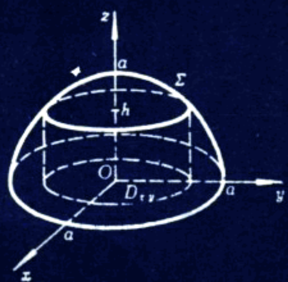
# 高等数学

（下）

吴德佺　编著




北京工业大学出版社

# 目　　录

# 第九章　多元函数微分学

在前面的几章里，我们研究了一个自变量的函数 $y=f(x)$的微积分，即一元函数的微积分. 从现在起，我们要研究多个自变量的函数的微积分. 在客观世界中，反映客观事物间相互联系、相互依赖的量往往是多个的，多元函数就是这种依赖关系在数学上的一种反映，因此，多元函数微积分在物理、力学、无线电等领域中有着广泛的应用.

多元函数微积分是一元函数微积分的推广，而一元函数微积分是整个微积分的基础.

学习多元函数微积分，要注意对照一元函数，要从本质上统一起来，但又要注意其差别. 这样，有了一元函数的基础，学习多元函数就会容易多了.

## §1　多元函数概念

### 一、多元函数的定义

以前我们讨论的都是一元函数 $y=f(x)$，因变量 $y$ 只依赖于一个自变量 $x$. 在很多实际问题中，一个变量往往依赖于几个自变量. 例如一定量的理想气体的体积 $V$ 与压力 $P$、温度 $T$ 之间的关系由状态方程给出：

$$V=\frac{RT}{P}\qquad (R\text{ 是常数}).$$

又如长方体的体积 $V$ 与长 $x$、宽 $y$、高 $z$ 的关系是

$$V = xyz.$$

又如物体内的温度分布 $u$ 与点 $(x,y,z)$、时间 $t$ 有关，而且当 $x$、$y$、$z$、$t$ 确定时，其温度 $u$ 就确定，即温度 $u$ 依赖于四个彼此无关的独立变量 $x$、$y$、$z$、$t$.

从以上的例子可以看到，它们与一元函数一样，存在着类似的依赖关系即函数关系：其中一个变量的值随其它变量的变化而变化，当其它变量的值取定后，这变量就按一定规律随之确定一个值. 由此引进多元函数的概念.

**定义 1　设在某过程中变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间不存在任何关系，即它们所取的值彼此无关，我们称这些变量为独立变量.**

**定义 2　设在某过程中有变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为独立变量. 若变量 $y$ 的值随变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的变化而变化；且当变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值取定后，变量 $y$ 的值就按一定规律确定一个值，则称变量 $y$ 为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，记为**

$$y = f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

**并称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量，称 $y$ 为因变量.**

自变量的个数 $n\geq 2$ 的函数统称为多元函数，$n$ 个自变量的函数叫 $n$ 元函数，如 $V=\frac{RT}{P}$ 为二元函数，$V=xyz$ 为三元函数，$u=u(x,y,z,t)$ 为四元函数. 又如空间中两点 $(x_1,y_1,z_1)$、$(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

为变量 $x_1$、$y_1$、$z_1$、$x_2$、$y_2$、$z_2$ 的六元函数.

如果用 $x$ 表示 $n$ 维空间中的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $n$ 元函数可表为

$$y = f(x).$$

这时，它与一元函数形式上完全一样，区别在于一元函数 $f(x)$ 的 $x$ 是数轴上的点，而 $n$ 元函数中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 代表 $n$ 维空间

中的点.

由于二元函数与三元函数等多元函数间无多大差别，所以我们以后主要讨论二元函数 $z=f(x,y)$.

