

高等院校船舶与海洋工程专业教材



船体振动

CHUANTI ZHENDONG

姚熊亮◎编



哈尔滨工程大学出版社



高等院校船舶与海洋工程专业教材

船 体 振 动

姚熊亮 编

江苏工业学院图书馆
藏书章

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

船体振动/姚熊亮编. —哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2004

ISBN 7-81073-589-6

I. 船… II. 姚… III. 船体振动 IV. U661.44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 055480 号

内 容 简 介

本书共分六章。前三章简要阐述了单自由度系统、多自由度系统和弹性体系系统等基本的振动理论知识,它是研究船体振动的理论基础;第四章、第五章对船体的振动进行了介绍,包括船体总振动和局部振动的特性及计算方法,船体振动的原因,振动的主动控制,水中爆炸冲击波对船体的影响,船体防振、减振措施以及船体振动的测量方法等;第六章对船舶噪声的基础知识和船舶噪声的控制原理进行了简要的介绍。

本书可作为高等院校船舶设计和制造专业的教材,也可供从事船舶和其他相关工作的技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 18 字数 438 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—1 500 册

定价:22.00 元



前 言

本书是参照全国造船类专业统编教材会议通过的《船体振动学》教学大纲,并结合哈尔滨工程大学船舶与海洋工程专业的教学要求编写的,可供高等院校船舶设计与制造专业和其他相关专业教学使用,也可作为研究生以及相关技术人员的参考用书。

20世纪50年代后期,随着航运事业的发展,柴油机的采用和功率的提高,以及高强度钢的使用,使得船体振动问题日益突出;同时,在军事上对舰船声隐身性和结构抗爆抗冲能力要求的不断提高,船体振动逐渐引起各国造船部门的关注和国内外众多学者、专家的兴趣,因而在船体振动的理论和实践方面的研究有了迅速的发展。鉴于船体振动的复杂性,对它的研究正向多学科的交叉、多因素的综合纵深发展,并向预防和控制的要求发展,这就要求造船科技人员掌握更全面和更现代化的手段。因此,在教材编写的过程中,我们在对基本概念和基本理论进行介绍的同时,力求反映一些新近取得的成果。

本书按内容可分为两大部分:前三章为振动基础理论部分,该部分系统地论述了线性系统振动的基本理论,它是进一步学习和研究船体振动和其他有关振动问题的基础;后三章为船体振动部分,该部分对船体振动进行了详细的介绍,其中还包含近年来迅速发展和相对独立的船舶噪声以及振动的控制问题,这使得本书内容更充实更具体。书中带*号章节表示选修内容,供阅读者课余自学用。

本书前五章由姚熊亮教授编写,第六章由王宏博士编写;本书由哈尔滨工程大学船舶工程学院陈起富教授和韩端峰副教授担任主审,哈尔滨工程大学出版社对本书进行了严格细致的审阅,大大提高了书稿的出版质量,编者在此深表谢意。

编 者

2004年6月



目 录

绪 论	1
第1章 单自由度系统的振动	3
1.1 单自由度系统	3
1.2 无阻尼自由振动	5
1.3 无阻尼强迫振动	12
1.4 有阻尼自由振动	19
1.5 有阻尼强迫振动	26
*1.6 振动谱分析	30
1.7 任意激振力作用下的强迫振动	34
习 题	41
第2章 多自由度系统的振动	44
2.1 多自由度振动系统	44
2.2 多自由度系统运动微分方程的建立	45
2.3 无阻尼自由振动	51
2.4 有阻尼自由振动	60
2.5 无阻尼强迫振动	62
2.6 有阻尼强迫振动	68
2.7 固有频率的计算方法	69
*2.8 隔振原理	78
习 题	86
第3章 弹性体振动	90
3.1 无限自由度系统	90
3.2 梁的横向振动	90
*3.3 梁的纵向振动	108
*3.4 梁的剪切振动	111
3.5 迁移矩阵法	113
3.6 能量法	120
*3.7 有限元法简介	129
习 题	138
第4章 船体振动	140
4.1 概 述	140
4.2 附连水对船体振动的影响	144
4.3 船体总振动	150

