全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数 第二版

魏福义　黄燕苹　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线　性　代　数

第二版

魏福义　黄燕苹　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/魏福义，黄燕苹主编．—2版．—北京：中国农业出版社，2007.8
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11836-2

Ⅰ．线…　Ⅱ．①魏…②黄…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第107202号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码100026）
责任编辑　龙永志

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2003年2月第1版　　2007年8月第2版
2007年8月第2版北京第1次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：10.5
字数：180千字
定价：16.00元

内容简介

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，内容包括矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、向量的内积与二次型、线性空间、Matlab 软件的应用. 为了适应时代对创新人才的要求，增加了数学建模和数学实验内容，附录提供了实验报告的格式.

本教材在第一版的基础上做了较大幅度的修改.全书以矩阵为主线进行论述，淡化行列式的内容，把向量的内积、正交矩阵以及二次型的相关内容合并为一章；要求学生在掌握线性代数理论的同时，对数学建模和 Matlab 软件有一定了解，能熟练用 Matlab 软件求解线性代数中的相关问题.在例题上有较多的工业、农业、经济管理、生活方面的实例，在习题方面安排有选择和填空题型.

本书可以作为高等农林、水产院校各专业以及其他院校相关专业的线性代数课程教材或教学参考书.建议学时:理工科(含计算机)专业，34~38 学时；农林医、水产及经济管理专业，28~32 学时(不含*号部分).

第二版编写人员名单

主　编　魏福义　黄燕苹

副主编　曾文才　崔克俭　刘建慧　张立石

参　编　廖　霞　侯建文　颜亭玉　孔素然

主　审　郭正光　刘金山

第二版前言

本书第一版从2003年至今已印刷6次，并获2005年全国高等农业院校优秀教材奖．期间使用本书的读者和同行提出了一些指导意见和建议，在此向关心本书的同志们表示感谢．

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，由华南农业大学、西南大学、北京农学院、山西农业大学、大连水产学院这5所高等院校中多年从事《线性代数》教学的老师编写而成，适合于理工、农林及水产院校（特别是非重点院校）各专业作为教材使用．

这次修订，在内容上以矩阵为主线进行论述，淡化了行列式的计算部分，加强了数学建模和数学实验的训练，加入了Matlab软件基本知识的介绍，把数学软件在行列式、逆矩阵、矩阵的秩、特征值、特征向量、解线性方程组、标准二次型、正交矩阵等方面的应用作为必修内容．在方法上要求学生在掌握线性代数理论的同时，对Matlab软件有一定的了解，能用Matlab软件求解线性代数中的相关问题．在例题中配有较多的工业、农业、经济管理、生活方面的案例，同时给出了基础实验和综合实验的两个实验报告实例．使学生在掌握数学建模的基本思想的同时，进一步加深了对数学概念、理论和方法的理解，从而增强他们分析问题和解决问题的能力，提高他们的数学素养．在习题方面增加了选择题和填空题，便于学生适应标准化考试．

我们衷心感谢华南农业大学的郭正光教授和刘金山教授，是他们在百忙中为本书审稿，并提出了许多指导意见和建议；感谢中国农业出版社对本书的关心和扶植．

由于编者水平所限，本书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正．

编　者

2007年3月于广州

第一版编写人员名单

主　编　魏福义　黄燕苹

副主编　刘建慧　刘海南　张立石　崔克俭

参　编　廖　霞　方桂英　魏辽榕　侯建文

　　　　曾文才

主　审　张国权　安幼山

第一版前言

线性代数是一门基础数学课程,它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和应用性.由于计算机科学的飞速发展,计算机技术和数学软件的广泛普及,使得线性代数成为理工、农林、水产、经济、管理各专业本科学生以及科技、管理人员必修的重要课程.

本教材是全国高等农林院校"十五"规划统编教材,由华南农业大学、西南农业大学、北京农学院、江西农业大学、山西农业大学、大连水产学院这六所高等院校中多年从事线性代数教学的老师编写而成,适合于农林、水产院校各专业作为教材使用.

