全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

21世纪全国高校创新型人才培养规划教材

现代数学概论

王黎辉　编著

兵器工业出版社

前　言

《现代数学概论》是由全国高校素质教育教材研究编审委员会审定，并被列入“21 世纪全国高校创新型人才培养规划教材”.

19 世纪 30 年代以来，现代数学的发展出现了群峰竞秀、蓬勃发展的新局面. 随着时间的变迁，现代数学的内容和思想不断地渗透到经典数学的研究中，如何将现代数学的知识渗透到大、中学数学教学中去，用现代数学的观点去理解、把握初等数学的内容，这是高等师范院校数学系师生与中学数学教师面临的一个课题. 现在我们所要做的工作就是开设与现代数学有关的课程，编写与现代数学有关的通俗易懂的参考书籍.

本书的主要任务：一是介绍现代数学的基本理论及新进展；二是为读者提供可参考的现代数学及其应用的问题，特别是为近几年来在自然科学界引起广泛兴趣的非线性数学——分形几何和混沌学提供一些参考.

本书立足于高等师范院校数学本、专科的数学基础实际，简要介绍现代数学的基础知识及其应用. 本书在编写的过程中，力图做到以下两点：(1) 在数学上论证是严格的，基本自封；(2) 力求做到深入浅出，使具有一定数学基础的读者都可以看懂本书所讨论的主要问题的思想.

当然这些都只是作者本人的愿望. 由于水平有限，书中失误缺陷一定难免，欢迎读者批评指正.

本书初稿曾在我校数学系本、专科选修课上讲授过多次，在此基础上充实并整理成本书.

作者

2007 年春

目录

绪 论

1. 现代数学的对象、观念和方法

一般说来，现代数学是指 19 世纪 30 年代以后诞生的数学. 它的主要标志是：非欧几何、群论、四元数及集合论的创立. 此后发展起来的数学：非欧几何、抽象代数、集合论、拓扑学、泛函分析、数理逻辑、数学基础，以及 20 世纪末诞生的非线性数学——分形几何和混沌等都是现代数学的内容.

由于观察和思考问题的角度不同，人们对现代数学的对象、思想观念和方法都作了各种不同的描述.

在 19 世纪下半叶，恩格斯(Engels)对数学的对象给出了定义：纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料. 如果说这是对集合论产生以前的数学研究对象的科学概括的话，那么对现代数学而言，今天就要对“空间形式”和“数量关系”作本质上的推广. “空间形式”应理解为抽象空间的任一子集；“数量关系”应理解为集合与集合之间的一般关系. 在现代数学中，将数、数的计算、函数、曲线(面)分别推广为一般集合的元素、集合的运算、集合的映射、一般空间的任意流形，等等. 因此，现代数学是以任意集合及其间的种种关系为研究对象.

柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)指出，现代数学的观念就是：

(1)纯集合论是所有数学的基础.

(2)数学的各专门分支研究某一特殊类型的数学结构，每一结构类型由相应的公理体系确定. 数学所感兴趣的仅仅是结构的一些性质，它们是由所采用的公理体系导出的，即研究结构仅仅精确

到同构.

因此,现代数学以集合论为基础,普遍采用公理化方法、数学结构观点和同构观点进行统一处理.

现代数学通过模式的构建与现实世界密切联系,但又借助抽象的方法,强调思维形式的探讨;现代技术渗透于现代数学之中,成为现代数学的实质性内涵,“机器证明论”的兴起,改变了人们只承认逻辑证明的传统观点,但抽象的数学思维仍然是现代数学的一种创造性的活动;现代数学其实也是一种特殊的语言,它全面使用集合论符号和数理逻辑符号,使语言更加统一和形式化,由此形成的思维方式,不仅决定了人类对物质世界的认识方式,同时也对人类理性精神的发展具有重要的影响,因而必然成为人类文化的一个重要组成成分.这充分反映了现代数学是一多元的综合产物.

2. 现代数学发展的新特点

现代数学是一种动态的科学,因为作为人类活动的现代数学,必然随着试验与应用的新发现而不断变化、不断发展;并且也必然与人类活动的各个领域,也就是与各种自然科学、社会科学及思维科学等有着广泛而密切的联系.现代数学绝不可能缩进象牙塔里而向应用关上大门,只有从人类智慧的巨大宝库中汲取更多的营养以适应自身探索知识的需要,也只有作为一个多元的综合体,才能真正地取得现代数学的发展.