4.4 船体自由振动频率的估算	153
4.5 船体强迫振动	158
4.6 船体局部振动	161
* 4.7 爆炸冲击波对船体的影响	173
第 5 章 船体振动的原因及减振方法	188
5.1 概 述	188
5.2 螺旋桨激振力	188
5.3 柴油机激振力	196
* 5.4 其他激振力	201
5.5 结构响应和振源分析	202
* 5.6 振动的危害及评价标准	204
* 5.7 振动的主动控制与智能控制	210
5.8 船体振动的测试	216
5.9 船体防振与减振措施	220
* 5.10 船舶减振元件	230
* 第 6 章 船舶的噪声及其控制	243
6.1 声学的基本概念	243
6.2 噪声的危害及其评价	250
6.3 船舶噪声源	257
6.4 船舶噪声的传播	264
6.5 船舶噪声的控制方法	271
附录 I 国际单位制与工程单位制换算表	278
附录 II 符号表	279
参考文献	281



绪 论

当船舶在海上航行时,船体结构不可避免地会出现振动现象。早在 19 世纪后期,船体振动就引起了人们的注意。近年来,随着航运事业的发展,船舶吨位越来越大,主机功率和转速不断提高,引起船体振动的激振力也相应地增大了。同时,为了减小船舶构件的尺寸,减轻船体的重量,人们广泛采用高强度钢作为造船材料,这样使得船体结构刚度也跟着减小,就更容易激起较大的船体振动。另外,船体结构振动的大小,直接关系到舱室噪声和结构在水中产生的辐射噪声的大小。

过大的船体振动可导致船体结构产生疲劳破坏,会影响船上的设备和仪表的正常工作,降低使用精度,缩短使用寿命。同时,船体振动及由此引起的舱室噪声也影响船员和游客的居住舒适性。当人们长期处于振动的环境中会产生疲劳,影响船员的工作效率,甚至危及身体健康,而结构辐射噪声又会严重削弱舰船的隐身性能。因此有必要对船体的振动进行研究,以期找到减小和解决振动的方法和措施。

船体振动的研究涉及到船体结构、船型、推进、动力装置等多方面知识;而从学科上来说,它又是涉及到结构力学、流体力学、数学、声学、自动控制理论等领域的一门综合学科。

船体振动学所包括的内容有以下四个方面:

- (1) 引起船体振动的原因;
- (2) 船体结构的动力特性及其响应;
- (3) 船体振动的容许标准;
- (4) 防振与减振、降噪的方法。

引起船体振动的因素有很多,但最主要的是船体及局部结构在主机、螺旋桨产生的周期性激振力,以及舰船附体所产生的一些流体激励作用下的稳态振动。船用辅机等设备也会产生一些激振力,但一般情况下,其数值不大,只会引起局部结构的振动。此外,波浪冲击、水下爆炸冲击波、火炮发射时的后坐力和抛锚等引起的激振力也会导致船体的振动,但它们是非周期性的,而且对船体的作用时间短,只引起船体的衰减振动。

本书主要讨论船体及其局部结构在给定激振力下的动力响应问题。要研究这一问题,必须具有一定振动理论的基础知识。故本教材前三章讲述了单自由度系统、多自由度系统和弹性体系统的振动理论。这不仅是学好后几章的基础,而且也是现代工科院校毕业生所必须具备的基本知识。

近些年来,船体振动这一门学科在国内外得到了迅速的发展。自从迁移矩阵法用于计算船体总振动以来,短短几年已发展为有限元法、模态综合法、杂交子结构法等作为实船和模型的计算方法,同时工程上适用的近似计算方法和公式也得到不断的发展和完善。在实验技术方面,由于电子技术的发展,激振、测试、记录和分析等实验手段日益更新,利用实验模型的模态分析方法也已开始在船体振动领域应用。并且计算机技术的进步,也大大提高了我们分析复杂结构振动的能力。尽管如此,由于船体结构极为复杂,船舶飘浮于水面上,其上又装



