非线性系统分析与设计

焦晓红　关新平　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

非线性系统分析与设计

非线性系统分析与设计

焦晓红　关新平　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书主要讲述非线性系统分析和非线性系统设计的基本理论。系统分析部分介绍了系统平衡点稳定性、系统输入–输出稳定性和无源性分析；系统设计部分介绍了反馈线性化设计、Backstepping 递归设计、基于无源化的设计和 Forwarding 递归设计方法。

本书可作为研究生的“非线性系统”课程教材，同时也可作为相关科研人员和工程技术人员的自学教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统分析与设计/焦晓红，关新平编著．—北京：电子工业出版社，2008.8
ISBN 978-7-121-07232-1

Ⅰ．非… Ⅱ．①焦… ②关… Ⅲ．①非线性系统（自动化）—系统分析 ②非线性系统（自动化）—系统设计 Ⅳ．TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 121371 号

责任编辑：苏颖杰（suyj@phei.com.cn）
印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：14.5　字数：371.2 千字
印　　次：2008 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　　定价：29.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

本书是为研究生的“非线性系统”课程编写的。介绍非线性系统控制理论成果的图书国内外已出版了十几部，国外比较经典的专著或教材有：A. Isidori 教授的 *Nonlinear Control System*（1995），H. K. Khalil 教授的 *Nonlinear Systems*（1996），R. Marino 教授的 *Nonlinear Control Design—Geometric Adaptive and Robust*（1995）等，并且都有了中译本；而国内，最早的相关书籍要追溯到高为炳教授的《非线性控制系统导论》（1991），接下来还有冯纯伯教授和费树岷教授的《非线性控制系统分析与设计》（1998），胡跃明教授的《非线性系统理论及应用》（2002）等。但是，总是会有这样的感觉：属于专著类的书有自己的研究主线和特色在其中，作为研究生教材，就会显得基础知识不全面、内容过于专业和有难度；而属于教材类的书，现在来看又显得现代非线性控制理论知识不全面。例如，*Nonlinear Control System* 一书属于研究专著，是深入研究非线性系统理论必读的经典之著，但作为研究生教材，内容偏难，理论偏深，缺少基础理论，不易理解与学习；而 *Nonlinear Systems* 一书算得上是很好的教材，非线性系统基础理论较详细全面，浅显易懂，但是非线性系统分析部分的内容太多，而非线性系统控制设计方面只有标称系统的设计，非线性系统鲁棒自适应控制设计的知识没有涉猎；*Nonlinear Control Design—Geometric Adaptive and Robust* 主要讲解非线性系统的控制设计方法。因此，几年来在给研究生授课时，都需要同时用几本书作为教材，学生也只能记笔记。因此，一直希望能有一本适合的教材，内容不算太多，基础知识却较全面，知识结构较合理，讲解由浅入深、循序渐进。通过此课程的学习，能够为分析和设计目前高科技中广泛应用的各种控制系统提供一定的理论依据，能够为学习有关专门文献和前沿的现代控制理论打下良好的基础，也为进一步激发和调动学生的潜能和积极性创造一点条件。鉴于此，我们编写了本书。

本书针对非线性系统，从必要的数学基础、基本的物理概念到基本的分析方法、设计思想，再到鲁棒自适应控制的扩展设计方法等都有所涵盖。可以让读者较容易与完整地了解和基本掌握非线性系统分析与设计理论的基本实质。本书属“控制理论与控制工程”、“模式识别与智能系统”学科（自动化专业）及相关学科和专业的研究生基础课程用书，同时也能给想了解和学习非线性系统基础理论的科研人员和工程技术人员一定的理论指导。

本书主要讲述非线性系统分析和系统设计的基本理论。系统分析部分包括系统两种稳定性分析和无源性分析；系统设计部分包括反馈线性化设计、基于无源化的设计，以及分别针对具有上、下三角结构特征的系统的 Forwarding 和 Backstepping 递归设计。具体的内容安排如下：第 1 章是绪论，主要介绍非线性系统的概念、数学描述、特点、解的存在性和唯一性的条件及非线性系统理论的基本任务。同时还给出了一些所需的数学概念和数学工具。第 2～4 章是非线性系统分析理论，第 2 章是关于系统 Lyapunov 稳定性分析，系统地讲解系统平衡点稳定性的一些概念和判别方法，以及构造 Lyapunov 函数的一些方法；第 3 章是关于系统输入–输出稳定性分析，讲解系统输入–状态稳定性、输入–输出稳定性，L_2 增益，小增益定理