当今现代数学的发展趋势有以下新特点:

(1)现代数学内部各分支间的相互渗透,以及现代数学与其他科学的交叉融会,连续和离散、有限和无限、纯粹和应用、结构和算法、随机和确定、局部性质和整体性质的对立与整合.特别是从线性到非线性:混沌、分形、动力系统;从交换到非交换:矩阵、算子的乘法都是不可交换的;从1维数学到高维数学,特别是4维和无穷维等趋势更加明显.从数学应用的传统领域——物理学到生物学、经济学等这些新兴的数学应用的大“客户”,现代数学几乎成了自然科学、技术科学与管理科学的共同智力资源.

(2)计算机的发展使现代数学成了形式科学与实验科学两种不同的知识类型的结合,在思维形式与研究方法等各方面都需要在差异中寻求平衡.计算机的发展为现代数学开辟了新的研究领域,不仅使古老的数学领域获得复苏,也开辟了关于算法理论及可行性等更为新颖有趣的数学问题的源泉.计算机的发展为现代数学研究提供了新工具,形成了现代数学活动的新形式.

(3)现代数学的应用领域日趋广泛.宇宙之大、粒子之微、火箭之速、地球之变、生物之谜等各个方面,无处不有现代数学的重要贡献,现代数学的触角几乎伸向了一切领域.

现代数学发展到今天,已经分为基础数学、应用数学和数学技术三大部分,而数学技术是"未来高科技的核心".

3.现代数学与初等数学的联系途径

首先要说明什么是初等数学.普通中学(初中与高中)数学教学内容就是"初等数学".然而,"初等数学"本身还是需要界定的."初等数学"主要有以下三种含义:第一种含义是数学史意义下的初等数学,数学史家将数学的发展分作四个时期:原始数学时期、初等数学时期、古典高等数学时期和现代高等数学时期.也有分作五个时期即加上"当代数学时期"的.无论如何分期,皆将第二个时期称为"初等数学时期",这个时期的数学知识和经验,就是"初等数学".第二种含义是理论意义下的初等数学.按照恩格斯的经典分类法,所谓初等数学就是常量数学,高等数学是变量数学,而且将笛卡儿(Descartes)于1637年发明的解析几何学作为出现高等数学从而进入高等数学时期的标志.第三种含义是教育意义下的初等数学,即凡是普通中学阶段的教学内容称为初等数学.以上三种含义是不同的,但又有相同之处.我们这里取第三种含义,这是因为我们研究的是普通中小学的数学教学.当然,由于教学改革等原因,这种初等数学也是在变化的.比如,平面解析几何在20世纪50年代到1964年就不是"初等"的,而现在却被纳入了普通中学数学教学内容之中.

从现代数学发展的历史来分析，现代数学是多级抽象的结果，它的原型和特例大都是来自变量数学，而变量数学的原型和特例又来自常量数学，而现代数学无疑最终还是扎根于现实世界的空间形式和数量关系之中．但是由于现代数学的高度抽象性，使它与中学数学拉大了距离，中学数学教师很少接触现代数学的知识，因此中学数学教师不喜欢现代数学是个普遍的问题．

但是，随着全国中学生数学竞赛，主要是全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克和国际数学奥林匹克（IMO）的水平的不断提高，现代数学的思想和方法在中学数学中的渗透也越来越普遍和深入．这就要求中学数学教师不断拓宽知识面，不断用现代数学的知识充实自己，以适应中学数学教学改革发展的需要．

同时，高师数学专业不仅要开设足够多的现代数学课程，而且要有相应的课程指导师范生用现代数学思想方法和观点，将现代数学与初等数学结合起来，并培养师范生的数学应用意识和应用能力．

现代数学与初等数学联系的途径：首先要把现代数学中的某些概念和理论与初等数学里相应的原型和特例联系起来．这样，就不仅能够加深对现代数学的理解，而且能使我们准确把握初等数学的本质和关键．从而高屋建瓴地处理初等数学的内容．其次，对于初等数学中某些不易交待清楚的问题，要了解其在数学史上产生和解决的过程，弄清它们在现代数学里的背景．其三，用现代数学思想方法，指导初等数学的问题解决．

总之，要力求将现代数学的思想方法全面渗透到初等数学中，要在现代数学概念、理论的通俗化，与初等数学概念、理论的抽象化上，寻找现代数学与初等数学的结合点．

第 1 章　集合和集合论

1.1　集合论语言

众所周知，德国数学家康托(Cantor)于 19 世纪创立的集合论，不仅给当时的数学奠定了坚实的基础，而且随着数学的发展，集合论已成为现代数学的理论基础. 特别是在集合之间建立了映射关系，它的应用就更为广泛. 映射成为集合论中建立现代数学概念和理论的基本工具和手段. 而且，集合和映射作为现代数学的一种重要思想和方法，一种简单而明确的数学语言，已经渗透到现代数学的各个分支. 当然，集合和映射，也是整个中学数学的理论基础.

