21世纪独立学院系列规划教材

线性代数及其应用

王坤 周岩◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪独立学院系列规划教材

线性代数及其应用

王坤　周岩　主编

机械工业出版社

本书包括矩阵、方阵的行列式、线性方程组、n 维向量，矩阵的对角化与二次型、线性空间与线性变换，应用问题选讲，共七章，本书可作为独立学院的教材，也可作为高等院校经济管理类等专业的教材或教学参考书，对报考硕士研究生的学生，也具有较高参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/王坤，周岩主编. —北京：机械工业出版社，2007.7
（21 世纪独立学院系列规划教材）
ISBN 978-7-111-21873-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①王…②周… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 104675 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：郑 玫
责任编辑：张金奎 版式设计：张世琴
责任印制：洪汉军 责任校对：程俊巧
北京京丰印刷厂印刷
2007 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷
169mm×239mm · 5.25 印张 · 202 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-21873-9
定价：16.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379711

前　言

独立学院的诞生，是中国高等教育的新生事物．独立学院的发展，是中国高等教育充满活力的体现．为了更好地探索独立学院应用型本科人才培养的模式，燕山大学里仁学院在线性代数课程教学中，采用了适应性教学方式．力图为不同学习要求、不同学习基础的学生提供适应其发展需求的教学内容，因材施教，让学生在学习过程中感受成功，享受学习的快乐．

本书主要是为满足独立学院开展"适应性"教学需要编写而成的．在编写本书时，我们力求在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面作出较为合理的安排．在保留线性代数基本内容的前提下，以矩阵为主线阐述知识．在编写上，遵循从具体到抽象、从特殊到一般的原则，并考虑到独立学院学生的学习基础，略去了一些理论推导，力求做到通俗易懂．本书可作为独立学院40学时的课程教材使用．

全书共七章，这些章节可供不同要求的教学选用，教学选用建议如下：

1. 基本要求教学篇．该篇由本书的前五章（带*部分除外）组成．该篇与国内目前独立学院通用的线性代数的必修内容基本相同，但作了一些特色处理，如对方程组解及解法的阐述，是以消元法理论为基础，从具体例题入手，描述性地给出齐次线性方程组基础解系的概念与非齐次线性方程组有解的充要条件，简明地给出了用矩阵初等行变换求解线性方程组通解的方法；进而又深入浅出地分析了线性相关、线性无关、向量组的极大无关组、向量组的秩及矩阵的秩这些难点．该部分内容简练，知识引入循序渐近，理论证明推理简洁，是教学中的必修内容，适于独立学院基本要求的教学班使用．

2. 较高要求教学篇．该篇由前五章的全部内容组成，配备了解题方法导引、自测题Ⅰ、Ⅱ等内容，教师可根据教学情况选择解题方法导引的内容．该篇适于独立学院中有较高要求的教学班使用，也可供高等院校经济管理类等专业使用．

3. 知识扩展篇．该篇由第六章、第七章组成．通过对线性空间和线性变换的学习，使学生接触到近世代数的一些思想、方法．通过对应用实例的学习，使学生对运用线性代数知识解决实际问题中所常用的方法有所了解，同时也可提高学生的数学建模能力．本篇可供学生自学用或有条件的院校在教学中选用．

本书由王坤、周岩主编，张波、李秀菊演算了全部例题和习题并参与了校稿工作.

徐玉民教授对本书作了仔细的审校，提出了一些具体的修改意见，为本书增色不少，对此我们表示由衷的感谢.

由于编者水平有限，对于书中出现的不足及欠妥之处，恳请读者和使用教师批评、指正.

编　者

2007年1月于燕山大学

目　录

第一章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一. 它在线性代数与数学的许多分支中都有重要的应用，许多实际问题可以用矩阵表达并结合有关理论得到解决. 在这一章里，我们主要讨论：矩阵的运算，矩阵的初等变换和逆矩阵，以及分块矩阵.

第一节　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

定义 1　由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵. 其中，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵. 如不特别声明，本书中所讨论的矩阵均指实矩阵. $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

$n \times n$ 矩阵称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的左上角至右下角元素的连线称为主对角线，左下角至右上角元素的连线称为副对角线. 1 阶方阵是一个数，括号可略去.

$1 \times n$ 矩阵称为行矩阵或行向量，$m \times 1$ 矩阵称为列矩阵或列向量. 行向量和列向量统称向量. 向量的元素称为分量，由 n 个分量组成的向量称为 n 维向量.

通常用黑体大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, …表示矩阵，用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …或黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, …表示向量. 矩阵与向量有密切联系，矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 可以看成由 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

组成，也可以看成由 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

组成.

