

977352

51.22
LTH

2324
9803

51.22
LTH2
1

Q
J
I
N
N
W
J
X
N



上 册

代数与初等函数自学指导

湖南教育出版社

代数与初等函数自学指导

上 册

辽吉黑湘四省小学教师进修中师教材协编组编

湖南教育出版社

说 明

本书是为了帮助函授学员学好辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省协编小学教师进修中等师范试用教材《代数与初等函数》(上册)而编写的,也可供业余面授,离职进修学员参考。

本书的主要内容有:一般学习方法指导,第一至八章的学习要求,注意事项,学习指导,练习、习题和复习题的解答,并附有自测题。

本书的编写人员有李辉、张文全、刘振洲、刘仲虎、时承权,由戴再平副教授主编并审阅。制图陈庆玉。本书经辽宁、吉林、黑龙江、湖南、安徽五省小学教师进修中师教材编审会议审定。

由于编写人员的水平有限,加之编写时间短促,缺点与错误在所难免,敬希读者批评指正。

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省
小学教师进修中师教材协编组

一九八三年八月

目 录

一般学习方法指导.....(1)

第一章 函数、幂函数、指数函数和对数函数.....(4)

一 函数

1.1函数(6) 1.2单调性(16) 1.3奇偶性(18)

1.4有界性(23) 1.5反函数(25) 习题一解答(30)

二 幂函数

1.6幂函数(34) 1.7幂函数的图象和性质(36)

习题二解答(39)

三 指数函数和对数函数

1.8指数函数及其图象(42) 1.9指数函数的性质(45)

习题三解答(46) 1.10对数函数及其图象(48) 1.11

对数函数的性质(50) 1.12对数换底公式(52) 习题

四解答(55)

*四 指数方程和对数方程

1.13指数方程(58) 1.14对数方程(60) 习题五解

答(64)

复习题一解答(66) 自测题一(72)

第二章 三角函数.....(74)

一 任意角的三角函数

2.1角的概念的推广(76) 2.2弧度制(78) 习题六解

答(80) 2.3任意角的三角函数(84) 2.4同角三角函数的

基本关系式(88) 习题七解答(92) 2.5诱导公式(97)

2.6已知三角函数值求角(100) 习题八解答(101)

二 三角函数的图象和性质

2.7正弦函数的图象和性质(104) 2.8余弦函数的图象和性质(109) 习题九解答(112) *2.9函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象(117) 2.10正切函数、余切函数的图象和性质(123) 习题十解答(125) 复习题二解答(129) 自测题二(137)

第三章 两角和与差、倍角、半角的三角函数……………(139)

3.1两角和与差的三角函数(140) 习题十一解答(147)

3.2二倍角的正弦、余弦和正切(153) 3.3半角的正弦、余弦和正切(156) 习题十二解答(161) *3.4三角函数的积化和差与和差化积(164) 习题十三解答(169) 复习题三解答(172) 自测题三(178)

*第四章 反三角函数和简单三角方程……………(180)

一 反三角函数

4.1反正弦函数(182) 4.2反余弦函数(186) 4.3反正切函数与反余切函数(190) 习题十四解答(191)

二 简单三角方程

4.4最简单的三角方程(193) 4.5简单三角方程(197) 习题十五解答(204)

复习题四解答(205)

第五章 行列式和线性方程组……………(216)

5.1二元线性方程组和二阶行列式(217) 习题十六解答(220) 5.2三阶行列式(223) 5.3三阶行列式的性质(225) 5.4按一行(或一列)展开三阶行列式(231) 习题十七解答(234) 5.5用行列式解三元线性方程组(237) 习题十八解答(239) 复习题五解答(241) 自测题四(246)

第六章 不等式……………(248)

一 不等式的性质

6.1不等式(252) 6.2不等式的性质(253)

二 不等式的解法

6.3同解不等式(256) 6.4不等式组(257) 6.5分式不等式(259) 6.6绝对值不等式(260) 习题十九解答(261)

三 不等式的证明

6.7比较法(264) 6.8分析法(266) 6.9综合法(267) 习题二十解答(271)

四 不等式的一些应用

6.10列不等式解应用问题(275) 6.11讨论方程的根(277) 6.12求最大值或最小值(279) 习题二十一解答(281)

复习题六解答(285) 自测题五(295)

第七章 不定方程.....(296)

