



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century



全国高等农林院校“十一五”规划教材

微 积 分

第二版

王迺信 主编

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
面向 21 世纪课程教材
全国高等农林院校“十一五”规划教材

微 积 分

第 二 版

王迺信 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分/王迺信主编. —2 版. —北京: 中国农业出版社,
2007. 8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 面向 21 世
纪课程教材. 全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11723-5

I. 微… II. 王… III. 微积分-高等学校-教材 IV.
0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 113006 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

责任编辑 朱雷 段炼

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2000 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 2 版

2007 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本: 820 mm×1080 mm 1/16 印张: 18.25

字数: 318 千字

定价: 27.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本教材已纳入普通高等教育“十一五”国家级教材规划。这本教材总结了作者数十年的教学经验,吸取了作者参加教育部面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的研究成果,符合当前高等学校数学教学的统一规范,适应目前高等农林院校数学教学的实际状况和要求。

本教材内容包括:函数与极限、导函数和微分、原函数和积分、导数的应用、定积分的应用、反常积分、微分方程、二元函数微积分、级数、数学模型简介。编写时坚持启发式、深入浅出、少而精和因材施教的教学法原则,自始至终关注概念的抽象性、理论的严密性和应用的广泛性,力图渗入现代数学思想,注重培养数学思维的能力以及分析解决实际问题的能力。

本书可作为高等农林院校各专业高等数学课程的教材,也可作为其他高等院校相关课程的教学参考书。

第二版编写人员名单

主 编	王迺信		
副主编	王经民	欧阳安	刘迎洲
	边宽江	连 坡	
参 编	赵 斌	庾文利	张青娥
	冯爱芬	王 杰	吴月宁
	邓业胜	魏 宁	
主 审	孟 杰	高世好	

第一版编写人员名单

主 编 王迺信

副主编 卢恩双 边宽江 王经民

许瑞峰 刘建忠 杨淑华

参 编 史美英 刘迎洲 刘亚相

刘建军 吴养会 路新玲

张学东 周 芳

主 审 叶正麟

第二版前言

我们能够承担纳入普通高等教育“十一五”国家级规划教材的《微积分》(第二版)的编写工作,深感荣幸.在拟定编写大纲时,我们给自己提出了两条要求:一是教材必须符合当前高等学校数学教学的统一规范,适应现在高等学校数学教学的实际状况;二是教材必须还要吸收我们数学教学改革的成果,力图建立更符合高等学校数学教学规律的新的教学体系.

我们的教材没有沿用“高等数学”这个通用的名字,而是定名为“微积分”,这是为了对高等学校中几乎所有专业都必修的这门基础课,在内涵上进行更准确的界定.“高等数学”的称呼似乎比“微积分”的称呼在准确性上要差一些.这样做是否合适,还希望听取专家的意见.

数学教学,在高等学校教育中具有很高的地位,起着很重要的作用.这种地位和作用是由数学本身的三大特点决定的.

数学的第一大特点是概念的抽象性.其实,抽象是一切科学的特点.但是数学的概念抽象性更高,因此,理解起来困难更大些.微积分教学的第一个目的,就是让学生建立起准确而完整的微积分概念,为本科专业的理论学习和实践学习打好基础,也为促进相关科学步入数学化历程铺平道路.如果只停留在具体事物的描述上,没有上升为抽象的概念,那就不成其为数学.抽象概念的建立,必须依照辩证唯物主义的认识论规律进行.本教材在建立导数、微分、定积分、不定积分等概念时,力图通过具体—抽象—再具体—再抽象,如此循环往复的过程去完成.这些概念在引言中已经出现其雏形,在第一、二、三章中又有一个从具体到抽象的过程,在其后的各章中还有该过程的多次循环,这种编排可以使学生对抽象概念的理解一次又一次地达到更高一级的程度.