等系统输入–输出特性分析理论，并给出所需要的一些数学基础知识；第 4 章是系统的无源性分析，介绍系统无源性与稳定性的关系，无源性与小增益定理之间的关系等基本非线性系统理论。第 5～8 章是非线性系统设计理论，第 5 章介绍反馈线性化设计方法，包括所需的数学工具，如李导数、李括号，微分同胚，Frobenius 定理等，输入–状态线性化、输入–输出线性化、零动态、相对阶等引入微分几何理论后的非线性系统的基本坐标变换，以及精确反馈线性化基本控制设计方法的讲解；第 6 章介绍 Backstepping 递归设计方法，给出 Backstepping 的基本设计思想与设计步骤，同时介绍基于 Backstepping 的鲁棒镇定、自适应镇定控制器的设计；第 7 章介绍基于无源化的设计方法，给出无源化设计的基本思想，同时讨论基于反馈无源化的鲁棒镇定和鲁棒干扰抑制及自适应 L_2 性能综合等问题；第 8 章介绍用于解决上三角结构系统镇定问题的 Forwarding 递归方法，主要给出 Forwarding 递归设计的基本思想与设计步骤，并给出可替代 Forwarding 设计的控制律具有饱和性能的简化设计。

本书的编写注意了如下几点：① 知识的承接性，考虑到学生学习的阶段过程，是在本科学习了“反馈控制理论”和“现代控制理论基础”、研究生阶段了解了“线性系统”的基础上展开非线性系统理论的叙述的。② 数学工具的所用性，一些需要的数学概念和工具不是集中在一章给出的，而是在每章需要时给出，这样可使读者阅读时不会感觉有太多的抽象枯燥的数学公式摆在那里，而又不知这些数学描述的目的是什么。③ 专用名词术语的双语性，涉及的专用名词术语都给出了英文标注，便于阅读相关的外文文献。

本书第 1 章、第 4～8 章由焦晓红博士主笔，第 2～3 章由关新平博士主笔。全书由焦晓红博士统一定稿。

笔者学识疏浅，疏漏和错误在所难免，敬请读者和专家批评指正。

作　者

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路173信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036

目　　录

第1章　绪　　论

自动控制理论随着科学技术的发展、被控对象种类的增多和控制性能要求的提高，不断发展和完善着。它的发展初期，是以反馈为基础、以传递函数为系统数学描述的经典控制理论，研究单输入–单输出、线性定常系统的分析与设计问题，主要用于工业控制以及第二次世界大战期间的军用装备。经典控制理论的基本分析与设计方法是根轨迹法和频率特性，这些在本科“反馈控制理论”课程中讲述。

20 世纪 60 年代，随着现代应用数学新成果的推出和电子计算机技术的应用，为适应宇航技术的发展，形成了以状态空间描述为基础的现代控制理论，主要研究具有高性能、高精度的多变量变参数线性系统的最优控制问题。现代控制理论中的系统分析与设计的基础理论，在本科“现代控制理论基础”课程和研究生“线性系统”课程中讲述。

尽管线性系统理论不仅在理论上完善，在各种国防和工业控制中也已成功地应用，但是随着现代科学技术的发展和现代工业对控制系统性能要求的不断提高，线性反馈控制已很难满足各种实际需要。大多数实际控制系统往往是非线性的，采用近似的线性模型虽然可以更全面地、容易地分析系统的各种性能，却很难刻画出系统的非线性本质，所设计的控制器也很难达到系统的性能要求。线性系统的动态特性已不足以解释许多常见的实际非线性现象。因此，有必要进行非线性系统理论的研究。早期的非线性系统分析与设计没有自身的理论体系，对非线性系统的处理主要是采用将非线性特性分段线性化，然后使用线性系统理论分析与设计。