第 1 章

单自由度系统的振动

1.1 单自由度系统

实际工程结构的振动系统往往是很复杂的,影响振动的因素很多,为了研究振动的规律,便于分析、计算,所以在分析振动系统的振动问题时,必须抓住主要因素,而略去一些次要因素,将实际系统简化并抽象为简单的力学模型。这种简化和抽象的程度取决于系统本身的复杂程度、振动的实际情况和要求计算结果的准确性,以及所采用的计算工具和计算方法等。例如由于影响振动特性的主要因素是质量和弹性,可将实际结构中弹性较小的质量简化为无弹性的集中质量,而将质量较小的弹性元件简化为无质量的弹簧,又如可将杆、板等构件理想化为质量和弹性均布或有规律分布的连续介质,这样实际结构就可简化为由以上这些元件构成的振动系统,并可用相应的坐标来确定其运动。

1.1.1 系统的自由度

一个系统于任何瞬时空间位置的广义坐标数目为此系统的自由度数。如果一个系统在任何瞬时的空间位置都可由一个广义坐标来确定,则此系统为单自由度系统。如图 1-1 所示的“质量-弹簧”系统,当忽略重量较小的弹簧质量时,确定此系统在任何瞬时的空间位置只需一个广义坐标,即质量 M 的位移 x ,该系统即为单自由度系统。