数学的第二大特点是理论的严密性.数学理论的严密性为整个科学树立了典范.微积分教学的第二个目的,就是让学生学会数学的思维方式,包括如何对科学建立严密的逻辑体系,如何对问题进行严密的数学思考,寻求分析问题和解决问题的普遍适用的方法.当然,理论上的严密性是相对的,从来没有绝对的理论上的严密性.本教材在追求简明的前提下,也追求一定程度的理论上的严密性.在极限理论的描述上,教材从直观的几何描述入手,罗列了精确的定量描述,又指出了一种简化的描述,它们都达到一定程度的理论上的严密性,各种不同程度的学生总可以找到适合自己的描述方式.根据我们理论研究的结果,教材在微分内涵和定积分内涵的揭示上,有一

些更具严密性的理论上的创新,也有一些不失严密性的叙述上的简化.在函数项级数的展开、微分方程通解的表达等内容的讲述上,力求简洁而又准确,以不失其严密性.

数学的第三大特点是应用的广泛性.数学的应用已经渗透到各种自然科学和人文社会科学中去.微积分教学的第三个目的,就是让学生学会把微积分的思想方法应用于各个领域,尤其是应用到各自的专业中去.目前高等学校的数学教学远没有达到这个目的.一方面,这是专业培养方案中基础课和专业课的严重脱节造成的,另一方面,这也与长期以来数学教学存在着本末倒置的倾向有关.本教材高度重视数学的应用.但是,我们深深知道,数学正是由于概念的抽象性和理论的严密性,才使数学应用具有了广泛性.因此,片面强调应用是不行的.本教材对概念的抽象性和理论的严密性给予了充分的关注,同时,本教材又专门设置了导数的应用、定积分的应用等章,在微分方程中也加进了不同学科领域里的应用实例,与其他教材比较,增加了应用的分量;从应用出发,还对微元法等重要内容的表述进行了大胆的改革,使之更具有可操作性;最后还用一章的篇幅简要介绍了几种重要的数学模型,意在逐渐培养学生建立各种数学模型的能力.

作为教材,一定要既便于教,也便于学.因此,我们从启发式、深入浅出、少而精和因材施教的教学法原则出发,进行了一些尝试.在例题的选取上,我们力图选取有启发性的例题,希望达到举一反三的效果,例如在讲自然界事物运动中的导数时所举的例子.在方法的介绍中,适当引入兄弟院校有启发性的研究成果,例如引入解常系数线性微分方程求解的公式法简介等.在关键内容的讲解上,我们尽量选择既准确又简单的讲解方法,力图揭示数学表达冰冷美丽背后的火热思考,例如极限的讲解和微元法的讲解.在内容的编排上,我们抓住重点,简化甚至删去一些次要内容,例如降低了极限运算和积分运算的要求.在揭示概念的内涵时,我们既重视抽象的描述,又尽量照顾各种不同专业的需求,例如同时引入变化率、增长率、弹性以及相关变化率等.

古人云:取法乎上,仅得乎中.我们深知,数学教学改革的任务是很艰巨的.有些我们认识到了,但自己还做不到;有些我们准备改,但还有很多客观因素束缚我们的手脚;有些我们已经进行的改革尝试也还只是初步的,还有待实践的检验.所有这些都希望得到专家的指点.幸运的是,孟杰教授和高世好教授审阅了本教材全稿,提出了许多中肯的修改意见,为本教材增色不少,特表感谢.

本教材主编为王迺信,副主编为王经民、欧阳安、刘迎洲、边宽江、连坡,参加编写的还有赵斌、庾文利、张青娥、冯爱芬、王杰、吴月宁、邓业胜、魏宁.联系邮箱为 wanx42@hotmail.com.

编 者

2007. 5

第一版前言

本教材追求下述目标：

1. 追求简明实用

针对教学的需要，本教材尽量压缩极限的叙述，单刀直入地从物理世界所提供的模型和原理中导出微积分的基本概念、法则和公式，使表达更简明，把学生从繁难的概念推演和运算技巧中解放出来，引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用微积分的思想和方法分析、解决实际问题的能力。

2. 追求适当的严密性

作为教材，只可能在一定程度上具有严密性，本教材选择了一些不加论证而予以接受的先验的结论作为论证的基础；在对概念作直观描述时，尽量采用作为充分必要条件的性质进行描述；在对理论和应用中起关键作用的内容进行论证时，则采用比较准确的语言表述，诸如中值定理、微元法等。