20 世纪 90 年代，伴随着现代微分几何理论的发展，对用建立在线性系统基础上的分析和设计方法难以解决的复杂系统和高质量的控制问题的研究有了突破性进展，形成了现代非线性系统控制理论，主要包括：通过利用李括号及微分同胚等基本工具研究了非线性系统状态、输入及输出变量间的依赖关系，系统地建立了非线性控制系统能控、能观及能检测的充分或必要条件，发展了全局状态精确线性化及输入–输出精确线性化的设计方法、基于反馈无源化的设计方法，以及 Backstepping 递归设计方法和 Forwarding 递归设计方法等。本书主要讲述这些利用微分几何理论发展起来的非线性系统的设计方法，同时，介绍了用 Lyapunov 方法进行非线性系统稳定性分析，以及从输入–输出和无源性方面对反馈系统的稳定性分析等基本的非线性系统分析理论。

1.1　非线性系统描述

1. 非线性系统的概念和实例

运动微分方程是由非线性的常微分方程描述的系统，或者说，含有非线性元件的系统，均称为非线性系统（nonlinear system）。严格地讲，大部分系统都是非线性的。在过去出现的控制系统大都被视为是线性的，实际上是采用了系统的一个线性模型来代替了真实的系统，系统中的一些非线性关系被用线性关系代替了，或者是被忽略了。但是，对于非线性程度比

较严重，且系统工作范围较大的非线性系统，必须针对它固有的非线性数学模型，采用非线性系统控制理论进行分析和设计研究。

在本科“反馈控制理论”课程中曾接触过一些非线性系统的分析问题，那里所讲的非线性系统主要是指含有典型非线性特性（死区、饱和、间隙和继电器特性等）的系统。所谓典型非线性特性，是指可以用分段折线来代替其实际的非线性曲线，而由此所产生的误差是处于工程所允许的范围之内的。用折线代替了非线性特性曲线后，系统就变成了分段线性化的系统，在每个分段内均可采用线性系统（linear system）的方法、理论进行分析。本书中所研究的非线性系统，主要是用一般的非线性解析函数描述的非线性系统。

实际中有许多非线性系统的例子，典型的有机器人系统、倒立摆系统、电力系统、宇宙飞船控制系统和生物医学工程系统等。

例 1.1 两连杆机械臂系统。考虑如图 1.1 所示的两连杆机械臂系统。

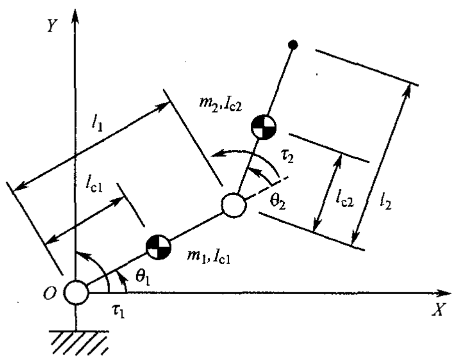

图 1.1 两连杆机械臂系统示意图

根据力学原理，可得到如下的动力学方程：

$$M(\theta)\ddot{\theta}+C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta}+G(\theta)=\tau \tag{1.1}$$

式中，$\theta=[\theta_1\ \ \theta_2]^{\mathrm{T}}$ 为机器人广义位置坐标向量；$M(\theta)$ 为惯性矩阵；$C(\theta,\dot{\theta})$ 为哥氏力及离心力项；$G(\theta)$ 为重力项或未知扰动；τ 为控制力矩向量。各项具体形式为

$$M(\theta)=\begin{bmatrix} m_1l_{c1}^2+I_{c1}+m_2(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos\theta_2)+I_{c2} & m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos\theta_2)+I_{c2} \\ m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos\theta_2)+I_{c2} & m_2l_{c2}^2+I_{c2} \end{bmatrix}$$

$$C(\theta,\dot{\theta})=\begin{bmatrix} -m_2l_1l_{c2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & -m_2l_1l_{c2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ m_2l_1l_{c2}\dot{\theta}_1\sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta)=\begin{bmatrix} m_1gl_{c1}\cos\theta_1+m_2g(l_1\cos\theta_1+l_{c2}\cos(\theta_1+\theta_2)) \\ m_2gl_{c2}\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

显然，该系统具有明显的非线性特征，有关非线性项的忽略会影响机械臂的动态性能。因此，对该系统进行分析和设计时，必须针对其非线性方程式（1.1），使用非线性系统理论。

