive functional differential equations in Banach spaces. Nonlinear Studies, 2000, 1(1): 1~17.

[9] Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive retarded functional differential equations. International Journal of Applied Mathematics, 2000, 3: 389~363.

[10] 闫宝强, 傅希林. 具有无限时滞脉冲泛函微分方程解的存在性. 中国学术期刊文摘, 1999.

[11] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京：科学出版社, 2005.

[12] Yang Z, Pei J, Xu D, Huang Y and Xu L. Global exponential stability of Hopfield neural networks with impulsive effects. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3496: 187~192.

[13] Xie W, Wen C and Li Z. Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems. Physics Letters A, 2000, 275: 67~72.

[14] Smith R J, Wahl L M. Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects. Bulletin of Mathematical Biology, 2005, 67: 783~813.

[15] Gourley S A, Rongsong Liu, Jianhong Wu. Eradicating vector-borne diseases via age-structureed culling. J.Math.Bio., 2007, 54: 309~335.

[16] Shigui Ruan and Dongmei Xiao. Stability of steady states and existence of travelling waves in a vector-disease model. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2004, 134: 991~1011.

[17] Culshaw R V, Shigui Ruan and Glenn Webb. A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay. Journal of Mathematical Biology, 2003, 46: 425~444.

[18] Gumel A B, Shigui Ruan, Troy Day, James Watmough, Fred Brauer, Driessche P V D, Dave Gabrielson, Chris Bowman, Murray Alexander, Sten Ardal, Jianhong Wu, Sahai B M. Modelling strategies for controlling SARS outbreaks. Proceedings of the Royal

Society B: Biological Sciences, 2004, 271: 2223~2232.

[19] Xuemei Li, Lihong Huang, Jianhong Wu. Further results on the stability of delayed cellular neural networks. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50: 1239~1242.

[20] Zhichun Yang, Daoyi Xu. Existence and exponential stability of periodic solution for impulsive delay differential equations and applications. Nonlinear Analysis, 2006, 64: 130~145.

[21] Zhichun Yang, Daoyi Xu. Impulsive effects on stability of Cohen-Grossberg neural networks with variable delays. Applied Mathematics and Computation, 2006, 177: 63~78.

[22] Daoyi Xu, Zhichun Yang. Impulsive delay differential inequality and stability of neural networks. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 305: 107~120.

第 1 章　非线性脉冲微分系统的基本理论

脉冲微分系统的研究始于 1960 年 Mil'man 和 Myshkis 的工作 [25]. 20 世纪 80 年代以来, 许多学者从事脉冲微分系统的研究, 对于不具有时滞的脉冲微分系统的研究工作日趋成熟 [1,2,9,20].

对于具有时滞的脉冲泛函微分系统基本理论的研究起步较晚, 主要是由于脉冲和时滞同时出现会带来困难. 例如, 设

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in[-1,0),\\ 1, & t\in[0,1],\end{cases}\quad 及\ x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \theta\in[-1,0].$$

对 $t,\,t'\in(0,1),\,t\neq t'$, 若从空间

$$PC[-1,0]=\{x:[-1,0]\to R|x(\theta)\ 在\ [-r,0]上至多有限个点不连续,\\ 而且满足在这些不连续点左连续且右极限存在\}$$

(范数定义为 $\|x\|=\sup\limits_{\theta\in[-1,0]}|x(\theta)|$, 在该范数下 $PC[-1,0]$ 是赋范线性空间) 考虑, $\|x_t-x_{t'}\|=\sup\limits_{\theta\in[-1,0]}|x(t+\theta)-x(t'+\theta)|=1$, 因此 $\lim\limits_{t\to t',t\neq t'}\|x_t-x_{t'}\|=1$. 则 x_t 在 $(0,1]$ 上处处不连续, 也就是即使 $f(t,\phi)$ 在 $[0,1]\times PC[-1,0]$ 上处处连续, $f(t,x_t)$ 也可能处处不连续, 这就给研究 $f(t,x_t)$ 的可积性带来了困难.

本章分为两节. 1.1 节主要对具有固定时刻的脉冲泛函微分系统基本理论的部分成果进行总结和研究; 1.2 节主要对依赖于状态的脉冲泛函微分系统的部分成果进行总结和研究. 相对于 1.1 节的成果, 1.2 节的内容有待于进一步完善.