元素全是零的矩阵，称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 如果要指明其行数与列数，则记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

行数相同、列数也相同的两个矩阵，称为同型矩阵. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$的对应元素分别相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称这两个矩阵相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的线性运算

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$为两个同型矩阵. 将它们的对应元素分别相加，得到一个新的矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&4\\4&3&5\end{pmatrix}$.

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\lambda$ 为一个数，则矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数乘矩阵，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称$(-a_{ij})_{m\times n}$为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，显然，$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$.

由此可定义矩阵的减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

矩阵的加法和数与矩阵的乘法称为矩阵的线性运算，不难验证矩阵的线性运算满足下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $A+O=A$

(4) $A+(-A)=O$

(5) $1A=A$

(6) $k(A+B)=kA+kB$

(7) $(k+l)A=kA+lA$

(8) $k(lA)=(kl)A$

以上 A, B, C 都是 $m\times n$ 矩阵，k, l 是数.

三、矩阵的乘法

定义 4　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$，则称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的乘积，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记为 $C=AB$.

由上述定义可知，矩阵 A 与 B 的乘积 AB 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于 A 的第 i 行各元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和(如下).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

注意，只有当第一个矩阵的列数等于第二矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例 1　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB.

解

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

由例 2 可知，一般地，$AB\neq BA$，即矩阵的乘法不满足变换律；但矩阵的乘法仍满足下列运算规律：

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

有了矩阵的乘法，就可以定义 n 阶方阵的幂. 设 A 是 n 阶方阵，k 是正整数，定义

$$A^1=A,\ A^2=A^1A^1,\ \cdots,\ A^{k+1}=A^kA^1$$

方阵的幂满足下列运算规律：

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$

(2) $(A^k)^l=A^{kl}$

注意　由于矩阵的乘法不满足交换律，所以在一般情况下（设 A，B 为 n 阶方阵），$(AB)^k\neq A^kB^k$，但如下规律成立.

(3) 设 A，B，是 n 阶方阵，且 $AB=BA$，则

$$(AB)^k=A^kB^k$$

例 3　求证

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

证　用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，等式显然成立. 设 $n=k$ 时等式成立，即设

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & k+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

于是等式得证.

四、矩阵的转置

定义 5 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，把 A 的行列互换而得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 A 的转置矩阵，记为 A^{T}(或 A')，即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

转置矩阵满足下列运算规律(假设运算都是可行的，λ 是数)：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

例 4 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法 1

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & -3\\ 7 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

故

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 8 & 8\\ -3 & 8\end{pmatrix}$$

解法 2

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 8 & 8\\ -3 & 8\end{pmatrix}$$

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对称矩阵，对称矩阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应元素相等.

例5 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证 必要性：设 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 又 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性：设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 因 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

五、对角阵和单位阵

定义6 称方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

为 n 阶对角阵，记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. 特别，当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时，称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或简记为 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

对任一方阵 $\boldsymbol{A}$，恒有 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$，这是单位阵的重要性质，它表明，单位阵在方阵中的地位类似于数1在数乘运算中的地位.

第二节 逆 矩 阵

在第一节中，我们介绍了矩阵的加法、减法、乘法，自然地，我们会想到矩阵的乘法是否也和数的乘法一样有逆运算. 这就是本节要讨论的问题.

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个逆矩阵，并称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

由定义可知，如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其逆矩阵是唯一的，事实上，设 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$$

则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

因逆矩阵是唯一的，故将 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

可逆阵的性质：

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) 如果 A 可逆，那么 A^{T} 也可逆，且 $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

(3) 若 A，B 为 n 阶可逆阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

下面证明性质(3)，其余性质的证明请读者完成.

证　因 A^{-1}，B^{-1}存在，又

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

可知 $B^{-1}A^{-1}$是 AB 的逆矩阵.

更进一步，如果 A_1，A_2，…，A_s 都是同阶可逆阵，那么 $A_1A_2\cdots A_s$ 也是可逆矩阵，且

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

例 1　证明零矩阵不可逆.

证　这是因为对任何矩阵 B，$OB=BO=O\neq E$.（O、B 为同阶方阵）

例 2　若方阵 A 满足等式 $A^2-A+E=O$，问 A 是否可逆？若 A 可逆，求出 A^{-1}.

解　由 $A^2-A+E=O$ 可得

$$A-A^2=E$$

再变形得

$$A(E-A)=(E-A)A=E$$

由逆矩阵的定义可知 A 可逆，且

$$A^{-1}=E-A$$

第三节　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种最基本的运算，它有着广泛的应用，矩阵的初等变换不只是可用语言表述，而且可用矩阵的乘法运算来表示，本节主要介绍矩阵的初等变换的概念及初等变换在求逆矩阵中的应用.