## 二、函数及其定义域的几何表示

自变量的取值范围叫做函数的定义域. 给定一个二元函数

$$z=f(x,y),\qquad (x,y)\in D,$$

在几何上，其定义域 $D$ 一般表示 $xy$ 平面上的一个区域，而二元函数则表示空间的一曲面 $S$，如图 9.1. 设 $(x,y)$ 为定义域 $D$ 内一点，

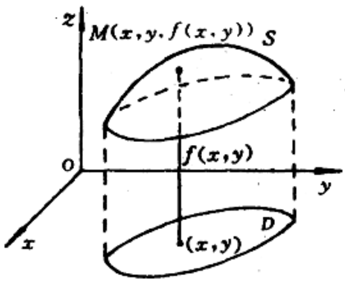



图 9.1

从 $(x,y)$ 作纵坐标为 $z=f(x,y)$ 的点 $M=(x,y,f(x,y))$，当点 $(x,y)$ 跑遍 $D$，一般说来，点 $M$ 在空间中画出一曲面 $S$. 因此，与一元函数类似，二元函数 $z=f(x,y)$ 表示空间中一曲面.

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域表示空间中一区域，而三元函数则表示 $x$、$y$、$z$、$u$ 四维空间中一曲面，这曲面不能象二元函数那样在我们生活的三维空间中画出，只能在数学上加以抽象的想象.

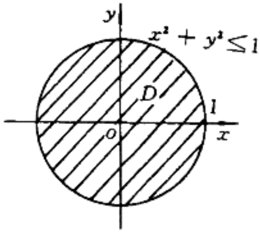


图 9.2

**例 1** $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

**解** 定义域 $D$ 为 $x^2+y^2\leq 1$，在 $xy$ 平面上表示包括圆周在内的一圆形区域，如图 9.2，函数在空间表示半径等于 1，球心在原点的上半球面.

二元函数的定义域之确定原则与一元函数相同.

**例 2** 求 $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$的定义域.

**解** 要使函数有定义，必须

$$(x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2+y^2)}\neq 0.$$

由此知定义域为

$$D:\quad 0<x^2+y^2<1.$$

它在 $xy$ 平面上表示一个不包括圆心与圆周的圆形区域，用图表示如图 9.3.

二元函数的定义域较一元函数复杂得多，这就使二元函数与一元函数产生了重大差别.

从直观上来讲，一般说平面区域指的是由一条或几条曲线围成的平面的一部分，如矩形、椭圆形、圆形等都是区域. 围成区域的曲线叫做该区域的边界，包括全部边界在内的区域叫做闭区域，不包括边界的区域叫做开区域. 如果区域延伸到无限远处，则区域是无界的，否则称为有界的. 如 $x^2+y^2<1$ 表示半径为 1 的开圆，而 $x^2+y^2\leq 1$ 表示半径为 1 的闭圆，它们都是有界区域，而 $1\leq y\leq 2$ 表示一个无界的带形区域，如图 9.4.

开区域、闭区域的严格定义可参考菲赫金哥尔茨的“数学分析原理”一卷一分册 241 页或其它“数学分析”的书.

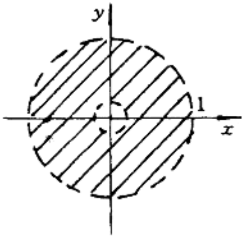



图 9.3

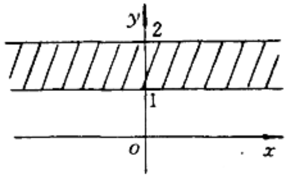



图 9.4

**思考题**

1. 平面上一点$(x_0,y_0)$的$\delta$邻域用不等式该怎么描写或表示？点$(x_0,y_0)$的附近怎么表示？

2. 分别写出数轴上、平面上、空间中两点的距离公式，并将它们推广到$n$维空间.