1.1　具固定时刻脉冲的脉冲泛函微分系统的基本理论

1.1.1　具有限时滞的脉冲泛函微分系统的局部解和整体解

本节首先讨论脉冲时滞微分方程 (IRFDE). 一般来说, 考虑

$$\begin{cases}x'=f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t), & t\neq t_k,\\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,\\ x(t_0^+)=\omega,\\ x_{t_0}=\Phi,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

其中

$$\Phi \in PC([-\tau,0],R) = \{x, x \text{ 是 } [-\tau,0] \text{ 到 } R \text{ 的有界映射};$$
$$x(t^-) = x(t), t\in(-\tau,0]; x(t^+) \text{ 存在}, \ t\in[-\tau,0);$$
$$\text{对 } t\in(-\tau,0], \text{ 除可列个点外有 } x(t^+) = x(t)\},$$

$$L^1([-\tau,0],R) = \left\{x\text{是由}[-\tau,0]\text{到}R\text{的可测函数且}\int_{-\tau}^{0}|x(t)|\mathrm{d}t < +\infty\right\},$$

这里假设 $f \in C(R\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$, $I_k \in C(R,R), k = 1,2,\cdots$. 方程 (1.1.1) 的解表示为 $x(t,t_0,\omega,\Phi)$.

为简单起见, 考虑

$$\begin{cases} x' = f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots, \\ x(0^+) = \omega, \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 $\Phi \in PC([-\tau,0],R)$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < +\infty$, $J = (0,+\infty)$, $J' = J - \{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 其解表示为 $x(t,0,\omega,\Phi)$.

首先考虑方程

$$\begin{cases} x' = f(t,x_t), \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 $\Phi \in C([-\tau,0],R) = \{x, x\text{是}[-\tau,0]\text{到}R\text{的连续函数}\}$.

引理 1.1.1 [15]　设 $f \in C(R\times C([-\tau,0],R),R)$, 且满足 Lipschitz 条件, 则存在 $\delta > 0$, 使得方程 (1.1.3) 在 $[0,\delta]$ 上存在唯一解 $x(t,0,\Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$.

引理 1.1.2 [15]　设 $f \in C(R\times C([-\tau,0],R),R)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得方程 (1.1.3) 在 $[0,\delta]$ 上至少存在解 $x(t,0,\Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$.

引理 1.1.3 [15]　设 $f \in C(R\times C([-\tau,0],R),R)$, 则方程 (1.1.3) 存在饱和解 $x(t,0,\Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$, $t\in[0,\beta)$.

引理 1.1.4 [15]　若 $f \in C^p(R\times C([-\tau,0],R),R)$, $p \geqslant 1$, 则方程 (1.1.3) 的解 $x(t,t_0,\Phi)$ 是连续可微的.

下面介绍对于 (1.1.1) 的研究工作.

引理 1.1.5　若 $f \in C(R\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$, 则 $x \in PC([-\tau,+\infty),R)$ 是方程 (1.1.2) 满足 $x_0 = \Phi$, $x(0^+) = \omega$ 的解当且仅当 $x \in PC([-\tau,+\infty),R) \cap C^1([0,+\infty) - J',R)$ 是方程

$$\begin{aligned} x(t) = \omega &+ \int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \quad t\in(0,+\infty) \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

的解, 其中, 当 $t+s\leqslant 0$ 时, $x_t(s)=x(t+s)=\Phi(t+s)$.

证明 对任意 $x\in PC([-\tau,+\infty),R)$ 和 $x_t(s)=x(t+s), s\in[-\tau,0]$, $t\geqslant 0$, 其中当 $t+s\leqslant 0$ 时, $x(t+s)=\Phi(t+s)$. 对任意 $t_0\in(0,+\infty)$, 有

$$\lim_{t\to t_0} x_t(s)=x_{t_0}(s),\quad \text{a.e.}\quad s\in[-\tau,0].$$

则

$$\lim_{t\to t_0}\parallel x_t-x_{t_0}\parallel_1=\lim_{t\to t_0}\int_{-\tau}^{0}\parallel x(t+s)-x(t_0+s)\parallel \mathrm{d}s=0.$$

所以对任意 $x\in PC((0,+\infty),R)$, $f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t)$ 在 $J=(0,+\infty)$ 上除可数个点外连续, 则 $f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t)$ 在任意有界区间上 Lebesgue 可积.