7.1不定方程(298) 7.2二元一次不定方程(298) 7.3可归结为二元一次不定方程的一次不定方程组(303) 7.4其他不定方程解法举例(305) 习题二十二解答(309) 复习题七解答(313) 自测题六(316)

第八章 数集.....(318)

一 有理数集

8.1整数集(320) 8.2有理数集(323) 习题二十三解答(328)

二 实数集

8.3实数集(331) 8.4实数集的性质(335) 8.5数集扩展的原则(338) 习题二十四解答(339)

*三 复数集

8.6 复数的概念(340) 8.7复数的运算(343) 习题二十五解答(345)

复习题八解答(349) 自测题七(353)

一般学习方法指导

数学以现实世界中的空间形式和数量关系为研究对象,《代数与初等函数》(上册)研究数、式、方程、不等式和函数等内容,在学习过程中学员始终要注意数量关系与空间形式之间的联系。

在阅读各章课文之前,学员应先阅读《自学指导》中关于本章的“要求”和“注意事项”,要有目的地进行自学,有计划地支配时间。对“注意事项”中所列举的知识基础,如果未能全部具备,则应首先加以弥补,然后再开始阅读课文。

1. 课 文

(1) 阅读课文要仔细,要弄清每句话、每个式子所表达的意思。必须在对前面的内容已有正确了解之后,再研究新的内容,也就是说,要坚持循序渐进。

(2) 应特别重视基本概念。只有在清楚地理解基本概念的前提下,才能进一步阅读例题,或动手去做练习和习题,课本中就某些概念举了一些相应的例子,使我们不仅能从正面去理解概念,而且还能通过特例和反例对概念进行辨析,以便更深刻地掌握概念的本质。

(3) 每节课文都分成了若干较小的“步”,每步之后安排了为消化这一步课文所需的练习。学员在看完一段课文后,务必立即独立地解答相应的练习题,再与《自学指导》中的解答对照,

如发现有错误，就应分析产生错误的具体原因，及时解决，然后再进行下步的学习。每“步”所需的自学时间，应根据该步内容的多少和学员的不同情况而异，步调快慢可以自定，不必硬性规定。

(4) 学习每个定理、法则、性质、公式时，要注意分清它们的条件和结论，要通过例题了解它们的基本的应用，对于这些定理、法则、性质、公式，仅仅掌握它们的结论是不够的，更重要的是通过它们的推导和论证，领会数学方法，提高自己分析问题和解决问题的能力。

(5) 《自学指导》中，每小节都有“学习指导”，主要指出这一节课文的内容，学习时应具备哪些基础知识，对课文作一些必要的解释和补充，帮助学员理解课文，防止错误，个别地方对教材作些引伸。“学习指导”可配合课文随时阅读。

(6) 凡是带*号的章、单元、节，都是函授和在职面授的选学内容，仅对离职进修的学员才是必学内容。

2. 习 题

(1) 课文中每步后的“练习”，是为了帮助学员理解、掌握前面的基础知识而设的，所以不应积累到一起解决，而应随着课文及时解答。

(2) 一节或几节后设有习题，解答习题时要从教材的理论出发，适当参照例题，注意每一步计算、推导或变换的根据（不一定都写出来）。

(3) 复习题可在学完全章后解答，也可在学完各节后分别解答。解答复习题时要注意综合运用所学的知识。复习题中带*号的题，是为相应的选学内容而设的，函授和在职面授的学员

可以不做。

(4) 做练习题和习题时，不要先看答案，应该坚持独立完成，然后再与《自学指导》中的解答进行对照检查。

(5) 同一题目可能有不同的解答方法，学员应该探求比较简捷、合理的解法。

(6) 解答问题时，有关图形要正确、整洁，关键性的“点”必须准确，不要用特殊图形代替一般图形。数学符号要正确。行文和格式要规范。

3. 小结和自测题

(1) 每章末尾均有本章的小结，学员必须认真、仔细阅读，读后还应再重新看《自学指导》中本章的“要求”，对照检查自己是否已经达到。

(2) 没有做完练习和习题，没有完成小结之前，不应动手去做自测题。

(3) 自测题可在教师统一布置下进行，也可由学员自行独立完成。无论采用何种方法，均应一次完成，记录时间。

(4) 《自学指导》中未给出自测题的解答。自测题做完后应由教师检查、评分。

第一章 函数、幂函数、指数函数和对数函数

要求:

