

高等学校教材

弹性与塑性力学

——例题和习题——

(第2版)

清华大学 徐秉业 主编

机械工业出版社

高等学校教材

弹性与塑性力学

——例题和习题——

清华大学 徐秉业 主编

黄炎 刘信声

薛明德 孙学伟

浙江大学 林钟祥

参编

主审



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书自1981年出版以来,曾蒙许多院校采用。为了更好地适应教学中的需要并不断丰富书中的内容,撰写了本书的第二版。

本书共有21章,前15章为弹性力学部分,后6章为塑性力学部分。修订时增加了张量分析的初步知识、简单薄壳问题,蠕变力学基本方程和简单问题并将原书中的塑性平面应变问题扩充为滑移线场理论与极值定理及其应用等两章。在弹性平面问题中,加强了对应力函数及其导数物理意义的介绍。在多数章节中,对习题作了较大的更新。并在文字和数学公式推导方面作了改进。习题解答在全书的最后面。

本书是力学、土木、水利、机械、航空、造船、材料等专业大学本科学生和研究生必备教材,也可供以上专业工程技术人员参考。

弹性与塑性力学

——例题和习题——

(第2版)

清华大学 徐秉业 主编

责任编辑:孙祥根 责任校对:丁丽丽
责任印制:卢子祥 版式设计:霍永明

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)
(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社京丰印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $78.7 \times 1092^{1/16}$ · 印张 27 · 字数 665 千字
1980年12月北京第一版

1991年11月北京第二版·1991年11月北京第五次印刷
印数 26,101-28,300 · 定价: 7.30元

ISBN 7-111-02857-0/TB·136(课)

第二版前言

本书自1981年出版之后，被许多院校教师作为教学参考书采用，并多次在教材和专著中加以引用。为了不断丰富弹性与塑性力学中的例题和习题，更适合教学中的需要，我们在原书的基础上撰写了本书的第二版。

近年来在许多弹性力学和塑性力学中都采用了张量表示方法，因而在这次修订中，增加了一章张量分析的初步知识。在平面问题中，加强了对应力函数及其导数物理意义的介绍，这一方法对初学弹性力学的读者掌握应力函数的解法是有益处的。这一版还增加了简单薄壳问题、蠕变力学基本方程和简单问题以及安定性分析等章节，并将原书的塑性平面应变和平面应力问题的有关内容扩充为滑移线场理论和极值定理及其应用等两章。在这些章节中都介绍了基本概念和解题方法。在许多章节中还增加了不少新的例题和习题，并在文字叙述和数学推导上作了改进和修订。

和原书相比，删去了线弹性断裂力学基础和有限单元法等两章，因为这些内容在有关专著中都有详尽的介绍和叙述。

本书的第一、二、三、四、十一章由薛明德教授撰写，第五、十、十二、十四章由孙学伟副教授撰写，第六、七、九、十五章由黄炎教授撰写，第八、十七、十八、二十一章由刘信声副教授撰写，第十三、十六、十九、二十章由徐秉业教授撰写，全书由徐秉业教授统稿。