若 $x\in PC(J,R)\cap C^1(J',R)$ 是方程 (1.1.4) 的解, 显然满足 (1.1.2) 的第二和第三式, 且在 J 上除有限个点外有 $x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t)$. 反之, 若 $x\in PC(J,R)$ 是方程 (1.1.2) 的解, 则对 $t\in(0,t_1]$, $x(t)$ 在 $(0,t_1]$ 上是一致连续的, 而且

$$x(t)=\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s,\quad t\in(0,t_1].$$

又因 $x(t_1^+)=x(t_1)+I_1(x(t_1))$ 且 $x(t)$ 在 $(t_1,t_2]$ 上一致连续,

$$x(t)=x(t_1)+I_1(x(t_1))+\int_{t_1}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s,\quad t\in(t_1,t_2].$$

类似有

$$x(t)=x(t_{n-1})+I_{n-1}(x(t_{n-1}))+\int_{t_{n-1}}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s,$$
$$t\in(t_{n-1},t_n],\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $x\in PC([-\tau,+\infty),R)\cap C^1([0,+\infty)-J',R)$ 是方程 (1.1.4) 的解. 证毕.

对 $x\in PC(J,R)$, 定义

$$(Ax)(t)=\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)),\quad t\in(0,+\infty),$$

这里 $x_t(s)=x(s+t)=\Phi(s+t)$, $s+t\leqslant 0$; $x(t-\tau_1)=\Phi(t-\tau_1)$, $t-\tau_1\leqslant 0$.

下面列出条件:

(H1) 对任意 $R>0$, $M(R)=\sup\limits_{t\in(0,+\infty),|x|\leqslant R,|y|\leqslant R,\|\phi\|\leqslant R}|f(t,x,y,\phi)|<+\infty$;

(H2) 存在 $M>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ 和 $P_k(s)\geqslant 0(k\geqslant 1)$, 使得

$$|f(t,x,y,\phi)|\leqslant M+b|x|+c|y|+d\|\phi\|,\quad \forall(t,x,y,\phi)\in R\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),$$

$$|I_k(x)| \leqslant P_k(|x|), \quad k=1,2,\cdots.$$

对于 $x,\ y \in PC(J,R)$, 定义

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n},$$

这里, $\|x-y\|_n=\sup\limits_{t\in[0,t_n]}|x(t)-y(t)|$. 易证, $PC(J,R)$ 是局部凸空间.

引理 1.1.6 设条件 (H1) 成立, 则算子 $A: PC(J,R)\to PC(J,R)$ 是全连续算子.

证明 由 (H1) 易知, 对任意有界的 $D\subseteq PC(J,R)$, $A(D)$ 是有界的. 现在令 $\{x_n\}\subseteq PC(J,R), x_0\in PC(J,R)$ 且 $x_n\to x_0, n\to+\infty$. 若当 $n\to+\infty$ 时 $d(Ax_n,Ax_0)$ 不趋于零, 则存在 $\varepsilon_0>0, k_0>0$ 和 $\{n_j\}\subseteq\{n\}$, 使得

$$\| Ax_{n_j}-Ax_0 \|_{k_0}\geqslant \varepsilon_0, \quad j=1,2,3,\cdots. \tag{1.1.5}$$

因为 $d(x_{n_j},x_0)\to 0, j\to+\infty$, 有

$$\| x_{n_j}-x_0 \|_{k_0}\to 0, \quad j\to+\infty.$$

所以对任意 $s\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\| x_{n_{j_s}}-x_{0_s} \|_1 &= \int_{-\tau}^{0}\| x_{n_j}(s+r)-x_0(s+r) \|\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant \tau \| x_{n_j}-x_0 \|_{k_0}\to 0, \quad j\to+\infty.\end{aligned}$$