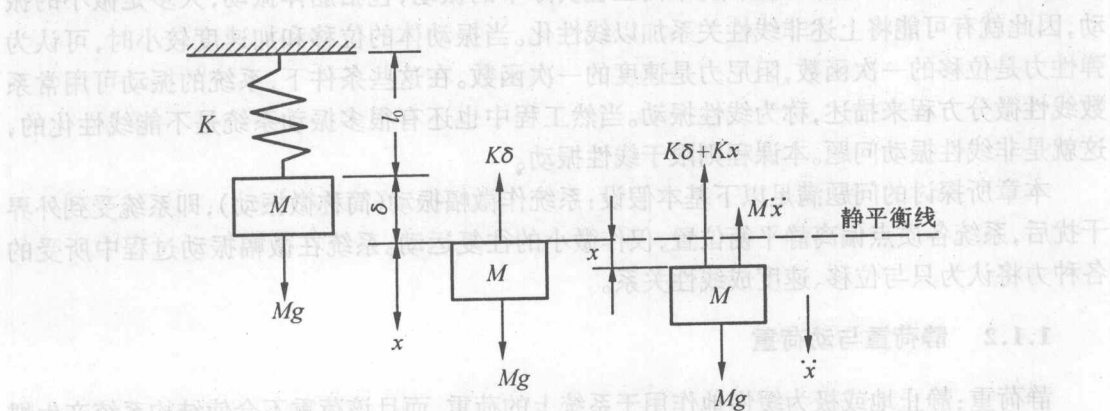


图 1-1 单自由度系统

工程中的很多振动问题都可简化为(或近似看作为)单自由度系统的问题。如图 1-2(a)所示的安装弹性梁上的电动机,当考虑梁的分布质量 m 时,确定该系统在空间的

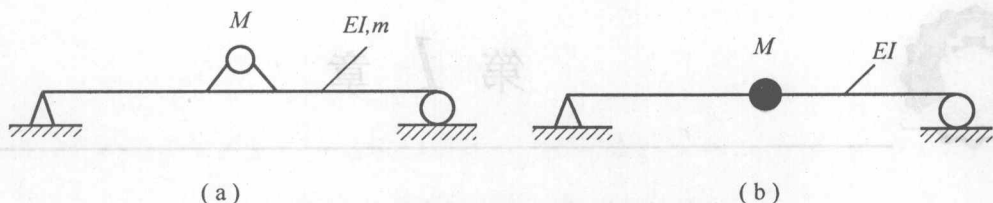


图 1-2 安装在弹性梁上的电动机简化示意图

位置需无限多个广义坐标。但是当忽略梁的质量时,则确定此系统垂向运动时在空间的位置仅需电机 M 的位移,如图 1-2(b) 所示,则系统简化为单自由度。又如图 1-3 所示的安装在船底骨架上的往复式发动机,可简化为一上下直线运动的质量 M 。船体结构有一定的弹性,故它对发动机的作用可简化为一弹簧。发动机内部有活塞、连杆、曲柄、飞轮系统,它们在运转过程中的不平衡惯性力是引起发动机振动的原因,因此它们的作用相当于作用在质量 M 上的外力 $P(t)$ 。此外,船底结构对发动机振动还有阻尼作用,它相当于作用在质量 M 上的阻尼力 F_δ 。当然上述简化仅仅是初步的、近似的,实际上发动机除了上下振动之外,还有其他方向的振动和摆动。且有时发动机与机座之间并非刚性联结,而是装有弹性减振器。这时进一步简化模型就不是单自由度系统,而是多自由度系统。可见系统的简化不是绝对的,而是因实际系统的复杂程度和要求的精度而异。其次,振动系统中各参数的动态特性,严格地说都与系统的运动状态成非线性的复杂关系,这就给振动的研究带来极大的困难。幸而工程实际中的振动,包括船体振动,大多是微小的振动,因此就有可能将上述非线性关系加以线性化。当振动体的位移和加速度较小时,可认为弹性力是位移的一次函数,阻尼力是速度的一次函数。在这些条件下,系统的振动可用常系数线性微分方程来描述,称为线性振动。当然工程中也还有很多振动系统是不能线性化的,这就是非线性振动问题。本课程则限于线性振动。

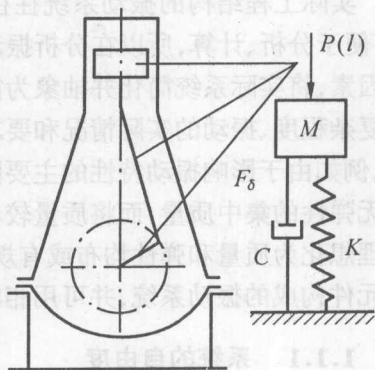


图 1-3 安装在船底骨架上的往复发动机简化示意图

本章所探讨的问题满足以下基本假设:系统作微幅振动(简称微振动),即系统受到外界干扰后,系统各质点偏离静平衡位置,仅作微小的往复运动。系统在微幅振动过程中所受的各种力将认为只与位移、速度成线性关系。

1.1.2 静荷重与动荷重

静荷重:静止地或极为缓慢地作用于系统上的荷重,而且该荷重不会使结构系统产生惯性力,或者惯性力与荷重比较起来极其微小,从而可以认为是静荷重。

动荷重:随时间变化的或者能使结构系统产生很大惯性力的荷重。动荷重有以下几类:

- (1) 冲击作用和突加力作用,如打桩力、炮弹在结构上弹着点的冲击力;
- (2) 按谱和规律变化的动荷重,主要是由旋转机械的不平衡力引起的;
- (3) 作用点移动或变化的动荷重,如车行驶时对于钢轨的作用力;

(4) 基座运动时产生的惯性力,如重型锻锤、机动行驶、人工爆破、地震地面运动等引起的作用力;

(5) 流体的脉动压力,如水、空气、风力、空气压力波引起的作用力。

在船舶制造及海洋工程中有不少单自由度系统的振动问题,许多复杂的系统也可近似地简化为单自由度系统;另一方面,单自由度系统揭示了振动现象的本质,是多自由度系统振动、弹性体振动以及其他各种振动学的基础。因此研究单自由度系统的理论是极为重要的。

1.2 无阻尼自由振动

上一节中已提到,工程中很多振动问题可简化为单自由度系统的问题。而单自由度系统的振动又揭示了振动现象的本质,是研究多自由度系统振动及船体振动的基础,故我们先来分析一下单自由度系统的振动。