3. 追求微积分的对称美

对于应用中最常见的连续函数或至多有有限个不连续点的函数，微分和积分既是互逆的概念，也是互逆的运算，本教材在定义微分概念和积分概念时，在引入微分法和积分法时，在论证微分中值定理和积分中值定理时，充分揭示其互逆的本质，简化概念间的联系，努力体现微积分的固有的对称美。

古人云：取法乎上，仅得乎中。由于水平所限，错漏在所难免，敬请批评指正，以便修改。

本教材由西北农林科技大学牵头，多所院校合作编写。主编为王迺信，副主编为卢恩双、边宽江、王经民、许瑞峰、刘建忠、杨淑华，参加编写的还有史美英、刘迎洲、刘亚相、刘建军、吴养会、路新玲、张学东、周芳，全部插图由郑瑶绘制。

西北工业大学叶正麟教授审阅了书稿，提出了许多中肯的修改意见，特此表示衷心感谢。

编者

2000年3月

目 录

第二版前言

第一版前言

引言	1
第一章 函数与极限	5
第一节 函数	5
一、函数的概念	5
二、函数举例	6
三、初等函数	7
第二节 函数的极限	9
一、函数极限的概念	9
二、函数极限的性质	11
三、函数极限的运算	12
四、极限存在准则与两个重要的极限	14
五、无穷小的比较	17
第三节 函数的连续性	17
一、函数的连续性	17
二、函数的间断点	17
三、初等函数的连续性	17
四、闭区间上连续函数的性质	19
第四节 关于极限的注记	20
一、中国古代数学中极限思想的萌芽	20
二、关于极限的描述问题	20
三、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的存在性	21
习题一	22
第二章 导函数与微分	25
第一节 函数的导函数	25
一、导函数的定义	25

二、函数导数的几何意义	26
三、函数的可导性和连续性的关系	26
四、导函数的线性性质	27
五、导函数举例	27
第二节 函数的微分	29
一、函数微分的定义	29
二、用微分作近似计算举例	31
第三节 微分法	32
一、反函数微分法	32
二、复合函数微分法	33
三、和差积商函数微分法	35
四、高阶导函数	38
第四节 微分中值定理	40
一、Rolle 中值定理	40
二、Lagrange 中值定理	41
三、Cauchy 中值定理	42
四、中值定理应用初步	42
第五节 导数和微分的再认识	44
一、要挖掘导数的内涵和外延	44
二、自然界事物运动中的导数	44
三、微分法的再认识	45
四、再谈函数增量与微分的关系	47
习题二	49
第三章 原函数与积分	52
第一节 原函数和不定积分	52
一、原函数	52
二、不定积分	54
三、不定积分的线性性质	55
第二节 积分法	56
一、换元积分法	57
二、分部积分法	59
第三节 定积分	62
一、积累量	62
二、定积分分析定义	63
三、定积分的性质	64
第四节 微积分基本定理和定积分计算	66

一、微积分基本定理	66
二、定积分的换元积分法	70
三、定积分的分部积分法	72
第五节 积分的再认识	73
一、关于不定积分和定积分的关系	73
二、关于定积分的定义	74
三、再谈定积分的定义	75
习题三	76
第四章 导数的应用	79
第一节 变化率问题	79
一、函数的变化率	79
二、函数的增长率	80
三、函数的弹性	81
四、相关变化率	82
第二节 L'Hospital 法则	84
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	84
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	85
三、可化为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限	86
第三节 Taylor 公式	87
第四节 函数的增减性	92
第五节 函数的极值、最大值与最小值	94
一、函数的极值问题	94
二、函数的最大值、最小值问题	97
第六节 曲线的凹凸性、渐近线及函数图形的描绘	100
一、曲线的凹凸性	100
二、渐近线	103
三、函数图形的描绘	104
习题四	106
第五章 定积分的应用	111
第一节 定积分的微元法	111
第二节 平面图形的面积	113
一、直角坐标系下平面图形的面积	114
二、极坐标系下平面图形的面积	116
第三节 立体图形的体积	119