因为 $I_k\in C(R,R), f\in C(J\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$, 且 $\| f(t,x,y,\psi) \|\leqslant M+b\| x \| +c\| y \|+d\| \psi \|_1$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\| I_k(x_{n_j}(t_k))-I_k(x_0(t_k)) \|\to 0, \quad k=1,2,\cdots,k_0-1, \quad j\to+\infty,$$

且

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_{k_0}}\| f(s,x_{n_j}(s),x_{n_j}(s-\tau_1),x_{n_{j_s}})\\ &\quad - f(s,x_0(s),x_0(s-\tau_1),x_{n_{0_s}}) \|\,\mathrm{d}s\to 0, \quad j\to+\infty.\end{aligned}$$

这与 (1.1.5) 矛盾. 所以 A 是有界连续的.

对有界的 $D\subseteq PC(J,R)$, 若 $x\in D$ 且 $s_1>s_2\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\| (Ax)(s_1)-(Ax)(s_2) \| \leqslant{}& \int_{s_2}^{s_1}(M+b\| x(s) \| +c\| x(s-\tau_1) \| +d\tau \| x_s \|_{PC})\mathrm{d}s\\ &+\sum_{s_2\leqslant t_k\leqslant s_1} I_k(x(t_k)).\end{aligned}$$

则对任意 $\varepsilon>0$, 可以取 $\delta>0$, 使得

$$\|(Ax)(s_1)-(Ax)(s_2)\|<\varepsilon,$$

其中 $x\in D$ 且 $|s_1-s_2|<\delta, s_1,s_2\in(0,t_1]$, 即 $(AD)(t)$ 在 $(0,t_1]$ 上同等连续. 类似可证 $(AD)(t)$ 在 $(t_i,t_{i+1}], i=1,2,\cdots$ 上同等连续, 所以 AD 在 $PC(J,R)$ 上同等连续. 证毕.

定理 1.1.1 设 $f\in C(R\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$, 且条件 (H1) 成立, 则存在 $\delta>0$, 使得方程 (1.1.2) 在 $(0,\delta]$ 上至少存在一个解 $x(t,0,\omega,\Phi)$ 满足 $x_0=\Phi$, $x(0^+)=\omega$.

证明 由引理 1.1.5 知, $f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t)$ 是可测的. 取 $R>\max\{\|\Phi\|,|\omega|\}$. 取 $\delta>0$, 使得 $|\omega|+\delta M(R)<R$. 取 $\Omega=\{x\in C([0,\delta],R)|\|x\|\leqslant R\}$. 定义

$$(Ax)(t)=\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s,\quad x\in\Omega.$$

由引理 1.1.6 的证明, 易知 A 是全连续算子, 且对任意 $x\in\Omega$,

$$\|Ax\|=\max_{t\in[0,\delta]}|\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s|<R.$$

所以, $A(\Omega)\subseteq\Omega$.

由 Schauder 定理, A 在 Ω 中至少有一个不动点 x^*. 定义

$$y(t)=\begin{cases}\Phi(t), & t\in[-\tau,0],\\ x^*(t), & t\in(0,\delta].\end{cases}$$

则 $y(t)$ 是方程 (1.1.2) 的一个解. 证毕.

定理 1.1.2 设定理 1.1.1 的条件成立, 则方程 (1.1.2) 存在饱和解 $x(t,0,\omega,\Phi)$. 设饱和存在区间 $[-\tau,\beta)$, 若 $\beta<+\infty$, 则 $\overline{\lim\limits_{t\to\beta^-}}|x(t)|=+\infty$.

证明 其证明与引理 1.1.3 一样. 不妨设 $\beta\in(t_k,t_{k+1}]$, 则在 (t_k,β) 上满足

$$x(t)=x(t_k^+)+\int_{t_k}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s,\quad t\in(t_k,\beta).$$

反证法. 设 $\overline{\lim\limits_{t\to\beta^-}}|x(t)|<+\infty$, 则存在 $R'>0$, 使得 $\|x_t\|\leqslant R'$, $t\in(t_k,\beta)$. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M(R')}$, 则当 $0<\beta-t<\delta, 0<\beta-t'<\delta$ 时, 有

$$|x(t)-x(t')|=\left|\int_{t'}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)\mathrm{d}s\right|\leqslant M(R')\delta<\varepsilon.$$