系统受到一个外界干扰,使质量为 M 的物体离开原来的位置而有一个初速度,则系统将在其原来静平衡位置附近振动。分析该系统所受力的情况,如图 1-1 所示,作用在质量 M 上有重力 Mg 及弹簧变形所产生的恢复力,此时系统作自由振动。实际上,系统还将受到周围介质的阻尼作用及材料的内阻尼作用,本节暂不考虑。

1.2.1 微分方程的建立

如图 1-1 所示为一无阻尼单自由度系统。系统中弹簧的刚度为 K ,即弹簧单位变形所需的外力。弹簧在自然状态时其长度为 l_0 ,当悬挂质量块(质量为 M)后,弹簧受重力 Mg 的作用而产生拉伸变形 δ ,同时弹簧也产生恢复力 $F_s = K\delta$,当其等于重力时,即 $Mg = K\delta$,则系统处于平衡位置,此时有

$$\delta = \frac{Mg}{K} \quad (1-1)$$

若系统受某种外界初始干扰,弹簧的伸长发生变化,使系统静平衡状态遭到破坏,则弹簧的弹性恢复力也发生变化,与重力失去平衡。这种不平衡的恢复力使系统产生自由振动。

为简便起见,建立原点取在静平衡位置处,向下为正,向上为负的铅垂坐标,来表示振动过程中质量块的位置。现设质量块 M 向下运动到 x ,此时弹簧恢复力为 $K(x + \delta)$,显然大于重力 Mg 。由于力不平衡,质量块在合力作用下将产生加速度。此时可按牛顿运动定律或达朗贝尔原理来建立运动方程(取力、速度、加速度的方向与 x 正方向一致)如下

$$M \ddot{x} + K(x + \delta) - Mg = 0 \quad (1-2)$$

因为

$$Mg = K\delta$$

故有

$$M \ddot{x} + Kx = 0 \quad (1-3)$$

此式即为无阻尼单自由度系统的振动微分方程式。由上式可知,因坐标原点取在静平衡位置,考虑了重力的影响,所以方程中出现重力 Mg 及静变形 δ 。又因式中 M 与 K 皆为正,故加速度 $\ddot{x}$ 的方向始终与位移 x 相反。弹性恢复力的大小与位移 x 成正比,方向始终与 x 方向相反。

1.2.2 求解微分方程

无阻尼自由振动微分方程 $M \ddot{x} + Kx = 0$ 改写成

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}x = 0 \quad (1-4)$$

令 $\omega_n^2 = \frac{K}{M}$, 代入上式得

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1-5)$$

式中 ω_n 称为系统振动的固有频率, rad/s。

设 $x = e^r$ 为方程的一个解, 代入上式得

$$(r^2 + \omega_n^2)e^r = 0 \quad (1-6)$$

其特征方程为

$$r^2 + \omega_n^2 = 0 \quad (1-7)$$

则特征根为

$$r = \pm i\omega_n \quad (1-8)$$

方程的通解为

$$x = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1-9)$$

由欧拉公式

$$e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t \quad (1-10)$$

可将通解改写为

$$x = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t \quad (1-11)$$

式中 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = i(C_1 - C_2)$ 由振动初始条件确定。

由式(1-11)知, 单自由度系统的自由振动包含两个同频率的简谐振动, 合成后仍为一同频率的简谐振动, 即

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) = A \cos(\omega_n t + \varphi_1) \quad (1-12)$$

式中

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \varphi = \arctan \frac{A_1}{A_2} \\ \varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1-13)$$

现在根据振动的初始条件来确定 A_1 和 A_2 。

设在 $t = 0$ 时, 质量 M 的初始位移和初始速度分别为

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = \frac{dx}{dt}|_{t=0} = \dot{x}_0$$

代入式(1-11)可得

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (1-14)$$

于是得式(1-5)的特解为

$$x = x_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin\omega_n t \quad (1-15)$$

上式表示了单自由度无阻尼系统自由振动的位移响应,它是以初始位移 x_0 为幅值的余弦运动和以 $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ 为幅值的正弦运动的组合。这种随时间按正弦或余弦函数变化的运动,称为简谐振动。组合运动的幅值和初相角为

