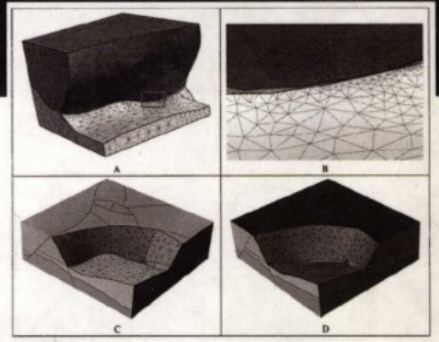
杨钦 著
飞思科技产品研发中心 监制

国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

限定Delaunay三角网格剖分技术



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

电子信息科技专著出版专项资金
cbjj.phei.com.cn

飞思出品
FECIT-Product
www.fecit.com.cn

网格剖分算法主要研究将空间物体或区域离散为简单几何单纯体集合的方法。Delaunay三角/四面体剖分是其中的重要的一种剖分技术，一直是一个悬而未决的问题。本书对二维平面和三维空间限定Delaunay三角剖分技术进行了系统全面的介绍，给出了可以在任意点、线段和平面片的限定条件下完成限定Delaunay三角剖分及网格优化的算法，并论证了算法的有效性。

读者对象：

本书可供计算机等领域的科技人员及高等学校师生参考。

上架提示　计算机科学

飞思科技产品研发中心总策划
在线技术支持：http://www.fecit.com.cn

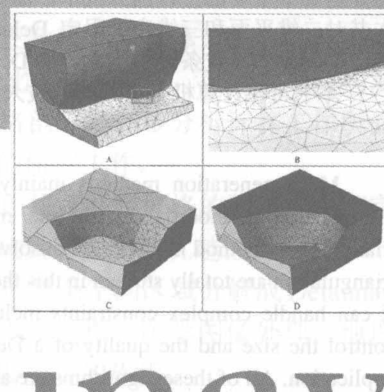
本书贴有激光防伪标志，凡没有防伪标志者，属盗版图书。

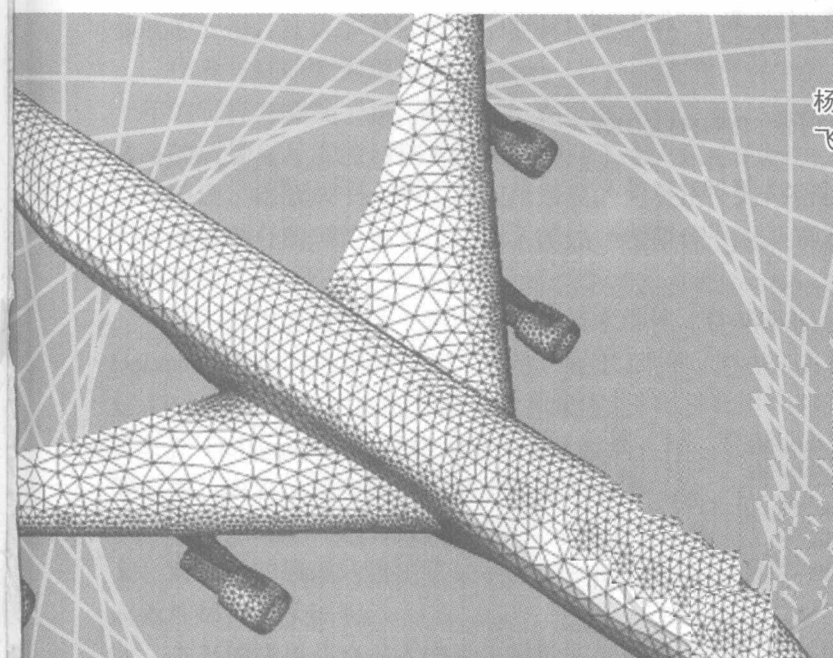
责任编辑：王
责任美编：王　嵩

ISBN 7-121-01627-3
9 787121 016271 >
ISBN 7-121-01627-3　定价：29.00元

国家科学技术学术著作出版基金
电子信息科技专著出版专项资金 资助出版

限定 Delaunay 三角网格剖分技术





杨 钦 著
飞思科技产品研发中心 监制

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

网格剖分算法主要研究将空间物体或区域离散为简单几何单纯体集合的方法。Delaunay 三角/四面体剖分是其中重要的一种剖分技术，而其中的限定 Delaunay 三角/四面体剖分一直是一个悬而未决的问题。本书对二维平面和三维空间限定 Delaunay 三角剖分技术进行了系统全面介绍，给出了可以在任意点、线段和平面片的限定条件下完成限定 Delaunay 三角剖分及网格优化的算法，并论证了算法的有效性。