浙江大学林钟祥教授对本书全部内容进行了认真仔细的审阅和校核，提出了许多十分有益的建议和修改意见，对提高本书第二版的质量作出了重要的贡献。

鉴于本书有相当部分是新撰写的，而且修订时间紧迫，内容和公式虽经反复修订，但错误和不妥之处仍恐难免，诚恳地欢迎读者批评指正。

编者

1990年9月 于清华大学

目 录

<p>第一章 应力理论 1</p> <p> 理论概述 1</p> <p> §1-1 应力状态理论 6</p> <p> §1-2 边界条件 13</p> <p>第二章 应变理论 19</p> <p> 理论概述 19</p> <p> §2-1 位移与应变 24</p> <p> §2-2 一点的应变状态 28</p> <p> §2-3 应变协调方程 32</p> <p> §2-4 由应变求位移, 位移边界条件 33</p> <p>第三章 应力与应变的关系 38</p> <p> 理论概述 38</p> <p> §3-1 一般情况下线弹性体的虎克定律 41</p> <p> §3-2 各向同性弹性体的虎克定律 42</p> <p> §3-3 以能量形式表示的应力应变关系 45</p> <p>第四章 张量分析的初步知识 47</p> <p> 理论概述 47</p> <p> §4-1 张量符号运算规则 55</p> <p> §4-2 各种坐标系与坐标转换关系 57</p> <p> §4-3 张量的代数运算 59</p> <p> §4-4 张量场函数的微分、积分定理及其在力学中的应用(笛卡尔坐标系) 59</p> <p> §4-5 正交曲线坐标系中的张量分析 61</p> <p>第五章 线弹性力学的一般问题 63</p> <p> 理论概述 63</p> <p> §5-1 按位移求解问题 67</p> <p> §5-2 按应力求解问题 69</p> <p> §5-3 应力函数 69</p> <p>第六章 直角坐标解平面问题 73</p> <p> 理论概述 73</p> <p> §6-1 利用边界上Φ及其导数的力学意义解平面问题 75</p> <p> §6-2 用傅氏级数解平面问题 92</p> <p>第七章 极坐标解平面问题 96</p> <p> 理论概述 96</p> <p> §7-1 曲杆、楔体与半平面问题 98</p>	<p> §7-2 厚壁圆筒、旋转圆盘与带孔的板 115</p> <p>第八章 扭转与弯曲 122</p> <p> 理论概述 122</p> <p> §8-1 柱形杆件的扭转 125</p> <p> §8-2 薄壁杆件的扭转 129</p> <p> §8-3 变直径圆轴的扭转 131</p> <p> §8-4 柱形杆件的弯曲 133</p> <p>第九章 空间轴对称及弹性接触问题 135</p> <p> 理论概述 135</p> <p> §9-1 空间轴对称问题 142</p> <p> §9-2 弹性接触问题 149</p> <p>第十章 薄板的小挠度弯曲 156</p> <p> 理论概述 156</p> <p> §10-1 圆板和环板的弯曲 160</p> <p> §10-2 矩形板的弯曲 164</p> <p> §10-3 其它形状板的弯曲 168</p> <p>第十一章 简单薄壳问题 169</p> <p> 理论概述 169</p> <p> §11-1 旋转曲面的几何特征、旋转壳的薄膜应力状态 177</p> <p> §11-2 轴对称载荷作用下圆柱壳的一般解 180</p> <p>第十二章 用复变函数方法求解平面问题和扭转问题 182</p> <p> 理论概述 182</p> <p> §12-1 简单问题 185</p> <p> §12-2 用复变函数解平面问题 186</p> <p> §12-3 用复变函数解扭转问题 192</p> <p>第十三章 热应力 195</p> <p> 理论概述 195</p> <p> §13-1 简单热应力问题 197</p> <p> §13-2 轴对称、球对称热应力问题 199</p> <p> §13-3 圆板轴对称弯曲的热应力 201</p> <p>第十四章 能量原理 203</p> <p> 理论概述 203</p> <p> §14-1 弹性体的应变能、应变余能 208</p>
--	--

§14-2 虚位移原理	209	第十八章 塑性力学中的简单问题	274
§14-3 最小位能原理	210	理论概述	274
§14-4 里兹法、伽辽金法、功的互等 定理	212	§18-1 柱体的扭转	275
§14-5 最小余能原理	214	§18-2 厚壁圆筒和圆球壳	279
§14-6 能量原理在扭转问题中的应用	215	§18-3 旋转圆盘	284
§14-7 能量原理在平面问题中的应用	216	第十九章 滑移线场理论	290
第十五章 有限差分法	217	理论概述	290
理论概述	217	§19-1 直角坐标的塑性平面应变问题	294
§15-1 用有限差分法解筒形板的弯曲 与稳定	220	§19-2 极坐标滑移线场	298
§15-2 用有限差分法解扭转问题	225	§19-3 挤压和拉拔	301
§15-3 用有限差分法解平面问题	229	第二十章 极值定理及其应用	304
第十六章 蠕变力学基本方程和简 单问题	233	理论概述	304
理论概述	233	§20-1 用上、下限定理求极限载荷	306
§16-1 蠕变的基本关系	240	§20-2 用上、下限定理求极限弯矩	313
§16-2 粘弹性的线性模型和蠕变破坏	243	§20-3 考虑摩擦的铰粗	315
§16-3 在蠕变条件下杆的扭转、弯曲 和屈曲	246	第二十一章 结构极限分析与安定 分析	317
§16-4 在内压作用下厚壁筒的蠕变	252	理论概述	317
第十七章 塑性本构关系	256	§21-1 超静定梁的极限分析	320
理论概述	256	§21-2 刚架的极限分析	322
§17-1 应力偏量与应变偏量	259	§21-3 轴对称圆板的极限分析及其简 化分析法	327
§17-2 屈服条件	261	§21-4 矩形板及多边形板的极限分析	332
§17-3 本构方程(塑性应力应变关系)	267	§21-5 安定性分析	334
§17-4 加载条件	271	习题解答	337
		参考文献	424