# §2　极限与连续性

## 一、极限

设在$xy$平面上给定了两点$M_0=(x_0,y_0)$与$M=(x,y)$，大家知道它们间的距离

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

我们称以点$M_0$为圆心，以$\delta$为半径的圆形区域$\rho<\delta$为点$M_0$的$\delta$邻域. 与一元函数极限类似定义二元函数的极限如下：

**定义 1　设函数$f(x,y)$在点$M_0$的附近（不包含$M_0$）有定义. 若有一个实数$A$，具有以下性质：**

**$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得只要 $0<\rho<\delta$,就有**

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

**则称 $A$ 为 $f(x,y)$ 当 $M\to M_0$ 时的极限,记为**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,\qquad \text{或}\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

$$\text{或}\quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A.$$

说明:

(1)与一元函数极限一样,$\delta$ 为依赖于正数 $\varepsilon$ 的正数.一般说,$\varepsilon$ 越小 $\delta$ 也越小,对给定的 $\varepsilon$ 其相应的 $\delta$ 缩小无妨.

(2)不等式 $0<\rho<\delta$ 表示点 $M_0$ 的 $\delta$ 邻域并除去点 $M_0$,即点 $M_0$ 的附近.在平面上,点 $M_0$ 的附近也可用以点 $M_0$ 为中心的正方形

$$D:\quad |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,\text{且}(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

来描写,从而极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的"$\varepsilon—\delta$"说法也可以改为:

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$,且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$.

就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

显然,这两种说法是等价的,因为一个以点 $M_0$ 为圆心的圆内可以找到一个以点 $M_0$ 为中心的正方形,反过来,在一个以 $M_0$ 为中心的正方形内也可以找到一个以 $M_0$ 为圆心的圆.

**思考题**

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的"$\varepsilon\to\delta$"说法的几何意义是什么?

**例 1** 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

**证** 取极坐标,则 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$.

$$\because \quad \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$$

$$=\left|\frac{\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2}\right|=|\rho\cos^2\theta\sin\theta|\leq\rho$$

$\therefore$ $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\varepsilon$,使得只要 $0<\rho<\delta$,就有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leq\rho<\delta=\varepsilon.$$

于是按照极限定义有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

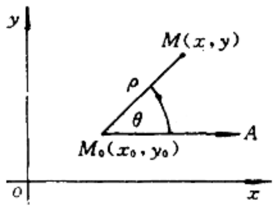


图 9.5

一般说来,要证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$,首先化为极坐标,取 $M_0(x_0,y_0)$ 为极点,过 $(x_0,y_0)$ 而平行 $x$ 轴的正半轴的半射线 $M_0A$ 为极轴(图 9.5),则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=\lim_{\rho\to0}f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)$$

$$=\lim_{\rho\to0}F(\rho,\theta),$$

其中 $F(\rho,\theta)=f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)$. 其次,如用"$\varepsilon$—$\delta$"语言证明

$$\lim_{\rho\to0}F(\rho,\theta)=A.$$

则要对 $\varepsilon>0$,从 $|F(\rho,\theta)-A|<\varepsilon$ 出发,去找相应的 $\delta>0$,方法同例 1. 不过要注意的是,要求所找 $\delta$ 只依赖于点 $M_0$ 与 $\varepsilon$,而不依赖于 $\theta$! 为什么? 请读者从二元函数极限的"$\varepsilon$—$\delta$"定义思考之!

有了极限定义,可以类似于一元函数那样,建立极限的有关性质与运算法则.

## 二、连续性

有了极限理论后，可以象一元函数那样，类似地建立二元函数的连续性的定义及有关性质.

设函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0=(x_0,y_0)$ 的 $\delta$ 邻域 $K_\delta(M_0)$ 内有定义. 我们用 $M$ 表示 $(x,y)$，用 $\rho$ 表示点 $M$、$M_0$ 间的距离，用 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ 表示二元函数的极限，则极限的"$\varepsilon—\delta$"说法为

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$（$\delta$ 依赖于 $\varepsilon, M_0$），使得只要 $0<\rho<\delta$，就有 $|f(M)-A|<\varepsilon$.

以上写法的好处在于将二元函数与一元函数从本质到形式统一了起来. 当读者深刻理解到这一统一性时，学习多元微分学就容易了. 当然学习中也要注意多元的特殊性.