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \end{cases} \quad (1-16)$$

在振动问题中还可以用旋转矢量来表示简谐振动。为此引进一个半径为 A 的参考圆,有一质点 M 在此圆周上以匀角速度 ω_n 沿逆时针方向做匀速圆周运动,如图 1-4(a) 所示,可以看到,当 M 点做圆周运动时,它在 x 轴上的投影点 M' 在 x 轴上以圆心 O 为平衡位置作上下来回振动。如果开始时($t=0$)质点 M 位于 M_0 , OM_0 与 y 轴的夹角为 φ ,经过时间 t 后, OM_0 转过角度 $\omega_n t$, M 点在 x 轴上的投影点 M' 离平衡位置的距离,即位移 x 为

$$x = OM \sin(\omega_n t + \varphi) = A \sin(\omega_n t + \varphi)$$

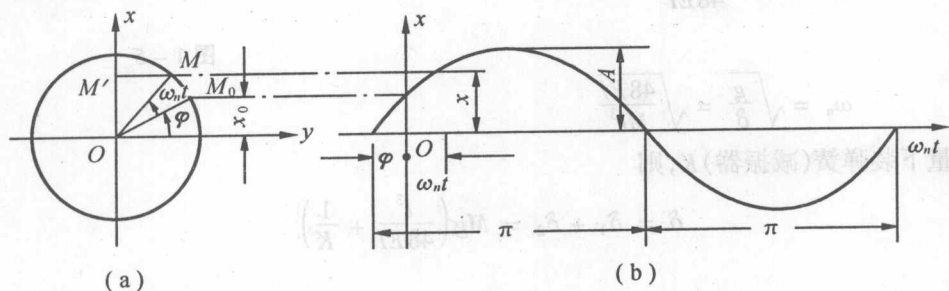


图 1-4

得到与式(1-7)同样的结果。

如以 x 轴为纵坐标, $\omega_n t$ 为横坐标,就可得 M' 点的振动曲线,如图 1-4(b) 所示。所得的结果表明质点的自由振动为简谐振动。其中旋转矢量的模 A 为振幅,即质点的最大位移为峰值(mm); $\omega_n t + \varphi$ 为振动的相角, φ 叫初相角;旋转角速度 ω_n 为圆频率,质点每秒内振动的弧度数或 2π 秒内振动的次数,它仅取决于系统的固有性质(质量 M 及弹簧刚度 K),而与运动的初始条件无关,故称为系统的固有频率,是表征振动系统固有性质的一个重要的特征值。

1.2.3 应用静变形法求解系统的固有频率

要求解系统的固有频率,根据公式 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$,需计算出系统的质量和弹簧的刚度。由于实际系统往往是很复杂的,系统的质量和弹簧的刚度有时难以直接求出,因此求解系统的固有频率就很困难。但是,这时可根据静变形法计算系统的固有频率,也就是只要能测量出弹簧的静变形 δ ,根据 $Mg = K\delta$ 可得

$$K = \frac{Mg}{\delta} \quad (1-17)$$

则固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Mg}{M\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \quad (1-18)$$

得知静伸长后即可求得直线振动的固有频率。振动一周所需的时间为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}} \quad (1-19)$$

称为振动的周期,单位为 s(秒)。

工程上习惯用每秒或每分钟振动的次数来表示频率,即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1-20)$$

$$f_n = 60f = \frac{60}{2\pi}\omega_n \quad (1-21)$$

例 1-1 求图 1-5 所示的带有集中质量的简支梁固有频率,梁的自重忽略不计。

解 由材料力学的公式,简支梁中点的挠度为

$$\delta = \frac{Mgl^3}{48EI}$$

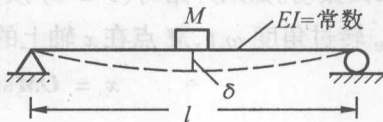


图 1-5

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

若在质量下装弹簧(减振器)K,则

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = Mg\left(\frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{K}\right)$$