第一章 应力理论

理论概述

一、应力状态理论

1. 一点的应力状态

三维空间的坐标可以用指标符号统一地记作 x_i ($i = 1, 2, 3$)。沿坐标线方向可以作三个单位矢量 e_i ($i = 1, 2, 3$)，称为基矢量。常用的有笛卡儿坐标 (x, y, z) ，圆柱坐标 (r, θ, z) 与球坐标 (r, θ, φ) 等。

在物体中一点处作与坐标面相平行的三个微面，其法线方向 n_i ($i = 1, 2, 3$)分别沿三个坐标方向，作用在每个微面上的应力矢量又可以分别沿三个坐标方向 x_j ($j = 1, 2, 3$)分解，得到一组共九个应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

构成应力张量，它表示了一点的应力状态。 σ_{ij} 的第一个指标表示应力作用面的法线方向，第二个指标表示力的方向。规定当应力作用面的外法线指向坐标正方向时，应力方向沿坐标正向为正；如应力作用面的法向指向坐标负方向，应力方向沿坐标负方向为正。九个应力分量包含三个正应力分量 ($i = j$)与六个剪应力分量 ($i \neq j$)。剪应力分量满足互等定理，即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1-1)$$

故应力张量是对称张量。在笛卡儿系中，应力分量记作

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

2. Cauchy公式

在笛卡儿系中，过一点作法线为 ν 的任意斜截面， ν 的三个方向余弦为

$$\nu_i = (l, m, n)$$

斜截面上总应力矢量 $\mathbf{p}^{(\nu)}$ 的分解式为

$$\mathbf{p}^{(\nu)} = p_x \mathbf{e}_1 + p_y \mathbf{e}_2 + p_z \mathbf{e}_3 \quad (1-2a)$$

用指标符号记作：

$$\mathbf{p}^{(\nu)} = p_i \mathbf{e}_i \quad (1-2b)$$

今后凡在每一项中同一指标重复出现两次，均表示在该指标的取值范围内遍历求和，该指标称为哑指标。本书一至三章理论概述部分每个公式均给出笛卡儿分量常规记法式 (a) 与张量指标符号记法式 (b)，并采用同一公式序号，本章所给出的张量记法公式，除平衡方程式 (1-2b) 外，在其它正交坐标系中均可适用，不再赘述。 p_j 与 σ_{ij} 间满足柯西 (Cauchy) 公式

$$\left. \begin{aligned} p_x &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_z &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (1-3a)$$

$$p_j = \nu_j \sigma_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1-3b)$$

式(1-3b)共包含 $j = 1, 2, 3$ 三式, j 在等式每一项中只出现一次, 称为自由指标
斜截面上的正应力分量 $\sigma^{(v)}$ 为

$$\sigma^{(v)} = lp_x + mp_y + np_z \quad (1-4a)$$

$$= l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{xz}$$

$$\sigma^{(v)} = p_j \nu_j = \nu_j \nu_j \sigma_j \quad (1-4b)$$

剪应力分量 $\tau^{(v)}$ 为

$$\tau^{(v)} = \sqrt{p^{(v)2} - \sigma^{(v)2}} \quad (1-5)$$

式中 $p^{(v)}$ 是 $p^{(v)}$ 的模, 称为全应力

$$p^{(v)2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (1-6)$$

3. 坐标转换关系

新坐标轴 x_m' 与原坐标轴 x_j 的夹角之方向余弦为 $\beta_{m'j}$, ($m' = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\beta_{m'j}$ 称为坐标转换系数。对于笛卡儿系, $\beta_{m'j}$ 如下表示