定义 1　矩阵的行(列)初等变换是指下列三种变换：

(1) 互换矩阵中 i，j 两行(列)的位置，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$ $(c_i\leftrightarrow c_j)$；

(2) 用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行(列)，记为 kr_i (kc_i)；

(3) 把矩阵第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去，记为 r_j+kr_i (c_j+kc_i)

矩阵的初等行变换和初等列变换，统称为矩阵的初等变换.

定义 2　由单位阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

对应于三种初等行，列变换，有三种类型的初等方阵.

(1) 互换单位阵 E 的第 i 行(列)与第 j 行(列)的位置得初等阵

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) 以非零常数 k 乘单位阵的第 i 行(列)，得初等阵

$$E_i(k)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

(3) 将单位阵 E 中第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，也相当于第 j 列的 k 倍加到第 i 列上去得初等阵

$$E_{ij}(k)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

例 1 计算下列初等矩阵与矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times n}$, $B=(b_{ij})_{3\times 2}$, $C=(c_{ij})_{3\times 3}$ 的乘积.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}+kb_{31}&b_{12}+kb_{32}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{13}&c_{12}\\c_{21}&c_{23}&c_{22}\\c_{31}&c_{33}&c_{32}\end{pmatrix}$$

由例 1，一般地我们不难得到

定理 1 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换的结果，等于在

$\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换的结果，等于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵.

初等变换对应初等阵，由以上结论，我们很容易验证

$$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{E}_i(k)=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E}$$

所以，初等矩阵都是可逆矩阵，其逆矩阵也为初等阵，且

$$\boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(k),\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}$$

下面介绍用初等变换求逆矩阵的方法.

定理 2 任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，必可经有限次初等变换化为如下形式的矩阵 $\boldsymbol{B}$(称 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形)

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

亦即存在 m 阶初等阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_s$ 与 n 阶初等阵 $\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，…，$\boldsymbol{Q}_l$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_l=\boldsymbol{B}$$

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的形式.

以下不妨设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，经过初等变换，$\boldsymbol{A}$ 一定可以变成一个左上角元素不为零的矩阵.

当 $a_{11}\neq 0$ 时，将第一行的 $(-a_{11}^{-1}a_{i1})$ 倍加到第 i 行上去($i=2, 3, \cdots, m$)，将第一列的 $(-a_{11}^{-1}a_{1j})$ 倍加到第 j 列上去($j=2, 3, \cdots, n$)，并把第一行乘以 a_{11}^{-1}，$\boldsymbol{A}$ 就变成如下形式

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&a'_{22}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a'_{m2}&\cdots&a'_{mn}\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{A}_1$，重复以上的讨论，直至把 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的形式，便可得定理的结论.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩

阵的乘积.

证 充分性是显然的，下证必要性.

由定理2，存在初等阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 及 $Q_1, Q_2\cdots, Q_l$ 使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_l=\begin{pmatrix}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0\end{pmatrix}=B$$

因 A 可逆，故 B 也可逆，从而 B 必定是单位矩阵 E，否则 B 至少有一行全为零，而成为不可逆阵，于是有

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_l=E$$

即

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_l^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}\tag{1.1}$$

由于 P_i^{-1}，$Q_j^{-1}(i=1, 2, \cdots, s; j=1, 2, \cdots, l)$是初等矩阵，故定理得证.

由定理2，还可以得到一种求逆矩阵的方法.

当 A 可逆时，将式(1.1)改写为

$$Q_1Q_2\cdots Q_lP_s\cdots P_2P_1A=E\tag{1.2}$$

及

$$Q_1Q_2\cdots Q_lP_s\cdots P_2P_1E=A^{-1}\tag{1.3}$$

式(1.2)与式(1.3)表明，如果对可逆矩阵 A 和同阶单位阵 E 作同样的初等行变换，那么当 A 变为单位阵时，E 就变为 A^{-1}，即

$$(A \mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E \mid A^{-1})$$

例2 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1}.

解

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times(-1)]{\substack{r_1+r_3\\r_2+r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$$

例 3 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a^2&a&1&0\\a^3&a^2&a&1\end{pmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1}.

解

$$(A\mid E)\xrightarrow[\substack{r_3-ar_2\\r_2-ar_1}]{r_4-ar_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-a&1&0&0\\0&0&1&0&0&-a&1&0\\0&0&0&1&0&0&-a&1\end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-a&1&0&0\\0&-a&1&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}$$

例 4 求解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&3\end{pmatrix}$$

解 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$$

由例 2 知 A 可逆，因此方程两端左乘 A^{-1} 可得

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5\\-2&14\\2&-11\end{pmatrix}$$