一、已知截面面积的立体图形的体积	119
二、旋转体的体积	119
第四节 平面曲线的弧长	123
一、直角坐标系下平面曲线的弧长	123
二、参数方程下平面曲线的弧长	125
三、极坐标系下平面曲线的弧长	125
第五节 定积分在物理中的应用举例	126
一、位移	127
二、质量	127
三、力	128
四、功和能	129
五、平均值	131
习题五	132
第六章 反常积分	135
第一节 无穷区间上的反常积分	135
一、无穷区间上的反常积分的概念	135
二、无穷区间上的反常积分的计算	137
第二节 无界函数的反常积分	139
第三节 Γ 函数	141
习题六	144
第七章 微分方程	145
第一节 微分方程及其解的概念	145
一、微分方程的定义	145
二、微分方程的解	146
三、几个实例	147
第二节 分离变量法	148
第三节 一阶线性微分方程	149
第四节 用变量代换法解微分方程	152
一、齐次方程	152
二、Bernoulli 方程	154
三、几种特殊类型的高阶方程	154
四、可化为齐次方程的一类微分方程	156
第五节 常系数线性微分方程	158
一、 n 阶线性微分方程解的结构	159
二、二阶常系数线性微分方程	160

三、 n 阶常系数线性微分方程	170
习题七	172
第八章 二元函数微积分	175
第一节 二元函数的基本概念	175
一、平面点集的有关概念	175
二、二元函数的定义	176
三、二元函数的极限	178
四、二元函数的连续性	179
五、有界闭区域上连续多元函数的性质	179
第二节 偏导数	180
一、偏导数的定义	180
二、偏导数的计算	181
三、高阶偏导数	182
四、全微分	183
五、二元复合函数的求导运算	185
第三节 多元函数的极值	186
一、二元函数极值的定义	186
二、二元函数极值存在的条件	187
三、条件极值	188
第四节 二重积分的概念及性质	189
一、二重积分的概念	189
二、二重积分的几何意义	191
三、二重积分的性质	192
第五节 二重积分的计算	192
一、利用直角坐标计算二重积分	192
二、利用极坐标计算二重积分	196
第六节 二重积分的应用举例	198
一、求曲面的面积	199
二、求体积	200
三、求平面薄片的重心	200
四、求平面薄片的转动惯量	201
习题八	202
第九章 级数	206
第一节 级数及其收敛性	206
一、常数项级数的概念	206

二、收敛级数的基本性质	208
三、级数的审敛法	209
四、绝对收敛与条件收敛	216
第二节 Taylor 级数	217
一、函数项级数的概念	217
二、幂级数及其收敛性	218
三、幂级数的运算与和函数的求法	221
四、函数展开成 Taylor 级数	225
第三节 Fourier 级数	230
一、三角级数的概念	231
二、函数展开为 Fourier 级数	232
三、函数展开成正弦级数或余弦级数	235
四、周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	237
习题九	241
第十章 数学模型简介	243
第一节 数学模型的有关概念	243
一、数学建模简介	243
二、数学建模的一般方法和步骤	244
三、数学模型及其分类	246
第二节 数学建模举例	246
一、双层玻璃窗的功效	246
二、交通管理中亮黄灯的时间问题	248
三、湖水污染问题模型	249
四、传染病模型	252
习题十	257
附录 I 积分表	258
附录 II 习题参考答案	263
参考文献	275

引 言

微积分，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具。

——Courant (1888—1972，美国数学家、数学教育家，美国 Courant 数学科学研究院创始人)

在现代社会中，因为科学技术的进展，社会组织的日趋复杂，数学便成为整个教育的一个重要组成部分。

——陈省身 (1911—2004，中国科学院院士，Wolf 奖得主，当代数学大师，美国国立 Berkeley 数学科学研究所首任所长)