例 1.2 单机无穷大电力系统。考虑电力系统中所研究的单机无穷大同步发电机系统，其结构示意图如图 1.2 所示。

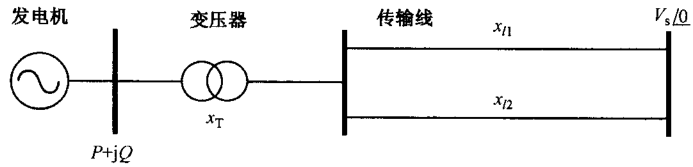

图 1.2 单机无穷大同步发电机系统的结构示意图

根据牛顿第二定律和法拉第电压定律，可得到描述其机械和电气方面动态性能的经典三阶数学模型如下：

$$\begin{cases}\dot{\delta}=\omega_s\omega_r\\ \dot{\omega}_r=-\dfrac{D}{M}\omega_r+\dfrac{1}{M}\left(P_m-\dfrac{E_q'V_s}{X_{d\Sigma}'}\sin\delta\right)\\ \dot{E}_q'=\dfrac{1}{T_{d0}}\left(-\dfrac{X_{d\Sigma}}{X_{d\Sigma}'}E_q'+\dfrac{X_d-X_d'}{X_{d\Sigma}'}V_s\cos\delta+E_{fds}+u_f\right)\end{cases} \tag{1.2}$$

式中，δ 为发电机转子的角度；$\omega(t)$ 为发电机的相对角速度；ω_s 为同步旋转角速度；E_q' 是 q 轴暂态电动势；P_m 为发电机原动机的机械输出功率；V_s 为无穷大系统母线电压；D 为阻尼系数；H 为惯性常数；T_{d0} 为励磁绕组的时间常数；E_{fds} 为对应系统稳态运行时的给定励磁电压；u_f 为发电机的励磁控制电压。$X_{d\Sigma}=X_d+X_T+X_L$，$X_{d\Sigma}'=X_d'+X_T+X_L$，其中，$X_d$ 为发电机直轴阻抗；X_d' 为发电机直轴暂态阻抗；X_T 为变压器阻抗；X_L 为传输线阻抗，$X_L=\dfrac{x_{l1}x_{l2}}{x_{l1}+x_{l2}}$。

显然，式（1.2）为典型的非线性系统描述，若要设计一个保证系统具有好的运行动态性能的励磁控制器，应该使用非线性系统设计理论。这些在后续章节中将会介绍。

2. 非线性系统的数学模型

非线性系统的动态方程一般描述为如下的数学表达式：

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x,u)\\ y=h(t,x,u)\end{cases} \tag{1.3}$$

式中，$x\in R^n$ 为状态向量；$u\in R^m$ 为控制向量；$y\in R^p$ 为输出向量；$f:R_+\times R^n\times R^m\to R^n$，$h:R_+\times R^n\times R^m\to R^p$ 均为连续函数向量，即

$$f(t,x,u)=\begin{bmatrix}f_1(t,x,u)\\ f_2(t,x,u)\\ \vdots\\ f_n(t,x,u)\end{bmatrix},\quad h(t,x,u)=\begin{bmatrix}h_1(t,x,u)\\ h_2(t,x,u)\\ \vdots\\ h_p(t,x,u)\end{bmatrix}$$

其中，$f_i(t,x,u)$、$h_j(t,x,u)\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p)$ 是连续函数。此系统称为非线性时变系统（nonlinear time-varying system）或非线性非自治系统（nonautonomous system）。

第一个微分方程式称为状态方程（state equation），第二个代数方程式称为输出方程（output equation）。如果对于任意 $t\in R_+$，式（1.3）系统关于 x 和 u 是线性的，则系统的数学表达式可写为

$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u \\ y=C(t)x+D(t)u\end{cases} \tag{1.4}$$

式中，$A:R_+\to R^n\times R^n$，$B:R_+\to R^n\times R^m$，$C:R_+\to R^p\times R^n$，$D:R_+\to R^p\times R^m$ 均为具有相应维数的时变系数矩阵。显然，式（1.4）表示的是线性时变系统（linear time-varying system）。

如果式（1.3）系统中的函数向量 $f(t,x,u), h(t,x,u)$ 不明显依赖于时间 t，则系统的数学表达式变成

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u) \\ y=h(x,u)\end{cases} \tag{1.5}$$

这时称系统为自治系统（autonomous system），或时不变系统（time-invariant system）。线性定常系统（linear time-invariant system）是它的特例，描述为