新坐标系	原坐标系		
	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

新坐标系中的应力分量与原坐标系中的应力分量之间满足坐标转换关系

$$\sigma_{x'} = l_1^2 \sigma_x + m_1^2 \sigma_y + n_1^2 \sigma_z + 2l_1 m_1 \tau_{xy} + 2m_1 n_1 \tau_{yz} + 2n_1 l_1 \tau_{xz}$$

$$\sigma_{y'} = l_2^2 \sigma_x + m_2^2 \sigma_y + n_2^2 \sigma_z + 2l_2 m_2 \tau_{xy} + 2m_2 n_2 \tau_{yz} + 2n_2 l_2 \tau_{xz}$$

$$\sigma_{z'} = l_3^2 \sigma_x + m_3^2 \sigma_y + n_3^2 \sigma_z + 2l_3 m_3 \tau_{xy} + 2m_3 n_3 \tau_{yz} + 2n_3 l_3 \tau_{xz}$$

$$\tau_{x'y'} = l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + n_1 n_2 \sigma_z + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \tau_{yz} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \tau_{xz}$$

$$\tau_{y'z'} = l_2 l_3 \sigma_x + m_2 m_3 \sigma_y + n_2 n_3 \sigma_z + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \tau_{xy} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \tau_{yz} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) \tau_{xz}$$

$$\tau_{z'x'} = l_1 l_3 \sigma_x + m_1 m_3 \sigma_y + n_1 n_3 \sigma_z + (l_1 m_3 + l_3 m_1) \tau_{xy} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \tau_{yz} + (n_1 l_3 + n_3 l_1) \tau_{xz}$$

(1-7a)

$$\sigma_{m'n'} = \beta_{m'j} \beta_{n'j} \sigma_j \quad \left(\begin{array}{l} m' = 1, 2, 3 \\ n' = 1, 2, 3 \end{array} \right) \quad (1-7b)$$

4. 主应力

对于某确定的空间应力状态 σ_{ij} , 必定存在某法向矢量为 ν 的斜截面, 在该面上只有正应力没有剪应力作用, 设

$$\nu_j = (l, m, n)$$

则由式(1-3)可知

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{zy} &= 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-8a)$$

$$\sigma_{ij}v_i - \sigma v_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1-8b)$$

三个方向余弦间应满足

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-9a)$$

$$v_i v_i = 1 \quad (1-9b)$$

式(1-8)有非零解的条件是其系数行列式为零

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (1-10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-11a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii} \\ J_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{mm} - \sigma_{im}\sigma_{mi}) \end{aligned} \right\} \quad (1-11b)$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} + J_1\left(J_2 - \frac{1}{3}J_1^2\right)$$

J_1 、 J_2 、 J_3 称为应力张量的第一、第二、第三不变量,式(1-10)称为该应力状态的特征方程。由应力张量的对称性可证,特征方程的三个根 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 必为实根,称为该应力状态的主应力,将三个主应力依次代入式(1-8)与(1-9),可求得三组(每组三个)方向余弦,其所对应的方向称为主方向,以主方向为法线所作的微面称为主平面。若 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 互不相等,则空间对应有三个互相垂直的主方向;若有两个主应力互等,例如 $\sigma_1 = \sigma_2$,则与 σ_3 对应的主方向⁽³⁾

为一个主方向,垂直于⁽³⁾的平面内任一对互相垂直的方向都是主方向;若三个主应力互等, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$,则空间任一组三个互相垂直的方向都是主方向,此时该应力张量称为应力球形张量,记作

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1-12a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{array} \right) \quad (1-12b)$$

上式中 δ_{ij} 称为Kronecker delta,其值为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1-13)$$