1. 通过用集合对应的观点解释函数定义, 加深对函数概念的理解。理解函数定义域、值域的概念, 会求简单函数的定义域;

2. 理解函数的单调性概念, 并能判断一些简单函数在给定区间上的单调性; 理解函数的奇偶性概念, 判断一些简单函数的奇偶性, 且能利用函数的奇偶性, 简化函数图象的画法; 理解反函数的意义, 以及互为反函数的函数图象间的关系;

3. 掌握有理指数的幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质;

4. 通过揭示集合、对应与函数之间的内在联系, 以及对数函数与指数函数之间的内在联系, 从而进一步提高用辩证唯物主义的观点去分析研究问题的能力;

5. 本章第四单元指数方程和对数方程, 是函授学员与业余面授学员的选学内容;

6. 课时分配(供参考):

内 容	函授	业余面授	离职进修
一 函 数	16	11	10
二 幂函数	4	3	2
三 指数函数和对数函数	11	8	6

*四 指数方程和对数方程	0	4	4
小结和复习	4	2	2
合 计	35	28	24

注意事项:

1.本章由函数,幂函数,指数函数和对数函数,指数方程及对数方程四部分组成。学习本章之前,学员应掌握好以下基础知识:集合与对应;指数、对数的运算法则;函数及其图象的初步知识。

2.函数是数学中的一个重要的基本概念。在小学数学中十分注意渗透函数思想,掌握好函数的基础知识,对于加深小学数学教材的理解,提高学员的教学水平具有重要意义。函数是中学数学的重要组成部分,它与数学的其它内容,如数、式、方程等都有密切联系,深刻理解函数概念,对于继续学好数学课程的其它内容将起重要作用。本章教材是我们系统学习函数知识的开始,只有将这一章学好了,才能顺利地学习以后各章。

3.函数概念是客观世界各种事物的运动、变化、相互制约的辩证关系在数学中的反映。这就要求我们在学习中,注意运用运动、变化的观点、相互联系的观点以及对立统一的观点去考察研究问题,从而不断提高自己用辩证唯物主义观点去分析问题和解决问题的能力。

4.在小学数学教材中,虽然没有明确提出函数的概念,但是,在很多地方渗透着函数的思想,例如:

(1) 四则运算中,已知数的变化,引起运算结果的变化。加数的变化引起和的变化;减数(或被减数)的变化,引起差的变化;乘数的变化引起积的变化;除数(或被除数)的变化引

起商的变化。

(2) 分数里, 分子或分母的变化, 引起分数值的变化。

(3) 统计图表。

(4) 简单几何图形的面积和体积公式。

(5) 成正比例的和成反比例的量。

因此, 在学习本章时, 应注意与以上内容的联系, 以加深对上述知识的理解。

5. 本章教材的重点是函数、反函数等概念, 以及幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质。理解和掌握函数概念是顺利学习本章其他知识和下几章的关键。

6. 本章的第一个难点是用集合间元素对应的观点来理解函数概念; 第二个难点是反函数, 以及用反函数概念来分析指数函数与对数函数之间的内在联系。

本章教材概念多, 符号多, 头绪多, 内容抽象, 难点比较集中。为了解决难点, 应特别注意对基本概念的定义的理解。仔细思考教材中对某些定义所举的例子, 逐步从感性认识提高到理性认识; 要注意运用对比方法, 比较几个概念的异同; 要注意结合函数图象或直观图形, 来说明有关的概念和性质。

一 函 数

1.1 函 数

学习指导

1. 教材中关于函数概念的叙述, 和初中数学课本中一样, 就是在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , y 依赖于 x 而变化; y

与 x 之间的依赖关系通过 y 与 x 之间的对应关系表示出来；这个对应是单值对应，就是对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 都有唯一确定的对应值。

教材中在叙述函数概念之后指出：“在函数的概念中……是从定义域到值域的单值对应。”这段话是用集合对应的观点对函数概念的解释，并不是改变或扩充函数概念。通过学习要明确函数概念必须具备：两个集合——定义域和值域，一个对应——从定义域到值域的单值对应。