本书可供计算机等领域的科技人员及高等学校师生参考。

Abstract

Mesh generation methods mainly study how to partition region into geometry simplex set. Delaunay triangulation method is one of the most important mesh generation methods. But constrained Delaunay triangulation method has been an unsolved problem for a long time. This book 2D and 3D constrained Delaunay triangulation are totally studied in this thesis. A novel algorithm of constraint Delaunay triangulation is developed. It can handle complex constraints including arbitrary points,segments and planar patches. The algorithms to control the size and the quality of a Delaunay mesh are also given in order to satisfy the requirements of the application. All of these algorithms are all proved.

This book can be used as a reference by researchers, teachers and postgraduates of computer science technology.

图书在版编目（CIP）数据

限定 Delaunay 三角网格剖分技术 / 杨钦著．—北京：电子工业出版社，2005.9

ISBN 7-121-01627-3

Ⅰ.限…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.网格－三角剖分　Ⅳ.O243②O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 087756 号

责任编辑：王　蒙

印　　刷：北京天宇星印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1092　1/16　印张：16　字数：409.6 千字

印　　次：2005 年 9 月第 1 次印刷

印　　数：1 000 册　定价：29.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：010-68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前　　言

三角网格剖分是研究如何将给定空间离散成单纯形（三角形、四面体）集合的技术。由于三角网格单元是单纯形，与四边形/六面体网格单元相比具有灵活性，可以描述结构复杂的空间，因此，在许多领域都具有广泛的应用。三角网格剖分是许多分析计算工作所必需的，这导致众多领域的研究人员都对该技术进行了大量的研究工作。

Delaunay 三角网格是维诺图的对偶，是一个空间优化结构，具有严格的数学定义和完备的基础理论，有很好的可操作性。与一般的三角网格相比具有很大的优越性。

限定 Delaunay 三角网格剖分技术研究的是如何将给定的复杂空间区域分解成 Delaunay 三角网格，在机械制造、航空航天、汽车、船舶、建筑、地质勘探、医学图像处理、地理信息系统、逆向工程等领域的科学计算和工程分析中都起着重要的作用。

由于 Delaunay 三角剖分是一个基础的空间优化结构，只要一个问题涉及到空间关系分析或空间位置搜索，就可以先对空间进行 Delaunay 三角剖分，然后，在 Delaunay 三角网格的基础上进行分析和搜索而使问题简化。因此，Delaunay 三角剖分应该成为一个基本的工具，在非常广泛的领域发挥作用。

在复杂的限定条件下进行 Delaunay 三角网格剖分非常困难，是一个多年的热点问题，许多领域的学者都发表了大量的学术论文进行研究，但一直没有很好的解决方法。目前国内外也都没有该技术的系统性学术著作，这严重制约了该技术在许多科学研究与工程分析领域的应用，在许多领域成为了瓶颈问题。

作者与其研究组对限定 Delaunay 三角网格剖分技术的理论、算法及应用方面进行了近十年的研究和开发工作，取得了一些突破性的进展，在限定 Delaunay 三角网格生成技术、网格的质量与尺度控制技术方面都得到了令人满意的解决方法。现将这些成果系统地进行归纳整理，出版成书。从工程应用需要的角度出发对网格剖分技术进行了系统的介绍，同时对网格剖分的理论技术也进行了阐述，希望该书对从事有关科学研究和工程技术的读者有所帮助。

书中的内容包括了三角网格生成技术综述、Delaunay 三角网格剖分的基本理论、加权 Delaunay 三角网格剖分的基本理论、限定 Delaunay 三角网格剖分、算法的收敛性分析、限定 Delaunay 三角网格剖分的质量和尺度控制算法、限定带权 Delaunay 三角网格剖分、限定带权 Delaunay 三角网格剖分的质量控制算法及限定 Delaunay 三角网格剖分技术的应用等方面。内容比较全面地概括了限定 Delaunay 三角网格剖分技术的各个方面。