通过一点的一切不同方向的截面上,法向应力 $\sigma^{(v)}$ 与全应力 $p^{(v)}$ 的最大(或最小)值是该点处最大(或最小)的主应力。

5. 主剪应力

若 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 且所对应的主方向单位矢量为 $\nu^{(1)}$ 、 $\nu^{(2)}$ 、 $\nu^{(3)}$ ，则在经过一个主方向且与另两个主方向成 45° 的截面上，剪应力取驻值，分别为

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

最大剪应力发生在通过 $\nu^{(2)}$ 且与 $\nu^{(1)}$ 、 $\nu^{(3)}$ 成 45° 截面上，其值为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1-15)$$

6. 应力张量的分解和应力偏量

应力张量 σ_{ij} 可以分解为两部分

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{pmatrix} \quad (1-16a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij} \quad (1-16b)$$

其中 $\sigma_0 \delta_{ij}$ 是应力球量

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1-17a)$$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1-17b)$$

称为应力偏斜张量，简称应力偏量。

应力偏量也是对称张量，其不变量为

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= 0 \\ J'_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ J'_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_0)^3 + (\sigma_2 - \sigma_0)^3 + (\sigma_3 - \sigma_0)^3] \\ &= (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-18a)$$

$$J'_1 = 0$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

(1-18b)

应力偏量的特征方程为

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (1-19)$$

其三个根称为主应力偏量

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 - \sigma_0 \\ s_2 &= \sigma_2 - \sigma_0 \\ s_3 &= \sigma_3 - \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

而应力偏量的主方向就是应力张量的主方向。

求任一应力状态 σ_i 的主应力时，可以不通过解式(1-10)，而由解式(1-19)，再利用式(1-20)求得。式(1-19)的解为

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sqrt{2} \tau_0 \cos \theta \\ s_2 &= \sqrt{2} \tau_0 \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \\ s_3 &= \sqrt{2} \tau_0 \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

式中

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3} J_2'} \quad (1-22)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\sqrt{2} J_3'}{\tau_0^3} \right) \quad (1-23)$$

7. 八面体上的正应力与剪应力

若取三个主应力方向为坐标轴方向，作与三个坐标轴等倾的斜截面，即 $|l| = |m| = |n| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，共八个面，形成一个正八面体，这些面上的正应力 σ_0 与剪应力 τ_0 称为八面体应力。

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{J_1}{3} \quad (1-24)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2'} \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

ge $\frac{J_2'}{2}$ $\frac{1}{3}$

可见， σ_0 只与应力球形张量有关， τ_0 只与应力偏量有关。

二、平衡（运动）微分方程

在笛卡儿坐标系中，在物体任一点 (x, y, z) 的邻域内，取出一个边长分别为 dx ， dy ， dz 的平行六面体微元，应满足下列平衡（运动）微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 & \left(= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 & \left(= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 & \left(= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-26a)$$

$$\sigma_{i,j} + f_i = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-26b)$$

式中 f 是单位体积的体积力矢量

$$f = f_x e_1 + f_y e_2 + f_z e_3 = f_i e_i \quad (1-27)$$

力矩平衡条件给出剪应力互等定理式(1-1)。

对于其它的正交坐标系, 平衡方程将有更复杂的形式, 在本书第四章中另行讨论。

三、给定面力的边界条件

若物体表面上某一部分区域 S_r 上给定分布外力 (每单位面积上作用的力矢量) F

$$\begin{aligned} F &= F_x e_1 + F_y e_2 + F_z e_3 \\ &= F_i e_i \end{aligned} \quad (1-28)$$

物体表面的单位法向矢量为 ν

$$\begin{aligned} \nu &= l e_1 + m e_2 + n e_3 \\ &= \nu_i e_i \end{aligned}$$

则物体边界处的应力与外力间应满足力的边界条件

$$\left. \begin{aligned} l \sigma_x + m \tau_{yx} + n \tau_{zx} &= F_x \\ l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{zy} &= F_y \\ l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1-29a)$$

$$\nu_j \sigma_{ji} = F_i \quad (1-29b)$$

若 S_r 上某些方向给位移约束, 给定边界力分量的数目可小于所给问题的维数。

§1-1 应力状态理论

1-1 已知受单向拉伸力 F 、横截面积为 A 的直杆。求在图1-1示 (x, y, z) 与 (x', y', z') 两种笛卡儿坐标系中, 杆内一点处的九个应力分量, 并画出两种坐标系中对应的微元体受力图。