2. 为什么常量可以看作自变量的函数？

在函数定义里，并没有要求自变量变动时，函数的对应值一定要变化，重要的是：对于自变量每一个可能取的值，有一个确定的函数值和它对应。由此可知，常量也可以看作是自变量 x 的函数，因为无论 x 取什么数值，函数 y 总有一个确定的值和它对应。如 $y=1$ 是定义在 R 上的一个函数，在这里， x 虽然没有在等号右边出现，但它的含义是不论 x 取 R 中的任意值， y 总取 1 与它对应，因此，函数的值域是 $\{1\}$ 。学员仍可能发生一个疑问：变量 y 不是成了常量吗？这是因为在数学上常量和变量的区分也不是绝对的，就象在物理学中的静止与平衡是运动的特殊情况一样，常量是一种特殊的变量，即只能取一个确定数值的变量。

3. 函数 $y=f(x)$ 中的“ f ”表示从变量 x 到变量 y 的对应关系（函数关系）。如果函数是用解析法表示的，那么它的对应关系 f 就是指按一定顺序施于自变量 x 的运算的总和。例如，函数 $y=3x$ 的对应关系 $f: x \rightarrow 3x$ 是指自变量乘以 3。又如函数

$$y=x^2-3x+5.$$

这里对应关系 $f: x \rightarrow x^2-3x+5$ 是指（自变量）²-3×（自变

量)+5. 它具体地指出了由自变量 x 的值去求变量 y 的对应值的方法. 如求 $f(2)$, 就是对“2”实行以上这一系列运算, 即 $2^2 - 3 \times 2 + 5 = 3$ 而得到 $f(2) = 3$.

我们不要简单地把这个关系看作“代入”, 而应从对应的角度去理解. 否则会弄不清楚 $f(x+a)$, $f(x)+a$, $f[f(x)]$ 是什么意思.

$f(x+a)$ 就是对 $x+a$ 施行上述运算:

$$\begin{aligned} f(x+a) &= (x+a)^2 - 3(x+a) + 5 \\ &= x^2 + 2ax + a^2 - 3x - 3a + 5 \\ &= x^2 + (2a-3)x + (a^2 - 3a + 5), \end{aligned}$$

$$f(x) + a = x^2 - 3x + 5 + a,$$

$f[f(x)]$ 也是对 $f(x)$ 施行上述运算:

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= [f(x)]^2 - 3[f(x)] + 5 \\ &= (x^2 - 3x + 5)^2 - 3(x^2 - 3x + 5) + 5 \\ &= x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 21x + 15. \end{aligned}$$

4. 我们在求函数的定义域时, 若能注意到下面几点, 就会减少一些困难.

(1) 在实际问题中, 必须考虑变量的实际意义, 例如, 温度自记纸所记录的一昼夜 (从0时开始到24时为止) 的气温 T 的变化情况. 显然, 这里气温 T 是时间 t 的函数, 函数的定义域是 $[0, 24]$.

(2) 对于用数学式子 $y=f(x)$ 表示的函数, 如果没有特别声明, 函数的定义域是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合. 如偶次根式的被开方数必须大于或等于零; 分式的分母不能为零等.

求函数的定义域, 一般从两方面入手. 一个是把不合格的

挑出去，剩下的当然都是合格的了，这往往与解方程联系在一起；另一个是把合格的全找出来，这往往与解不等式联系在一起。如果这两者要同时考虑，这就要解一个由不等式与方程联立的混合组。

必须注意，函数的定义域不一定是区间。例如，设 y 表示内接于已知圆的正 x 边形的面积，显然 y 是 x 的函数。但多边形的边数只能是大于 2 的整数，所以函数的定义域是 3 和大于 3 的一切整数。 $\{x|x \geq 3, x \in \mathbb{N}\}$ 。

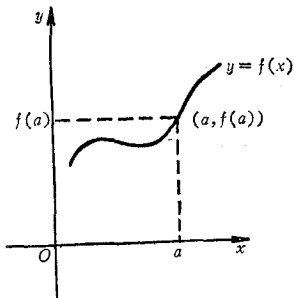
5. 为了研究函数的定义域和函数的性质，教材介绍了区间的概念和表示区间的符号，这样一来，例如，全体大于 1 小于 2 的实数所组成的集合，可以表示为 $\{x|1 < x < 2\}$ 或 $(1, 2)$ 。对一个具体问题，可根据习惯或简明方便的要求酌情采用。