书中系统地介绍有关基本概念、原理和方法。对涉及到的概念均给出了严格的数学定义，对所有的原理均给出了证明。书中的算法使用形式化的语言进行描述，并且，算法的有效性都得到了证明。

本书的成果是许多人辛勤工作的共同结晶。首先要感谢北京航空航天大学机械学院陈其明教授多年来对作者的研究工作给予的热情的鼓励和大量的指导工作。还要感谢北京航空航天大学计算机学院葛本修教授，葛老师始终在各方面对作者的工作给予有力支持。另外，还要感谢研究组徐永安博士、吴壮志博士、牛文杰博士、李海生博士、朱大培博士、

蔡强博士、李吉刚博士、孟宪海博士、宫法明硕士，本书的成果离不开他们的共同努力。

由于限定 Delaunay 三角剖分技术还处于发展阶段，加之作者水平有限，书中不足之处敬请读者不吝赐教。

杨　钦

2005 年 7 月

目 录

第 1 章　绪　　论

【内容摘要】本章介绍了三角剖分技术的基本概念及其应用背景，总结了 Delaunay 三角化的最新研究进展。

1.1　三角剖分的基本概念

网格剖分研究的是将给定空间离散为简单几何体集合的方法，最早源于 20 世纪 50、60 年代的有限元分析。

早期网格剖分主要是人工剖分，随着问题的规模和复杂性不断扩大，人工剖分越来越无法满足要求。20 世纪 60 年代末开始了网格自动剖分技术的研究，至今已有三十多年的研究历史。

早期网格剖分主要是矩形（二维）/正六面体（三维）网格剖分，矩形/正六面体网格的局限性大，只能适用于简单、规则的情况。为了增加灵活性，发展为四边形（二维）/六面体（三维）网格，图 1-1 是四边形/六面体网格剖分实例。

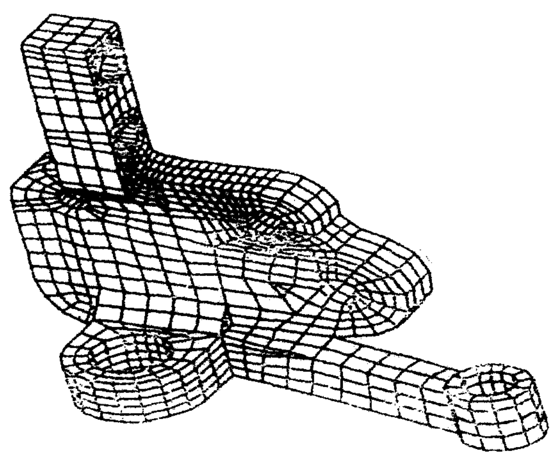


图 1-1　四边形/六面体网格实例[Rudd88]

尽管四边形/六面体网格比矩形/正六面体网格灵活，但仍然无法剖分许多复杂的形体。因此，20 世纪 70 年代末 80 年代初，开始研究以三角形（二维）/四面体（三维）为网格单元的剖分技术，即三角形/四面体网格剖分技术，由于四面体网格可以看成是三维空间的三角网格，一般统称为**三角网格剖分技术**。图 1-2 所示为三角网格剖分实例。

三角形和四面体是单纯形，可以对任意复杂的空间进行剖分，网格具有较好的灵活性。三角网格剖分技术应用十分广泛，多年来一直在有限元分析、计算流体力学、地球物理、科学计算可视化等工程应用领域发挥重要作用。近年来，三角网格剖分技术不断被应用到

计算机视觉、模式识别、图像压缩、虚拟现实等越来越多的领域。

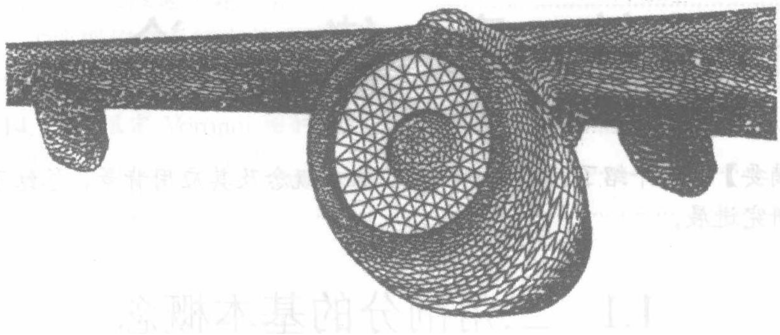


图 1-2　三角网格剖分实例[Jin93]