1. 连续性的定义

**定义 2　若 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$，则称函数 $f(M)$ 在点 $M_0$ 连续.**

若函数 $f(M)$ 在区域 $D$ 上每一点都连续，则称函数 $f(M)$ 为在 $D$ 上的连续函数. 如函数 $f(M)$ 在定义域上连续，则简称函数 $f(M)$ 为连续函数.

函数 $f(M)$ 在点 $M_0$ 连续的"$\varepsilon—\delta$"说法为：

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon,M_0)>0$，使得只要 $\rho<\delta$，就有

$$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon.$$

因为 $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$ 等价于 $f(M_0)-\varepsilon<f(M)<f(M_0)+\varepsilon$. 所以二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的连续性的"$\varepsilon—\delta$"说法的几何意义是：$\forall\ \varepsilon>0$，都存在一个以点 $M_0$ 为圆心，以 $\delta$ 为半径的圆，使得只要点 $M=(x,y)$ 落在这圆内，即 $\rho<\delta$，就有

$$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon \Leftrightarrow f(M_0)-\varepsilon<f(M)<f(M_0)+\varepsilon.$$

即曲面 $z=f(x,y)$ 落在平面 $z=f(M_0)+\varepsilon$ 与平面 $z=f(M_0)-\varepsilon$

之间.

函数 $f(M)$ 在点 $M_0$ 连续即 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$ 的无穷小量说法为:

当 $M\to M_0$ 时,即 $\rho$ 为无穷小量时,函数改变量 $\Delta z=f(M)-f(M_0)$ 为无穷小量.

**例 2** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时},\\ 0 & \text{当}(x,y)=(0,0)\text{时}.\end{cases}$

**解** 由例 1 得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$,又 $f(0,0)=0$,故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

**例 3** 已知 $f(x,y)=\begin{cases}xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时},\\ 0 & \text{当}(x,y)=(0,0)\text{时}.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在原点连续.

**证** $\because$

$$\begin{aligned}|\Delta z| &= |f(x,y)-f(0,0)|\\ &= |f(x,y)| = |xy|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\\ &\leq |xy| = |\rho^2\cos\theta\sin\theta| \leq \rho^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $\rho\to 0$ 时,$\Delta z\to 0$,故由连续性的无穷小量说法知 $f(x,y)$ 在原点连续.

2. 连续函数的性质

与一元类似,连续函数有性质:

(1) 若 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 在 $D$ 上连续,则 $f\pm g, fg, \dfrac{f}{g}(g\neq 0)$ 也在 $D$ 上连续.

(2) 连续函数的复合函数是连续函数.

以上性质的证明与一元类似.

(3) 若 $f(x)$ 是一元连续的函数,则把 $z=f(x)$ 看作 $x,y$ 的二元函数也是二元连续的.

**证** 从几何上看，结论是显然的，请读者思考.

现用“$\varepsilon-\delta$”说法证之. 设 $x_0$ 为 $f(x)$ 的定义域内任意一点，$y_0$ 任意，把 $f(x)$ 看成二元函数 $f(x,y)$，则

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|$$

$\because$ $f(x)$ 是一元连续函数，有

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(x_0,)|<\delta,$$

对于正方形 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，更有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

$\therefore$ $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

即 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续，由于 $(x_0,y_0)$ 的任意性知 $f(x)$ 看成 $x$、$y$ 的二元函数也连续.

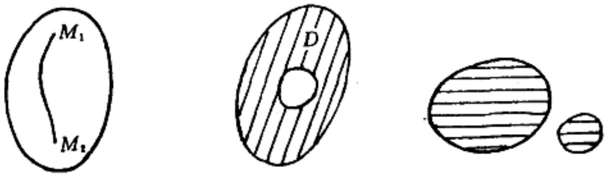
根据以上性质与一元初等函数的连续性，立刻推出以下重要结论：

**定理 1　一切二元初等函数都是二元连续的.**

**例 4**　例 3 的函数是连续的.

**解**　因为 $xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 是初等函数，所以它在定义域 $(x,y)\neq(0,0)$ 是连续的，即 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 时是连续的，又由例 3 知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也连续，故 $f(x,y)$ 在全平面上连续.