在朴素集合论(即日常语言表述的集合论)中，集合是一个不加定义的基本概念. 它与初等几何中的点、线、面一样，对它只能进行描述. 如所谓集合就是具有某种性质的对象的全体. 例如，自然数的全体，全国所有的高等学校，实系数多项式的全体都可以构成集合.

如康托所说，“集合”是指人们直观上或思想中完全确定的、不同事物 x 合成的一个整体 A. 这些事物 x 称为 A 的元素，或者说 x 属于 A，记作 $x \in A$. 但康托的话并不能作为集合概念的定义，因为“整体”一词并不比“集合”更浅显明白.

集合论作为语言来说，特别简单，它只有一个最基本动词，叫做“属于”，用“ $\in$ ”表示. 如果 a 是集合 M 的元素，就说 $a \in M$. 用“ $\in$ ”的概念，就可以定义“不属于”($\notin$)，“包含”($\subset$)，“相

等”（＝）等概念了.有了包含关系，就有了子集的概念.

从这些概念出发，再加上一些逻辑语言，例如“或”和“且”，就可以定义集合之间的“并”运算（$\cup$）和“交”运算（$\cap$），还可以定义“差”运算，包括“余”运算.在这基础上，集合论的基本运算便建立起来，并且形成一种代数结构.

在现在的中学数学教材或一般的高等数学书中所用的集合论知识，正是使用这种朴素的集合论知识，下面我们对此作进一步的说明.

集合外延性原则 集合由它所含的元素而唯一确定.两个集合 A 与 B 相等，即 $A = B$，当且仅当

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

集合的元素不重复计算，即一个集合中任意两个元素都是彼此不同的.

不含有任何元素的集合也是集合，称之为空集，用 $\varnothing$ 表示.由集合外延性原则可知，空集是唯一存在的.要保证任何两个集合都可以作交集运算，也需要承认空集的存在.

只含一个元素 a 的集合 $\{a\}$，称为单元素集合或单子集.这里要注意 a 与 $\{a\}$ 的区别：a 是个体，$\{a\}$ 是整体，两者是不同层次的概念.

若 $A,B,\cdots$ 是一些集合，把它们放在一起构成一个新的集合 $\{A,B,\cdots\}$，这种集合是以集合作为元素.我们把集合的集合称为**集族**.

例如，设 A 是平面上的直线 $x+y+1=0$ 上所有点的集合，B 是平面上的平行线 $x+y+p=0$ 的集合，于是集合 A 是集合 B 的一个元素，即 $A \in B$.

概括性原则 可以用一类事物的某一共有的特殊性质 p，来规定一个集合：凡是具有性质 p 的事物 x（记为 $p(x)$）合成一个集合 $p = \{x \mid p(x)\}$.

例如，上面两个集合就可以写成

$$A=\{(x,y)\mid x+y+1=0\},$$
$$B=\{l_p\mid l_p: x+y+p=0\}.$$

又如,全体偶数所成之集合 M,由概括性原则可以写成

$$M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2n, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

由概括性原则确定集合的方法是有缺陷的,如不加以限制,就会产生"罗素悖论",这在本章还会涉及.

子集 把集合 A 中一部分元素合成一个整体所形成的集合 M,称作 A 的子集,记作 $M\subseteq A$(或 $A\supseteq M$).

任何非空集合 A 都有两个当然子集:自身 A 和空集 $\varnothing$. 空集则只有唯一的子集——它自身. 空集是任何集合的子集. 一个集合的非当然子集称为真子集.

在一般情况下,无需区别一个集合的当然子集和真子集,因此用一个包含符号"$\subseteq$"就行了. 如果 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$,则记为 $A\subset B$,读作 A 真包含于 B.

属于"$\in$"与包含"$\subseteq$"这两种符号的意义是不同的. 前者是元素(个体)与集合(整体)之间的关系;后者是集合与集合之间的关系. 另外,两者的性质也不同.

例如,集合的包含关系具有反身性和传递性,即对任意集合 A, B, C, 都有:

(1) $A\subseteq A$(反身性);

(2)若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$(传递性).

但属于关系($\in$)却不具有上述性质.

集合确定之后,再通过 $\subset$, $=$, $\cup$, $\cap$, $\backslash$ 等关系和运算,就能用符号来形式地表达许多数学公式和内容了.