三角网格自动剖分技术的研究起源于 20 世纪 70 年代，主要为了满足航空、数学、地质等领域解决实际问题的需要。20 世纪 80 年代三角网格剖分在众多领域引起了广泛的关注，世界各国学者从不同领域的需求出发对三角剖分进行了深入的研究。英国 Bath 大学数学分校的 P.J. Green 和 R. Sibson 等从数学的角度对三角网格剖分进行了研究 [Gree78][Sibs78]。Bath 大学数学分校的 A. Bowyer 和澳大利亚悉尼大学 Geology and Geophyics 系的 D.F.Watson 于 1981 年都发表了文章[Bowy81][Wast81]，提出各不相同的三角网格构造方法，但最终得到的结果都是以 Dirichlet/Voronoi 图为理论基础的 Delaunay 三角网格。

Delaunay 三角网格是维诺图的对偶，由俄国数学家 B. Delaunay 在 1934 年提出。与一般的三角网格相比，Delaunay 三角网格具有较大的优势，主要表现在以下两个方面。

1．Delaunay 三角网格是一个空间优化结构

在生成点集的三角网格时，可以按不同的方式将点连成三角形或四面体。在利用网格进行分析计算时，希望网格单元尽量饱满，这样可以使计算精度提高。当把点连成 Delaunay 三角形或四面体时，最能满足这个需求——网格单元最饱满。

2．Delaunay 三角网格的可操作性较好

Delaunay 三角网格是维诺图的几何对偶图（B. Delaunay1934 年提出）。它有严格的数学定义和完备的理论基础，一般情况下具有惟一性。在对已经生成的网格进行加点、减点操作时，有可靠的理论依据和简单的方法，可以确保得到的新网格仍然是 Delaunay 三角网格，而一般的三角网格则没有这些优点。

长期以来，Delaunay 三角剖分技术的研究中存在着以下两个基本问题：

1）如何将给定的复杂空间区域分解成 Delaunay 三角网格

这个问题一直悬而未决，尤其是在三维空间中进行四面体剖分时，在限定线段、限定平面片的尖锐交点和交线附近，如何将给定的区域自动地分解成 Delaunay 三角网格，一直是研究的热点问题。

2）如何生成指定网格尺寸和网格质量的三角网格

在实际应用中，对三角网格单元是有要求的，主要希望网格具有以下两方面的性质：

- 任意的尺寸。在空间不同的位置，希望网格具有不同的尺寸。在重要的位置，希望网格尺寸小一些（网格单元的密度大一些）；在不重要的位置，网格的尺寸大一

些（网格单元的密度小一些）。

- 尽可能好的质量。在密度相同的情况下，希望网格单元的质量尽量好，具体来说，就是希望网格单元的形状尽量饱满一些（即尽量接近正三角形/四面体），避免出现扁平或瘦长的三角形/四面体。

在网格剖分质量控制和尺度控制技术中的难点和关键问题是：如何使得网格既符合Delaunay准则，又始终保证与给定的限定条件具有一致性。

如何解决这两个问题将是本书的重点内容。

1.2 三角剖分技术的应用

三角网格生成算法及网格尺寸和质量控制算法在许多领域都有重要的应用价值。

1．有限元分析等工程分析计算（CAD/CAE）

为了便于进行有限元分析，目前几乎所有的CAD系统都具有形体表面三角网格生成的功能，而比较高级的CAD系统还带有四面体生成模块。但是，目前的剖分软件对于比较复杂的几何形体生成的四面体网格来说，往往存在困难，这给工程应用带来许多困难。可以说剖分问题是CAE领域中的一个瓶颈问题。本书介绍的方法可以很好地解决这个问题，因而可以广泛地应用于CAD/CAE领域。

2．计算流体力学（CFD）

网格生成是计算流体力学中的关键问题，不论是飞机发动机的内流场还是飞机、汽车的外流场计算，都涉及到复杂形体的网格剖分。由于目前没有稳定可靠的网格剖分算法，给流体计算带来很大的困难。本书介绍的方法具有稳定性和可靠性，在计算流体力学等领域发挥广泛而重要的作用。