二元或多元函数在闭区域上连续，有与一元函数类似的三个性质. 不过要注意的是，介值定理要求闭区域 $D$ 是连通区域，什么是连通区域呢？如果域内任意两点都可以用一条在区域内的曲线联结起来，则称区域为连通区域，连通区域又分单连通与复连通，如图 9.6.




(a) 单连续　　(b) 复连通　　(c) 不连通

图 9.6

*三、极限的另一种定义

与一元函数极限一样，极限 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ 也可以用序列极限来定义.

**定义 3　若对每一个趋于 $M_0$ 的点列 $M_n$，相应的函数值序列 $f(M_n)$ 都趋于同一极限值 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(M)$ 当 $M\to M_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.**

现证明定义 3 与定义 1 等价.

**定理 2　极限 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$（"$\varepsilon\to\delta$"定义）的充要条件是：对每一个点列 $M_n\to M_0$，相应的函数值序列 $f(M_n)$ 都趋于同一极限值 $A$.**

**解**　(1) 必要性. 从几何上看是显然的.

$\because$　$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$，有

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，使得只要 $0<\rho<\delta$，就有 $|f(M)-A|<\varepsilon$.

设 $M_n\to M_0$，则 $M_n$、$M_0$ 之间的距离 $\rho_n\to 0(n\to\infty)$，因此，对给定 $\varepsilon_1=\delta>0$，$\exists\ N$，使得只要 $n>N$，就有 $\rho_n<\varepsilon_1=\delta$ 因而

$$|f(M_n)-A|<\varepsilon.$$

综合以上可知，有

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N$,使得只要 $n>N$,就有

$$|f(M_n)-A|<\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}f(M_n)=A$. 由点列 $M_n\to M_0$ 的任意性,知必要性成立.

(2) 充分性. 要证:若对每一点列 $M_n\to M_0$,都有 $f(M_n)\to A(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=A$("$\varepsilon\to\delta$"的定义).

用反证法证明. 若不然,即 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)\neq A$,则至少有一个数 $\varepsilon_0>0$,不管 $\delta$ 多么小,都存在一点 $M'$,满足 $0<\rho(M',M_0)<\delta$,而使得

$$|f(M')-A|\geq\varepsilon_0.$$

特别对于 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$,$\exists\ M_n=(x_n,y_n)$,满足 $0<\rho(M_n,M_0)<\delta_n$. 而使得

$$|f(M_n)-A|\geq\varepsilon_0.$$

由于 $\rho(M_n,M_0)<\delta_n=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,所以 $M_n\to M_0(n\to\infty)$,根据已知条件,知$\lim\limits_{n\to\infty}f(M_n)=A$,此与

$$|f(M_n)-A|\geq\varepsilon_0.$$

矛盾. 由此知假定 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)\neq A$ 不可能,故 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=A$.

注:定理 2 中"对每一个点列 $M_n\to M_0$,相应的函数值序列 $f(M_n)$"改为"$M$ 以任何方式趋于 $M_0$ 时,函数 $f(M)$"定理仍成立,为什么? 请读者思考!

在证明极限存在的问题中用"$\varepsilon\to\delta$"定义较方便,而在证明极限不存在或证明 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)\neq A$ 时,用"$\varepsilon\to\delta$"定义去证明就困难或麻烦了,这时用定义 3 就较方便. 因为根据定理 2,我们只要能找到一串趋于 $M_0$ 的点列 $M_n$,证明或说明$\lim\limits_{n\to\infty}f(M_n)$不存在;或者找到两串趋于 $M_0$ 的点列,说明它们相应的序列极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(M_n)$不相等,就说明了极限 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)$不存在.