1-2 利用材料力学知识写出图1-2示矩形截面悬臂梁在根部截面 $x = 0$ 处上表面 $y = \frac{h}{2}$ 及中心 $y = 0$ 处的九个应力分量。

1-3 利用材料力学的知识写出图1-3示受自由扭转的圆截面杆在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中杆外表面 $r = R$ 处任一点的九个应力分量, 并画出对应的微元体受力图。

1-4 已知笛卡儿系中一点的应力分量

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求该点处与xy平面垂直的任意斜截面上的正应力和剪应力。设斜截面法向矢量v与x轴的夹角为α。

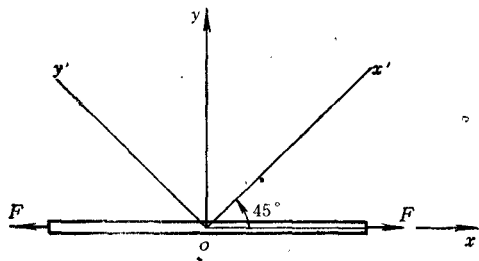


图 1-1

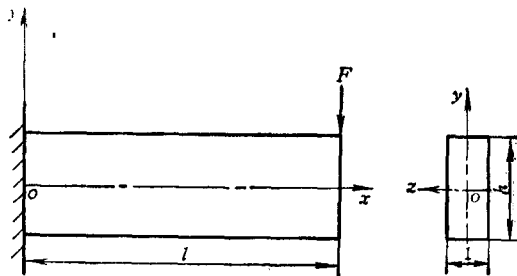


图 1-2

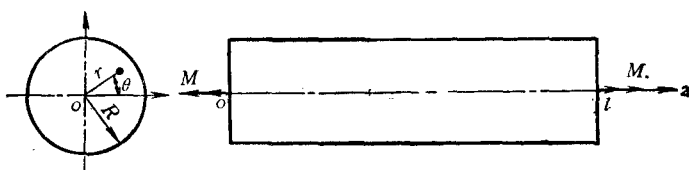


图 1-3

1-5 已知变形体中一点的三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 及主方向，试求任一法向矢量为 $v = le_1 + me_2 + ne_3$ 的斜截面上的剪应力。 e_1 、 e_2 、 e_3 为三个主方向的单位矢量。

1-6 已知变形体内一点在笛卡儿系中的应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 50a & 2xy & 80a \\ 2xy & 50a & 0 \\ 80a & 0 & -75a \end{pmatrix}$$

求法向矢量为 $v = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$ 的斜截面上之全应力、正应力及剪应力。

1-7 已知变形体内一点在笛卡儿系中的应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 3a \\ 2a & -a & 0 \\ 3a & 0 & 3a \end{pmatrix}$$

求在该点处平行于平面方程为 $2x + y - 2z = 6$ 的截面上应力沿 x 、 y 、 z 三个方向的分量 p_x 、 p_y 、 p_z 及该截面上的正应力与剪应力。

提示：若平面的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，则其法线方向余弦为

$$l = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad m = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1-8 已知变形体内一点在笛卡儿系中的应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a & 2a \\ a & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求在该点处平行于平面方程为 $x + 3y + z = 1$ 的截面上的正应力与剪应力。

1-9 已知变形体内某点 (x_0, y_0, z_0) 处的应力在笛卡儿系中的分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 0 \\ 2a & a & 0 \\ 0 & 0 & -3a \end{pmatrix}$$

求作用于方程为 $(x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = 0$ 的面上的正应力与剪应力。