3．地质、地球物理

地下的地层和断层结构错综复杂，只有将其剖分成三角形/四面体网格后才能很好地进行分析计算。尽管三角剖分最初的研究目的就是满足地质领域的需求，但由于没有稳定可靠的网格剖分算法，至今还没有进入实用阶段。因此，本书方法也将广泛地应用于地球物理领域，并对其产生巨大的推动作用。

4．科学计算可视化（Visualization）

网格生成是可视化技术中的关键问题，尤其对复杂域数据场的可视化。目前许多问题本来用网格可以很好地解决，但由于多年来一直没有稳定可靠的网格生成算法，使得人们不得不去寻找其他解决方案，这样会带来许多额外的负担。本书方法可以最直接地在可视化领域得到广泛地应用。

另外，本文的成果还可被广泛地应用到计算机视觉、模式识别、图像压缩、虚拟现实等许多领域，并对这些领域的发展产生巨大的推动作用。

最后要指出的是，由于Delaunay三角剖分是一个基础的空间优化结构，应该说，只要一个问题涉及到空间关系分析或空间位置搜索，均可以先对空间进行Delaunay三角剖分，

然后，在 Delaunay 三角网格的基础上进行分析和搜索将使问题简化。因此，Delaunay 三角剖分应该成为一个基本的工具，在非常广泛的领域发挥作用。由于在实际应用中常常涉及限定的三角剖分问题，剖分算法复杂而且一直没有稳定成熟的方法，这导致了 Delaunay 三角剖分的推广应用受到限制。本成果将改变这种状况，有了一个稳定成熟的剖分算法后，限定 Delaunay 三角剖分可以成为一个被广泛使用的基本工具，可以使这项技术在更加广泛的领域内发挥作用。

1.3　三角剖分技术的研究进展

1．Delaunay 三角剖分的研究进展

三角网格自动剖分技术的研究起源于 20 世纪 70 年代，主要为了满足航空、数学、地质等领域解决实际问题的需要。在不加优化条件的情况下，同样的空间可以有若干种三角化结果，三角化中很可能存在畸形网格单元。Delaunay 三角化是 Dirichlet/Voronoi 图的几何对偶图，数学基础好，除了特殊情形，Delaunay 三角剖分具有惟一性、网格单元自动向等边三角形逼近、算法实现过程中具有较好的局部修改性等特点，这些优良特性在很大程度上满足了科学计算和工程分析的要求，因而 Delaunay 三角剖分逐步成为了研究热点。

1972 年，Lawson[Laws72]第一次提出了构造平面 Delaunay 三角化的著名算法——局部变换法（Local Transformation Algorithm），又称为换边算法（Flipping Algorithm）[Laws77]。但是，在将局部变换法向高维空间推广时碰到了困难。1989 年，Joe[Joe89]证明：在三维空间中，从点集的一个任意三角化开始，不能保证通过一系列换面优化操作得到点集的 Delaunay 三角化。1991 年，Joe 又在文献[Joe91a]中证明了将不属于点集的一个点 P 加入到点集的 Delaunay 三角化中，通过一系列换面操作，能够得到新点集的 Delaunay 三角化。这个结论就是目前构造 Delaunay 三角化的多种增量算法的理论基础。1991 年，Rajan[Raja91]研究了用局部变换法构造 d 维空间的点集的 Delaunay 三角化问题。

20 世纪 80 年代三角网格剖分在众多领域引起了广泛的关注，世界各国学者从不同领域的需求出发对三角剖分进行了深入的研究。1981 年，英国 Bath 大学数学分校的 Bowyer[Bowy81]和澳大利亚悉尼大学的 Watson[Wast81]分别给出了一种构造 d 维空间的点集的 Delaunay 三角化的增量算法，此算法的思路与局部变换法不同，后来被称为 Bowyer/Watson 算法，但最终得到的结果都是以 Dirichlet/Voronoi 图为理论基础的 Delaunay 三角网格。这种算法与局部变换法一起成为构造点集 Delaunay 三角化的两种经典算法。

2．带权 Delaunay 三角剖分的研究进展

随着研究的不断深入，人们发现在现实世界中，点集中的各个点的性质并不是完全相同的。为了反映这种不同，将点集中的每个点 P 赋予一个实数 w_P，称为点 P 的权。d 维空间中的任意一点 X 到 P 点的距离 $d_w(X,P)$ 是 $d(X,P)$ 和 w_P 的距离函数，其中 $d(X,P)$ 为 X、P 两点之间的欧式距离。根据修改后的距离得到的 Voronoi 图，称为点集的带权 Voronoi 图。当距离函数 $d_w(X,P)=d^2(X,P)-w_P$ 时，$d_w(X,P)$ 称为 Power 距离，带权 Voronoi 图称为 Power 图[Aure87a]。在本书中的带权 Voronoi 图指的就是 Power 图。Imai 等在文献[IIM85]