所以

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{1}{M\left(\frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{K}\right)}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{48EI}{Kl^3}}}$$

因

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{48EI}{Kl^3}}} \leq 1$$

故装设减振器后,使系统固有频率降低。

1.2.4 应用能量法求系统的固有频率

单自由度振动系统在作自由振动时,如果不计阻尼,则在振动过程中可认为没有能量损失。在振动的任一瞬时,系统总能量保持不变,位能 V 和动能 T 之和应恒为常数,即 $V + T = \text{常数}$ 或写成

$$\frac{d}{dt}(V + T) = 0 \quad (1-22)$$

由于能量守恒,系统维持持久的等幅振动。系统自由振动的任一瞬时,质量离开平衡位置的位移为 x ,质量的速度为 $\dot{x}$,则其位能为 $V = \frac{1}{2}Kx^2$,动能为 $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$,系统的总能量为 $V + T$ 。也就是说,任意选择两个振动位置,振动的总能量应相等,即 $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$ 。

现选择两个特殊位置讨论。当质量经过平衡位置时,位移 $x = 0$, 故位能为零, 速度达最大值 $\dot{x}_{\max}$, 此时动能应为最大值 $T_{\max}$; 当质量离开平衡位置运动到最大位移时, 速度 $\dot{x} = 0$, 故动能为零, 弹簧变形达最大值 $x_{\max}$, 此时位能应为最大值, 即 $V_{\max}$ 。

因为能量守恒, 故有

$$V_{\max} = T_{\max} \quad (1-23)$$

用上式可直接求系统的固有频率, 称为能量法。

若系统自由振动表示为

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi)$$

有

$$x_{\max} = A$$

$$\dot{x}_{\max} = \omega_n A$$

系统的最大动能

$$T_{\max} = \frac{1}{2} M \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} M \omega_n^2 A^2$$

系统的最大位能

$$V_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

代入式(1-23) 即有

$$\frac{1}{2} M \omega_n^2 A^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

所以自由振动频率(即系统的固有频率) 为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1-24)$$

进而有

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1-25)$$

下面是用能量法求系统自由振动频率的例子。

例 1-2 带有集中荷重 $W = Mg$ 的简支梁中, 梁的自重为 $Q = ql$ (q 为梁每单位长度的重量), 如图 1-5 所示, 用能量法求其固有频率。

解 在例 1-1 中, 忽略了梁的自重, 求得的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

如果梁的重量与集中质量相比不是很小的话, 例 1-1 的做法就不够精确。而在考虑梁的分布质量后, 严格说来, 系统应作为弹性体振动来考虑。但在某些场合, 根据被解问题的性质与要求, 也可以简化为多自由度, 甚至单自由度振动系统。这里我们考虑了梁的质量, 但仍将问题简化为单自由度系统来考虑。

在用能量法解题时, 首先根据判断, 假定一个梁在振动时的挠度曲线。对简支梁可假定为

$$y(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}$$

即认为在振动时, 梁的中点振幅为 A , 梁上其他点的振幅按正弦曲线分布。如梁按简谐规律

振动,则梁上各点的振动位移为

$$v(x, t) = A \sin \frac{\pi}{l} x \sin(\omega_n t + \varphi)$$

因此梁上各点的速度分布为

$$\dot{v}(x, t) = A \sin \frac{\pi}{l} x \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$$

因而动能最大值为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} M \omega_n^2 A^2 + \frac{1}{2} \frac{q}{g} \int_0^l \left(A \sin \frac{\pi}{l} x \omega_n \right)^2 dx = \frac{1}{2} A^2 \omega_n^2 \left(M + \frac{Q}{2g} \right)$$

上式说明,梁的分布质量的动能相当于将梁的质量的一半集中在中点时的动能,因此上述系统可以用一根无重量梁,但梁中点具有集中质量 $M + \frac{Q}{2g}$ 的系统来代替。与例 1-1 比较,可得系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{\left(M + \frac{Q}{2g}\right)l^3}}$$