例 1 设 l 与 l' 表示平面上的直线 $ax+by+c=0$ 与 $a'x+b'y+c'=0$,即分别为:

$$l=\{(x,y)\mid ax+by+c=0\},$$
$$l'=\{(x,y)\mid a'x+b'y+c'=0\}.$$

这时

(1) $l \cup l' = \{(x,y) \mid (ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0\}$.

(2) 如果 $ab'-a'b \neq 0$, 则 $l \cap l'$ 是单元素集,

$$l \cap l' = \{(x,y) \mid ab'-a'b \neq 0, ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0\}$$
$$=\{(\frac{c'b-b'c}{ab'-a'b}, \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b})\}.$$

(3) 如果 $ab'-a'b=0$, 且 $b'c-c'b=0$, 则 $l=l'=l\cap l'$;
如果 $ab'-a'b=0$, 且 $b'c-c'b\neq 0$, 则 $l\cap l'=\varnothing$.

从几何的观点说,这表示 l 与 l' 或者交于一点,或者重合,或者彼此平行.

由此可以看出,使用集合论符号,比使用日常语言既准确又明白,可以帮助我们更迅速地进行思考.集合论语言是一种很好的数学语言,它将许多日常语言符号化、形式化,这就使计算机便于理解、掌握和应用.历史上,代数语言代替算术语言,使数学向前迈进一大步,集合论语言的作用将会有过之而无不及,这是康托始料所不及的.

1.2 集合的幂集

在一些数学问题中,有时往往需要对某个集合 X 进行分析,而一个有效地着手方式就是把集合 X 分割成一些较简单的子集,于是只要通过对子集的分析,再把它们集中起来就能得出所需要研究的集合 X 的情形.

下面,我们给出幂集的定义.

定义 1.2.1 设 A 为任意集合,由 A 的所有子集(包括 A 和 $\varnothing$)作为元素的集合,称为 A 的**幂集**,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}.$$

若 A 是有限集,元素个数为 n, 那么 $P(A)$ 也是有限集,且有

2^n 个元素.

事实上,若 A 有 n 个元素,则由 A 中 k 个元素所构成的子集共有 C_n^k 个,这里 k 可从 0 取到 n,所以 A 的所有子集的个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

即 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

例如,设 $X = \{a,b,c\}$,则 X 的幂集是 $P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ 共有 8 个元素.

例 2　(1972 年南斯拉夫数学竞赛题)对每个 $n \in \mathbf{N}$,求最大的整数 $k \in \mathbf{N}$,使得在 n 元集合中,可以取出 k 个子集,其中任意两个子集的交集非空.

证明　设此 n 元集合为 $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,在 X 中取定一个元素 a_1,并只考虑含 a_1 的子集,这类子集的个数为集合 $\{a_2, \cdots, a_n\}$ 的子集的个数为 2^{n-1} 个,因此 $k \geqslant 2^{n-1}$. 另一方面,设从集合 X 中取出至少 $2^{n-1}+1$ 个子集,将集合 X 的所有子集($2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ 个)分为 2^{n-1} 对,每一对由一个子集及其补集组成. 于是由抽屉原理,所取的子集至少有两个组成一对,因此它们不交,于是 $k = 2^{n-1}$.

1.3　集合的运算

设 A, B 为两个集合,则如下规定它们的并集、交集和差集:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

特别地,若设 A 是所有对象合成的集合——全集 I,那么它与集合 B 的差集,称为 B 的补集(或余集),它由所有不属于 B 的元素组成:

$$\overline{B} = I \backslash B = \{x \mid x \notin B\}.$$

利用韦恩(*Venn*)创造的文氏图,可以把集合运算的结果直观地表示出来,并可以证明有关交集、并集、补集的如下运算律:

Ⅰ. **幂等律**　$A \cup A = A, A \cap A = A.$

Ⅱ. **交换律**　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

Ⅲ. **结合律**　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

Ⅳ. **分配律**　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

Ⅴ. **吸收律**　$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$

Ⅵ. **对合律**　$\overline{\overline{A}} = A.$

Ⅶ. **德·摩根律**　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

这些公式可以推广到任意多个集合的并与交的情况.

1.4　集合论公理

由于集合论语言概括性很强,如果不加以限制,就会出现悖论,使其陷入自相矛盾的境地. 康托在 1895 年就从严格的意义上发现了"由一切集合构成的集合 M"是一个悖论,但当时并未引起足够重视. 直到 1903 年英国哲学家兼数学家罗素(Russell)提出"罗素悖论",揭示了集合论本身存在的矛盾,动摇了整个数学大厦的基础,终于引起数学界的极大震动.