1-10 已知物体中某点的应力状态在直角坐标系中的应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

试求在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中应力分量的表达式。坐标方向见图1-4示。

提示：坐标转换系数 $\beta_{m'j}$ 如下表所示

新坐标系 \ $\beta_{m'j}$	原坐标系	x	y	z
$x' = r$		$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0
$y' = \theta$		$-\sin\theta = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0
$z' = z$		0	0	1

1-11 已知物体中某点的应力状态在图1-4示圆柱坐标系中的应力分量为 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ 。试求在笛卡儿坐标系中应力分量的表达式。

1-12 受单向均匀拉伸的薄板,在图1-5示直角坐标系中,板内处处应力分量为 $\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 。求在图示圆柱坐标系中板中的应力分量;若在板中作一个半径为 R 的圆柱形截面如图示,求在该截面处外部区域对此圆形薄板的作用力,并画出该圆板受力图及圆柱坐标系中任一点微元体受力图。

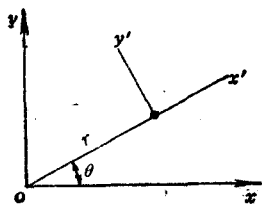


图 1-4

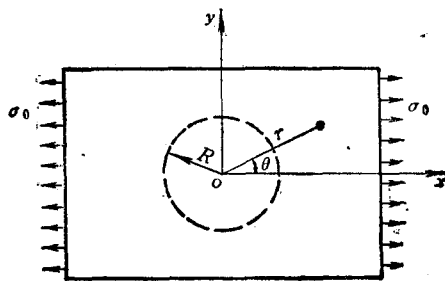


图 1-5

1-13 已知物体中某点在笛卡儿系中的应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

求主应力以及通过 z 轴，其法线与 x 轴成 α 角的面上的正应力与剪应力。

1-14 已知物体中某点的应力在笛卡儿系中的分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2a & -a & 0 \\ -a & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 5a \end{pmatrix}$$

求主应力，主剪应力，八面体正应力、剪应力及主应力作用面的方向。

1-15 已知物体中某点在笛卡儿系中的应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

求该点应力张量的三个主不变量，主应力，最大剪应力，八面体正应力与剪应力。

1-16 物体中某点应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100a \\ 0 & 0 & 100a \\ 100a & 100a & 200a \end{pmatrix}$$

求该点应力张量的三个主不变量，主应力，最大剪应力，八面体正应力与剪应力。

1-17 已知圆柱体在轴向拉力、弯矩及扭矩作用下，在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中，表面上某点的应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 3a \end{pmatrix}$$

求该点的主应力及对应的主方向 ν (用圆柱坐标系中的基矢量 e_r, e_θ, e_z 表示)，八面体正应力与剪应力。

1-18 求证应力偏量的第二、第三不变量 J_2', J_3' 与对应的应力张量的第一、第二、第三不变量 J_1, J_2, J_3 之间满足关系：

$$J_2' = \frac{1}{3} J_1^2 - J_2$$

$$J_3' = J_3 - \frac{1}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3$$

提示：利用主应力与应力张量不变量、应力偏量不变量的关系可以容易地证得。

1-19 由八面体剪应力的定义出发，证明

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3} J_2'}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

1-20 当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时，如令 $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$

求证：

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\max}} = \frac{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}}{3}$$

且该值在0.816~0.943之间

提示：利用以下关系式进行证明

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}$$

$$\tau_1 = -\frac{1 + \mu_e}{2} \tau_{\max}$$

$$\tau_2 = \tau_{\max}$$

$$\tau_3 = -\frac{1 - \mu_e}{2} \tau_{\max}$$

1-21 已知物体中某点的应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 100a & 40a & -20a \\ 40a & 50a & 30a \\ -20a & 30a & -10a \end{pmatrix}$$

$$6^2 - 40^2 - 20^2 - 20^2 > 0$$

$$I_2 = 140$$

求该点主应力与最大剪应力。

解：首先将 σ_{ij} 分解为球形张量与偏斜张量

$$I_2 = \dots$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} 46.7a & 0 & 0 \\ 0 & 46.7a & 0 \\ 0 & 0 & 46.7a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 53.3a & 40a & -20a \\ 40a & 3.3a & 30a \\ -20a & 30a & -56.7a \end{pmatrix}$$