也可以用式(1-23)来求解。在最大振幅位置

$$V_{\max} = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{24EI}{l^3} A^2$$

同样可得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{\left(M + \frac{Q}{2g}\right)l^3}}$$

当然以上结果也是近似的,其精确度取决于所假定的挠度曲线 $y(x)$ 与真实振动曲线符合的程度。在很多场合,可直接选用梁的静挠度曲线作为振动的挠度曲线的形式,也能得到满意的结果。

例 1-3 如图 1-6 所示,一倒置惯性摆(测振仪),质量为 m ,杆长为 l ,弹簧刚度为 k ,若不计摆杆与弹簧的质量,试用能量法求其固有频率及其稳定条件。

解 分别求系统的动能和势能

$$T_{\max} = \frac{1}{2} J \dot{\beta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_{\max}^2$$

因 $\dot{\varphi}_{\max} = \omega_n \varphi_{\max}$ (在简谐条件下),故

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m l^2 \omega_n^2 \varphi_{\max}^2$$

而(在 φ 很小时 $1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$)

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 - mgh = \frac{1}{2} k a^2 \varphi_{\max}^2 - mgl(1 - \cos \varphi_{\max}) = \frac{1}{2} k a^2 \varphi_{\max}^2 - \frac{1}{2} mgl \varphi_{\max}^2$$

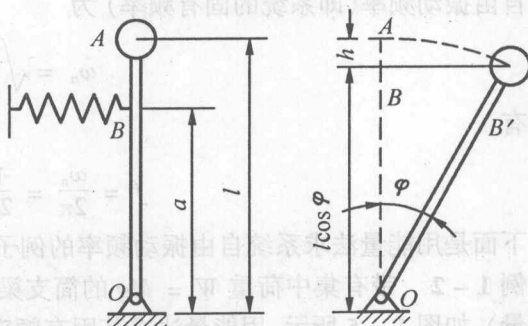


图 1-6

令 $T_{\max} = V_{\max}$ 得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2 - mgl}{ml^2}}$$

再求系统的稳定条件,由上式得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2 - mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{ka^2}{mgl} - 1 \right)}$$

欲使系统稳定,则 ω_n 必为实数值。故

$$\frac{ka^2}{mgl} - 1 > 0$$

即

$$k > \frac{1}{a^2} mg$$

这样,当弹簧刚度大于重力势能作用引起的力时,系统处于稳定。

1.2.5 等效系统及应用等效法确定系统的固有频率

利用能量法,我们还可将一个复杂的系统化为一个简单的弹簧质量等效的系统。等效系统与真实系统的位移是等效的,且它们的动能与位能都相同,因而两者的固有频率也相同。

例如在例1-1和例1-2中讨论过的简支梁质量系统(见图1-5),我们可以将它化为图1-1所示的等效弹簧质量系统。此时等效系统的弹簧刚度为 $K = \frac{48EI}{l^3}$,而等效系统的质量在例1-1中为 M ,在例1-2中为 $M + \frac{Q}{2g}$ 。

一般情况下,一个系统的等效弹簧质量系统可以这样来确定:先规定系统中某一个质点的位移作为等效系统中质量的位移(即等效位移),再根据真实系统的动能和位能,分别与等效系统的动能和位能相等的条件求出等效系统中的质量及弹簧刚度(即由动能等效求等效质量 M_e ,由位能等效求等效刚度 K_e),于是真实结构的固有频率 ω_n 即可根据等效系统由下式决定

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} \quad (1-26)$$

这种寻求系统固有频率的方法即为等效法。

例1-4 应用等效法求图1-7所示梁的固有频率。

解 取离简支端 l 处的垂向位移 w 为广义坐标,以广义坐标为等效系统的坐标,即 $q_e = w$ 。则

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left(\frac{x}{l} \dot{w} \right)^2 dx$$

而等效系统的动能为

$$T_e = \frac{1}{2} M_e \dot{w}^2$$

由 $T = T_e$ 得