数学研究现实世界中的空间形式和数量关系等。

17 世纪以前，数学的研究对象主要是常量问题，研究方法也基本上是孤立的，静止的。后来，社会生产力的发展和科学技术的进步，给整个自然科学提出了更高的要求，所涉及的数学问题也层出不穷，并且愈来愈复杂，数学面临着崭新的课题和前所未有的挑战——必须研究变量问题，因为各种形式的物质运动都必须用变量来描述；必须创造新方法，创立新学科，因为原有数学学科中的数学方法都不能提供研究变量的普遍适用的方法。于是，在 17 世纪，几乎所有最出色的科学家都直接或间接地参与了创造新方法、创立新学科的工作，Descartes (1596—1650) 引入了坐标方法，把空间形式的研究与数量关系的研究结合起来，从而把变量正式引进数学，从此，运动进入了数学，辩证法进入了数学，推动了数学的大变革。还有一大群生气勃勃的科学家，从继续研究物理学、天文学以及几何学等入手，在创造新方法、创立新学科方面做出了重要贡献。但是，必须指出，在创造新方法、创立新学科方面做出最大贡献的是 Newton (1642—1727) 和 Leibniz (1646—1716)。他们各自独立地对变量问题进行深入研究，并且各自独立地提出了几乎相同的新方法，并且在 17 世纪末完成了他们建立新学科的著作，宣告了新学科——微积分的诞生。

微积分区别于它以前的数学的主要标志是：它研究的不是常量问题，而是变量问题；它研究的方法不是孤立的和静止的，而是从变量与变量的互相依赖中去研究，是用变化的思想和方法去研究。

微积分的诞生在数学史和整个自然科学史上都具有划时代的意义。微积分诞生之初，理论体系的表述上尚缺乏严密性，但由于它思想方法在本质上的深刻性和正确性，微积分一诞生就显示出极强的生命力和应用前景，并且逐渐得到了充实和发展，获得了广泛应用。微积分的广泛应用

使它逐渐渗透到自然科学的各个领域。数学家为微积分注入严密性的努力，又促进许多学科获得了迅速发展。微积分在科学的数学化历程中起着极其重要的作用。总之，微积分的诞生，以及它的发展、应用和完善，影响了整个自然科学，从而促进了社会生产力的发展和科学技术的发展。

一、微积分研究的主要对象

我们在观察和描述自然现象或技术过程时，经常遇到两类不同性质的量——常量和变量。常量是指在某一个过程中不变的量；变量是指在某一个过程中变化的量。例如在密闭的容器里装有某种气体，在加热的过程中，气体的体积是常量，气体的分子数是常量，但气体的温度是变量，气体的压强是变量。

自然现象和技术过程中的变量之间常常有互相依赖的关系。例如对密闭容器里的气体加热时，气体的压强是随气体温度的变化而变化的。微积分通过变量研究这些现象和过程，主要是研究这些互相依赖的变量的变化规律。

变量之间的互相依赖关系，通常被表示为函数关系。这样函数就成为微积分研究的主要对象。

变量之间的关系是各种各样的，这使得函数的类型是举不胜举的，这也使得微积分的论述必须具有严密性，以便使结论适合于各种类型的函数而无一例外。

本书将把注意力主要集中在一类简单而重要的函数类型——初等函数。

二、微积分研究的主要问题

17 世纪，数学面临着大量的变量问题。当时的数学家已逐渐认识到，这些表现形式上差异很大的变量问题，可以归并为两大类问题，这两大类问题就是微积分研究的主要问题。

第一大类问题是函数的变化率。例如运动的速度，曲线的切线斜率，物质分布的密度等。这一大类问题的研究产生了微分学。

第二大类问题是函数的积累量。例如平面图形的面积，立体图形的体积，变力所做的功等。这一大类问题的研究产生了积分学。

需要指出的是，从古希腊的 Archimedes（前 287—前 212）到我国古代的刘徽（三世纪），祖冲之（429—500），一直到 Kepler（1571—1630），Galileo（1564—1642）等，许多科学家都在解决部分问题方面做出了重要贡献。但是，Newton 和 Leibniz 在前人工作的基础上，完整地解决了这两大类问题，并且高瞻远瞩地指出了这两大类问题的内在联系，这就是著名的微积分基本定理。

三、微积分研究的主要思想方法

Newton 和 Leibniz 在其创立微积分的著作中，常常用“直觉”和“本能”代替严密的推理，因此，在微积分创立之初，其理论体系的表述还缺乏严密性。数学家为此求索了两个世纪，终于