中给出了平面点集的带权 Voronoi 图的性质，Aurenhammer[Aure87a]于 1987 年将二维空间中的带权 Voronoi 图拓展到 d 维空间中，并研究了 d 维空间的带权 Voronoi 图和 d+1 维空间的凸包之间的关系，给出了相应的算法。

带权 Voronoi 图的对偶形式——带权 Delaunay 三角化，又称为 Regular 三角化[BS92]或 Coherent 三角化[GKZ94]，同样具有许多优良的性质，近年来吸引了许多学者进行研究，并已经十分成功地应用于分子建模[EF94][EFFL95][EFL96]。Edelsbrunner 和 Shah 在文献[ES92]中给出了采用局部变换法构造 d 维空间点集的带权 Delaunay 三角化算法。Facello 在文献[Fac93]和[Fac95] 中给出了 Edelsbrunner 和 Shah 算法的三维实现。Vigo 在文献[Vig2000]中给出了构造平面点集的带权 Delaunay 三角化的优化算法。Vigo 和 Pla 在文献[VP2000] 中探讨了 d 维空间中点集的带权 Delaunay 三角化的动态修改问题。吴壮志[吴壮志 2001]分析了点集的带权 Delaunay 三角化的性质、算法，并成功地将带权 Delaunay 三角化用于曲线的重构。

3. 限定 Delaunay 三角剖分的研究进展

初始阶段的 Delaunay 三角剖分的研究着重于点集和凸包的剖分实现算法。由于凸包的边界自动存在于 Delaunay 三角化，问题较简单。但随着科学计算和工程分析的对象越来越复杂，对具有复杂边界的区域三角剖分的研究也逐步展开，研究的难度增大了。经过多年的研究，平面任意区域的三角网格剖分已经有了令人满意的算法，但在向三维或高维推广的过程中碰到了许多困难，这在一定程度上制约了有限元、计算流体力学等领域实际问题的解决。对于复杂情况，不得不对具体问题编制具体的网格生成软件或用半人工半自动的网格生成方法。

20 世纪 80 年代后期到 20 世纪 90 年代中期，由于实际需要的驱动，研究的重点转向三维空间复杂区域的剖分。大量区域三角剖分算法不断涌现，出现了四叉树/八叉树法[Jung93] [YS83] [YS84]、单元生长法[FP92] [FP93]、网格前沿法[Lo85] [PVMZ87]、局部变换法[Laws72] [Joe89] [Joe91a]等著名的网格剖分算法。这些算法各有不同之处，四叉树/八叉树法数据查询方便，但要保证边界处网格同边界一致却很困难，且不适用于散乱数据场合的网格化。局部变换法通过换边、换面的方法实现网格的优化，算法的效率较高，但同样存在边界一致的问题。单元生长法和网格前沿法相似，单元生长法由内部一个单元开始生长，网格前沿法由边界单元开始生长，生长过程中按单元要求进行选择，但不一定满足 Delaunay 准则，若以 Delaunay 三角化为要求，则三角化过程不一定能够进行到底。

围绕上述算法中存在的问题，众多领域的学术期刊发表了大量的改进算法，三角化速度提高了很多，但边界一致性问题仍然是其中的难点。

1989 年由 Chew[Chew89]首次提出 Delaunay Refinement 算法，成为目前所普遍采用的限定 Delaunay 三角剖分算法。其基本思想是先将限定线段分成更小的线段，然后将细分单元顶点进行 Delaunay 三角剖分，希望细分后的小线段能成为某三角网格单元一个边，重复上述步骤直到细分后的限定条件都在网格单元中出现。由于细分线段首尾相连可得到原限定线段，且不会有三角网格跨越限定线段的情况，因此满足限定剖分的要求。该方法成功地用于生成均匀的二维网格。最初研究的区域剖分问题，限定条件一般是指二维情况下的内外边界线段或三维情况下的内外边界平面片，因此在二维问题中，该算法被形象地称为