6. 记号 $f(x)$ 和 $f(a)$ 有什么区别？

$f(x)$ 表示自变量为 x 的函数，它是一个变量，而 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的函数值。一般来说，记号 $f(a)$ 表示一个数。例如 $f(x) = 2x + 3$ ，那么 $f(0)$ 就是 $2x + 3$ 在 $x=0$ 时的值。

$$f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3。$$

另外，在平面直角坐标系里，我们所研究的函数 $f(x)$ 的图象通常表示一条曲线（或几条曲线），而 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ ，则是曲线上对应点的纵坐标，如右图所示。



7. 在函数定义中重要的一点是：自变量 x 在定义域内每取一个确定的值，函数 y 都有唯一确定的值与之对应。至于表示函数的方式，定义中丝毫没有加以限制。因此，函数不一定要用解

析法表示，图象法和列表法同样可以表示函数。二解析法、图象法和列表法是最常用的三种函数关系表示法。除此以外，有时我们也直接用语言叙述的方法来表示变量间的函数关系。例如，“设 x 是有理数时，函数 y 的值是 1， x 是无理数时， y 的值是零”。它可以这样表示：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

例如， $D(0) = D(1) = D(-\frac{1}{2}) = D(0.1) = 1$ ，

$$D(\sqrt{2}) = D(\pi) = D(\sqrt[3]{10}) = 0.$$

8. 在数学中，大多数情形都是用解析法来表示函数关系。所以“解析式”是定义与研究函数的有力工具。但需指出一点，利用解析法表示函数时，有的函数不能只用一个解析式表示，而要用两个或几个解析式才能表示出来。例如，设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ x, & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

是定义在 R 上的一个函数。因为对于自变量 x 的每一个值，我们都能指出函数 $f(x)$ 的一个对应值。如果 x 是负值或者是零时，则 $f(x)$ 等于零，例如，

$$f(0) = 0, f(-\frac{1}{2}) = 0, f(-\pi) = 0 \text{ 等等.}$$

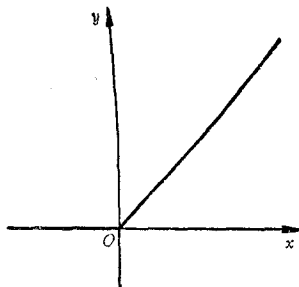
如果 x 是正值时，则 $f(x)$ 等于自变量 x 的值，例如，

$$f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}, f(5) = 5, f(\pi) = \pi \text{ 等等.}$$

两个式子 $f(x)=0$, 当 $x \leq 0$, 与 $f(x)=x$, 当 $x > 0$, 确定了一个函数。它的图象如右图所示。

又如, 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2x, & x \in [1, 2], \\ x^2, & x \in (2, 3]. \end{cases}$$



它满足函数的定义, 因为对于自变量 x 的每一个值, 我们都能指出函数 $f(x)$ 的一个对应值。当 x 取 $[0, 1]$ 上的数值时, $f(x) = x$ 。因此有 $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ 等。当 x 取 $[1, 2]$ 上的数值

时, $f(x)=2x$ 。因此有 $f(1)=2 \times 1=2$, $f(\sqrt{2})=2 \times \sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$, $f(1.43)=2 \times 1.43=2.86$,

$f(2)=4$ 等。当 x 取 $(2, 3]$ 上的数值时,

$f(x)=x^2$ 。因此有 $f(2.1)=(2.1)^2=$

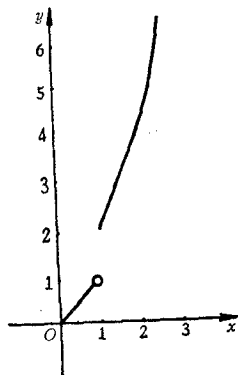
4.41 , $f(3)=3^2=9$ 等。所以它就是用

三个式子来表示的一个函数(注意不是

表示三个函数)。这个函数的定义域是

闭区间 $[0, 3]$ 。函数的值域是 $[0, 1] \cup$

$[2, 9]$ 。函数的图象如右图所示。



9. 两个函数在什么条件下是相同的呢?

由函数的定义知道, 函数概念有以下三个要素:

(1) 定义域, 即自变量的取值范围;

(2) 值域, 即对应于定义域的函数值的范围;

(3) 对应关系, 即自变量与函数间的单值对应关系。

这三个要素中, 当函数的定义域和自变量与函数间的单值