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}u \\ y=\boldsymbol{C}x+\boldsymbol{D}u\end{cases} \tag{1.6}$$

式中，$\boldsymbol{A}\in R^n\times R^n$，$\boldsymbol{B}\in R^n\times R^m$，$\boldsymbol{C}\in R^p\times R^n$，$\boldsymbol{D}\in R^p\times R^m$ 均为相应维数的常数矩阵。

另外，在系统分析的大多数情况，所考虑的系统状态方程中不出现输入 u，即系统描述为所谓的非驱动状态方程形式

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.7}$$

须指出：这并不意味着对系统的输入 u 一定是 0，而是可能系统的输入 u 已经被设定为关于时间 t 的函数 $u=\alpha(t)$，或是关于状态 x 的反馈函数 $u=\alpha(x)$，或同时是时间 t 和状态 x 的函数 $u=\alpha(t,x)$，则将输入 u 的表达式代入式（1.3）的状态方程中，即可消去输入 u 得到式（1.7）。

而在系统综合设计中，所研究的系统是包含于式（1.5）中的一类系统，关于控制输入 u 是线性的，其描述为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+g(x)u \\ y=h(x)\end{cases} \tag{1.8}$$

这类系统称为仿射系统（affine system），是获得分析与设计方法理论最多的一类非线性系统。

3. 非线性系统的特点

线性系统的重要特征是可以应用线性叠加原理。由于描述非线性系统运动的数学模型为非线性微分方程，因此叠加原理不能应用，故能否应用叠加原理是两类系统的本质区别。非线性系统的运动主要有以下特点：

（1）多平衡点

按照平衡状态的定义，在无外作用且系统输出的各阶导数等于零时，系统处于平衡状态。或者说 $\dot{x}\equiv 0$ 时的状态，称为系统的平衡点（equilibrium）。

对于式(1.6)线性定常系统，$x=0$ 是系统的平衡点。如果 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异矩阵，那么 $x=0$ 是线性系统唯一的平衡点，如果 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵，那么系统平衡点集将是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 零向量空间，即有无穷多个平衡点。但是对于渐近稳定的系统而言，总是只有一个平衡点，因为此时 $\boldsymbol{A}$ 显然为非奇异的。而当 $\boldsymbol{A}$ 奇异时，若给 $\boldsymbol{A}$ 的元素一个适当的无限小扰动将几乎肯定地使它变成非奇异。因此，线性系统在很大程度上不会出现一个以上的平衡点。平衡点的稳定性就是系

统的稳定性，所以对于线性系统，可以说系统是稳定的或不稳定的，而非线性系统可能存在多个平衡点。所以，判别非线性系统稳定性时实际是指某一个平衡点处的稳定性，不能笼统地说系统是稳定的还是不稳定的。

例 1.3　考虑如下微分方程描述的非线性一阶系统：

$$\dot{x} = -x + x^2 = x(x-1) \tag{1.9}$$

令 $\dot{x}=0$，可知该系统存在两个平衡状态 $x=0$ 和 $x=1$。分析系统的稳定性，需要分别判断系统在这两个平衡点处的稳定性。

例 1.4　考虑例 1.2 中所给出的单机无穷大电力系统（$u_{\mathrm{f}}=0$）的平衡点，令 $\dot{\delta}=0, \dot{\omega}_{\mathrm{r}}=0, \dot{E}'_{\mathrm{q}}=0$，可知式（1.2）系统的平衡状态满足如下条件：

$$\omega_{\mathrm{r}}=0, P_{\mathrm{m}}=\frac{E'_{\mathrm{q}}V_{\mathrm{s}}}{X'_{\mathrm{d}\Sigma}}\sin\delta, E_{\mathrm{fds}}=\frac{X_{\mathrm{d}\Sigma}}{X'_{\mathrm{d}\Sigma}}E'_{\mathrm{q}}-\frac{X_{\mathrm{d}}-X'_{\mathrm{d}}}{X'_{\mathrm{d}\Sigma}}V_{\mathrm{s}}\cos\delta$$