罗素悖论的通俗说法,就是这样的一个理发师悖论:一个乡村理发师宣称,他只给自己不刮脸的人刮脸,不给自己为自己刮脸的人刮脸. 有一天人们问他:你本人的脸由谁来刮呢?——如果由他本人自己刮脸,按他的声明,他便不该给自己刮脸;如果由别人给他刮脸,那么他又应该给他本人刮脸. 于是这个理发师陷入了逻辑矛盾之中.

人们发现,产生悖论的原因在于集合概念范围任意扩大和随意使用.因此数学家们设法用公理化方法对集合概念加以限制,将那些产生悖论的集合排除在外.

1908年,策梅洛(Zermelo)首先提出采用把集合论公理化的方法来消除罗素悖论,他实行的计划是用一组公理来定义集合,这就是公理集合论的开端.策梅洛的集合论公理一共七条,由于这些公理不够完善,再经弗伦克(Fraenkel)等修改补充就成了ZF公理体系.在这一公理系统中,排除了罗素悖论,即将羊用栏杆围起来,把已知的狼隔在外面,至于围栏中是否有披着羊皮的狼,目前还不知道.

当然,ZF或ZFC系统并非十全十美.例如,公理Ⅶ是不独立的,只是因为它使用方便才用作公理.ZF系统也是不完备的,它的相容性也不能在本系统内给以证明.按照ZFC系统,任何集合都可以良序化,但迄今尚未找到实数集良序化的具体方法.

这里值得注意的是选择公理.这条公理似乎很明显了,但是可否随便使用,引起数学家的不同意见.1924年,波兰数学家巴拿赫(Banach)和塔尔斯(Tarski)证明,任意闭球W可以分为两个不相交的子集U,V,即$W=U\cup V,U\cap V=\varnothing$,但$W$和$U,V$的每一个都全等.这在直观上等于说一个球可以重新做出两个和它一样大的小球,真是咄咄怪事,故此定理称为分球怪论.它之所以奇怪,根源在于选择公理.那么,不用选择公理行不行?当然不行!因为它会破坏现存数学的许多结论,而出现新的怪论.

在这个公理体系中,集合和属于关系($\in$)作为原始概念,由以下一组公理加以刻画:

Ⅰ.外延公理　对于任意两个集合A,B,都有$A=B\Leftrightarrow$若$x\in A$,则$x\in B$,而且若$x\in B$,则$x\in A$.

Ⅱ.空集存在公理　存在一个不含任何元素的集合——空集,记为$\varnothing$.

Ⅲ.无序对集合存在公理　对于任意集合x,y,都存在集合

Z，它仅有两个元素 x,y，记为 $Z=\{x,y\}$，其中 x,y 是无序的. 如果 $x=y$，则 $Z=\{x\}$ 是单元素集.

有序对则规定为 $(x,y)=\{x,\{x,y\}\}$. 显然 $(x,y)\neq(y,x)$. 这样就给定了 (x,y) 中元素的顺序：x 为第一元，y 为第二元.

Ⅳ. 并集合公理 对于任意集合 x，都存在一集合 y，y 的元素恰好是 x 的所有元素的元素. 此时称 y 为 x 的并集合，记为 $\bigcup x$.

由此公理，任意两个集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$，就是 $\bigcup\{A,B\}$. 对于集族 $\{B_a \mid a\in A\}$，它的并集记为

$$\bigcup_{a\in A} B_a \text{ 或 } \bigcup_a B_a.$$

Ⅴ. 幂集公理 对于任意集合 x，都有一个集合 y，y 的元素恰好是 x 的子集合. 此时 y 称为 x 的幂集，记为 $P(x)$.

Ⅵ. 无穷公理 存在一个集合，它的元素恰好是所有自然数. 根据外延公理，这个集合是唯一的，记为 $\mathbf{N}$.

这里的自然数是用下述方法归纳定义的：

$0=\varnothing$；

$1=\{\varnothing\}=0'$（0 的后继）；

$2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=1'$（1 的后继）；

$3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=2'$（2 的后继）；

……

一般地，若 n 已被定义，则

$n+1=\{0,1,2,\cdots,n\}=n'$（$n$ 的后继）.

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

在这里，数 0 是第一个自然数. 之所以这样做，是因为从集合论的观点来看，把空集定义为第一个自然数 0，是再自然不过的了.

所有非零自然数，称为正整数，正整数集常记作 $\mathbf{Z}_+$ 或 $\mathbf{N}_+$.

Ⅶ. 分离公理 对于任意给定的集合论公式命题 $A(z)$ 和任意集合 x，都存在一集合 y，使得

$$y=\{z \mid z\in x \text{ 且 } A(z)\}.$$