由 s_{ij} 求 J_2, J_3

$$J_2' = 5933a^2$$

$$J_3' = -16543a^3$$

s_{ij} 的特征方程为

$$s^3 - 5933a^2s + 16543a^3 = 0$$

$$\cos 3\theta = \frac{J_3'}{2\sqrt{\left(\frac{J_2'}{3}\right)^3}} = -0.09404 \quad \theta = 31.8^\circ$$

$$\sqrt{2} \tau_0 = 2\sqrt{\frac{J_2'}{3}} = 88.94a$$

$$s_1 = \sqrt{2} \tau_0 \cos \theta = 75.6a$$

$$s_2 = \sqrt{2} \tau_0 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 2.8a$$

$$s_3 = \sqrt{2} \tau_0 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -78.4a$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1 = 122.3a$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + s_2 = 49.5a$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 + s_3 = -31.7a$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 77a$$

1-22 已知物体中某点的应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 50a & -20a & 0 \\ -20a & 80a & 60a \\ 0 & 60a & -70a \end{pmatrix}$$

试求主应力，最大剪应力与主方向。(用原坐标系的基矢量 e_1, e_2, e_3 表示)

1-23 已知物体中某点的应力分量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 50a & 50a & 80a \\ 50a & 0 & -75a \\ 80a & -75a & -30a \end{pmatrix}$$

试求主应力，最大剪应力，八面体正应力与剪应力。

1-24 已知物体中某点的主应力为 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，该点处有任一法向矢量为 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ 的斜截面，其中 e_1, e_2, e_3 分别为三个主方向的单位矢量。试给出用莫尔圆图解法确定斜截面上正应力 $\sigma^{(v)}$ 与剪应力 $\tau^{(v)}$ 的方法并说明该方法的正确性。

解： $\sigma^{(v)}$ 与 $\tau^{(v)}$ 应满足方程

$$\sigma^{(v)2} + \tau^{(v)2} = \sigma_1^2 v_1^2 + \sigma_2^2 v_2^2 + \sigma_3^2 v_3^2$$

$$\sigma^{(v)} = \sigma_1 v_1^2 + \sigma_2 v_2^2 + \sigma_3 v_3^2$$

且

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

解上述方程组，得到

$$\left[\sigma^{(v)} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau^{(v)2} = v_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$\left[\sigma^{(v)} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 + \tau^{(v)2} = v_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

可见，在应力空间 (σ, τ) 中，法线为 v 的斜截面上的应力 $\sigma^{(v)}, \tau^{(v)}$ ，应当对应着两个圆的交点 G ，其中一个圆的圆心为 $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$ ，半径为 r_1 ，另一个圆的圆心为 $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ ，半径为 r_3 ， r_1 与 r_3 分别为

$$r_1^2 = v_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$r_3^2 = v_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

作图法如下(见图1-6)：

(1) 以 σ 为横坐标， τ 为纵坐标。在横轴上分别取 $A(\sigma_1, 0), E(\sigma_2, 0), C(\sigma_3, 0)$ 点。以横轴上 $O_1\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right), O_2\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right), O_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ 点为圆心， $\overline{O_1 C} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right), \overline{O_2 A} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right), \overline{O_3 A}$

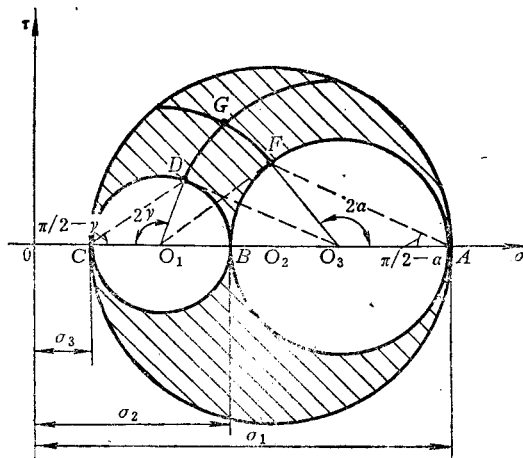


图 1-6