显然，系统存在两个平衡点 $(\delta_{\mathrm{s1}},0,E'_{\mathrm{qs1}})$ 和 $(\delta_{\mathrm{s2}},0,E'_{\mathrm{qs2}})$，$0<\delta_{\mathrm{s1}}<\pi/2,\ \delta_{\mathrm{s2}}=\pi-\delta_{\mathrm{s1}}$。但是从系统的物理意义上讲，第一个平衡状态是稳定的，而第二个平衡状态是不稳定的。

（2）初始条件对系统的稳定性有影响

线性系统的稳定性只取决于系统本身的结构和参数，与外作用和初始条件无关。而非线性系统平衡点处的稳定性不仅与系统的结构和参数有关，而且与系统的初始条件有直接的关系。

例如，考虑例 1.3 所给出的简单的一阶非线性系统，为了分析系统各个平衡状态的稳定性与初始条件的关系，现通过求解方程式（1.9）来进行分析。设 $t=0$ 时，系统的初始状态为 x_0，由式（1.9）得 $\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}=\mathrm{d}t$，两边同时积分，得

$$x(t)=\frac{x_0\mathrm{e}^{-t}}{1-x_0+x_0\mathrm{e}^{-t}} \tag{1.10}$$

可见，相应的时间响应随初始条件的不同而变化：

① 当 $x_0=1$ 时，由式（1.10）可知，$x(t)=1$；$x_0=0$ 时，$x(t)=0$。0 和 1 两点正是系统的两个平衡点。

② 当 $x_0>1$ 时，由式（1.10）可知，有限时间内分母将会为零，由 $1-x_0+x_0\mathrm{e}^{-t}=0$，得 $t=\ln\frac{x_0}{x_0-1}$，此时 $x(t)$ 将趋于无穷大。在有限时间内系统状态会趋于无穷大的这种现象是非线性系统所特有的现象，称为逃逸现象，而产生逃逸现象的时刻称为有限逃逸时间（finite escape time）。因此，当 $x_0>1$ 时，随时间 t 的增大，$x(t)$ 递增，并在 $t=\ln\frac{x_0}{x_0-1}$ 时，响应 $x(t)$ 发散。

③ 当 $x_0<1$ 时，$x(t)$递减，并且当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$。

不同初始条件下的时间响应曲线如图 1.3 所示。

从所得到的时间响应曲线上可以看出：初始条件不同，自由运动的稳定性也不同。并且平衡状态 $x=1$ 是不稳定的，因为如果有扰动使系统稍有偏离此平衡状态，系统都不能再恢复到原平衡状态；而平衡状态 $x=0$ 在一定范围的扰动下（$x_0<1$）是稳定的。

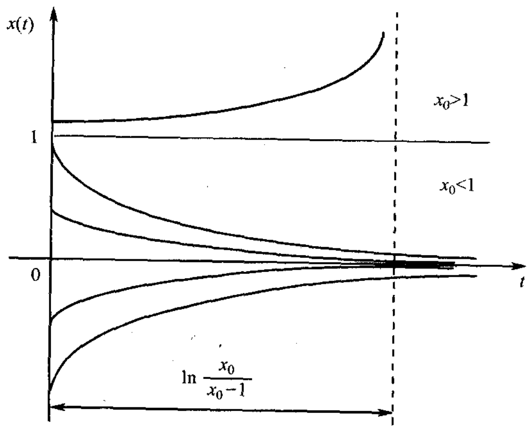

图 1.3 不同初始条件下的时间响应曲线

（3）可能存在自激振荡现象

所谓自激振荡是指没有外界周期变化信号的作用时，系统内产生的具有固定振幅和固定频率的稳定周期运动，简称自振。这种现象的特点是：

① 振动幅值与初始条件无关。

② 系统参数变化对其不产生影响。

我们知道，线性定常系统在临界稳定的情况下能产生等幅的周期振荡。考虑图 1.4 所示二阶零阻尼线性系统，设初始条件 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=\dot{x}_0$，系统的自由运动方程为

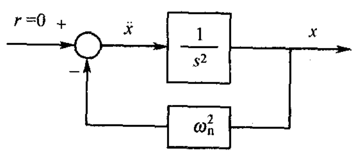

图 1.4 二阶零阻尼线性系统

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=0$$

用拉普拉斯变换法求解该微分方程得

$$X(s)=\frac{sx_0+\dot{x}_0}{s^2+\omega_n^2}$$

进而得到系统的自由运动方程式为

$$x(t)=\sqrt{x_0^2+\dot{x}_0^2}\sin(\omega_n t+\arctan\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0})=A\sin(\omega_n t+\varphi)$$

其中，振幅 $A=\sqrt{x_0^2+\dot{x}_0^2}$ 和相角 $\varphi=\arctan\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}$ 依赖于初始条件。

此外，根据线性叠加原理，在系统运动过程中，一旦外扰动使系统输出 $x(t)$ 或 $\dot{x}(t)$ 发生偏离，则 A 和 φ 都将随之改变，因而上述周期运动不是自激振荡。

自激振荡是非线性所特有的现象。现在考虑著名的范德波尔方程：

$$\ddot{x}-2\rho(1-x^2)\dot{x}+x=0,\ \rho>0 \tag{1.11}$$

该方程描述的是具有非线性阻尼的非线性二阶系统。当扰动使 $x<1$ 时，因为 $-\rho(1-x^2)<0$，系统具有负阻尼，此时系统从外部获得能量，$x(t)$ 运动呈发散形式；当 $x>1$ 时，因为 $-\rho(1-x^2)>0$，系统具有正阻尼，此时系统消耗能量，$x(t)$ 运动呈收敛形式；而当 $x=1$ 时，系统为零阻尼，系统运动呈等幅振荡形式。上述分析表明，系统能克服扰动对 x 的影响，保持幅值为 1 的等幅振荡，如图 1.5 所示。

对于二阶系统，可根据状态 $x(t), \dot{x}(t)$ 建立相平面，利用系统的时间响应曲线可在相平面上得到相轨迹。如果系统存在自激振荡，在相平面上就存在着一簇封闭的曲线，称为极限环（limit cycles）。系统沿极限环的运动就表现为自激振荡。

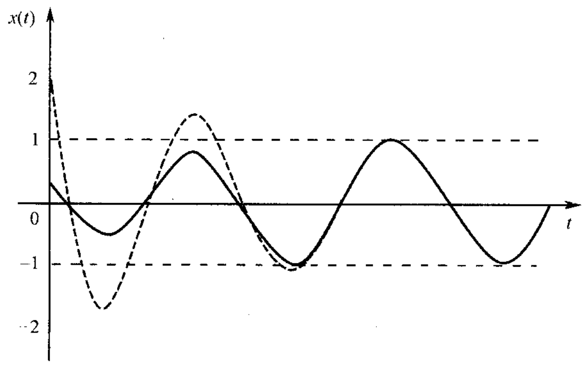

图 1.5　非线性系统的自激振荡

（4）分歧现象

非线性系统的参数量变可能会导致系统特性的质变，这种现象为分歧现象（bifurcation）。例如，考虑如下微分方程描述的二阶非线性系统：

$$\ddot{x} + ax + x^3 = 0$$

选取状态变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$，则得到状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - x_1^3 = x_1(-a - x_1^2) \end{cases}$$

可见，当参数 $a > 0$ 时，系统只有一个平衡点 $(0,0)$，且为稳定的平衡点；而当参数发生变化，变为 $a < 0$ 时，系统有三个平衡点 $(0,0)$，$(\sqrt{-a},0)$ 和 $(-\sqrt{-a},0)$。

（5）混沌现象

非线性系统可能会存在一种非常复杂的稳态性能表现，它不是平衡点，也不是周期振荡，这种现象称为混沌（chaos）。此现象表明的是系统输出的不可预测性，表明系统的输出对初始条件极为敏感。

需注意，混沌现象与随机过程的区别：随机过程的输入或系统模型含有不确定性，导致系统的输出不可预测；而混沌是在研究的问题确定的情况下，系统输出却是不可测的。大多数混沌现象出现在强非线性系统中。

总之，非线性系统广泛存在于各种实际问题中，它具有许多与线性系统完全不同的特点。

1.2　非线性系统解的存在性和唯一性

由 1.1 节给出的非线性系统的数学描述可知，非线性系统模型是采用状态空间的表达形式，一阶微分方程组中含有解析的非线性函数。由于非线性系统比较复杂，其微分方程的解可能不存在、不唯一或不能延拓到适当大的时间范围，因此，非线性系统理论在建立了系统数学模型后，需要分析系统解的存在性、唯一性和延拓性。在保证了系统解的存在和唯一性