在内容上以矩阵为主线进行论述,行列式作为矩阵的性质给出,淡化了数值计算部分,加强了数学建模的训练,加入了 Matlab 软件基本知识的介绍,把它在行列式、逆矩阵、矩阵的秩、特征值、特征向量、解线性方程组、标准二次型、正交矩阵等方面的应用作为必修内容.在方法上要求学生在掌握线性代数理论的同时,对 Matlab 软件基本了解,能熟练运用 Matlab 软件求解线性代数中的相关问题.在例题上有较多的工业、农业、经济管理、生活方面的实例,使学生掌握数学建模的基本思想.在习题方面增加了选择题和填空题,便于学生适应标准化考试.从而加深学生对数学概念的理解,对数学思想和方法的掌握,培养学生认识问题和解决问题的能力、逻辑推理能力和创新能力,提高学生的数学素养.

我们衷心感谢华南农业大学的张国权教授和北京农学院的安幼山教授,在百忙中为本书审稿,提出了许多指导意见和具体的修改建议.

由于编者水平所限,本书中难免有错误和不妥之处,敬请读者批评指正.

编　者

2002 年 12 月于广州

目　录

第一章　矩　　阵

在中学已经学习了有关两个方程、两个未知量的二元一次方程组的基本知识．在自然科学、社会科学和许多工程技术问题中，常常需要处理几十、几百甚至成千上万个未知量的一次方程组(也称线性方程组)，未知量的个数和方程的个数也不一定相等．如何解 m 个方程、n 个未知量的线性方程组？矩阵是解决这类问题的重要工具之一．它在工业、农业、经济等许多领域有着广泛的应用．伴随计算机技术的飞速发展，矩阵被更有效地运用到物理学、力学、化学、生物学、遗传学、医学等众多学科中，成为解决线性问题的有力工具．

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　线性方程组和矩阵的概念

线性方程组(system of linear equations)的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

显见，二元一次方程组是其特款．方程组(1.1)中有 m 个方程、n 个未知量. a_{ij}代表第 i 个方程中未知量 x_j 的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项．当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$全为零时，式(1.1)称为**齐次线性方程组(system of homogeneous liner equation)**；当常数项不全为零时，式(1.1)称为**非齐次线性方程组(system of non-homogene ous liner equation)**.

当 m、n 较大时，方程组(1.1)的书写需要重复许多次未知量以及“+”、“=”运算符号，如用计算机进行处理，则浪费很多存储空间．如果将方程组(1.1)中未知量的系数抽出，可得到如下 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

若再考虑方程组右端的常数项,还可得到 m 行 $n+1$ 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

对方程组的研究可以归结于对如上形式数表的研究.

定义 1.1 将 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行 n 列数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

称为一个 **m 行 n 列矩阵(matrix)**,或 **$m\times n$ 矩阵**,简记为:$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$,通常用大写字母 A,B,C 表示. 其中横向各排称为**行**,纵向各排称为**列**,$m\times n$ 个数叫作矩阵 A 的**元**或**元素**;a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列的**元**;所有元素均为 0 的矩阵,称为**零矩阵**,记作 O. 元是实数的矩阵称为**实矩阵**,元是复数的矩阵称为**复矩阵**.

本书中的矩阵除特殊说明外,都指实矩阵.

如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 行数与列数等于 n,则 A 称为 **n 阶矩阵**,或称为 **n 阶方阵(square matrix)**.

如下形式的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵(identity matrix)**,简称单位阵,记为 I 或 I_n.

主对角线以外元素全为零的 n 阶方阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为**对角线矩阵(diagonal matrix)**,简称**对角阵**,简记为

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

易知,n 阶单位阵是 n 阶对角阵的特款.

在方阵中,从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**,主对角线上的元称为**对角元**. 主对角线一侧所有元都为零的方阵称为**三角形矩阵**(**triangular matrix**). 三角形矩阵有两种,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别称为**上三角形矩阵**或**下三角形矩阵**.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1 a_2 \cdots a_n)$$

称为**行矩阵**, 又称为**行向量**(**row veltor**). 为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**, 又称为**列向量**(**Column Vector**).

定义 1.2 如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 有相同的行数和相同的列数,并且对应位置的元均相等,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等(**equal**),记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 即如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots, m; j=1,2,\cdots, n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.2 矩阵的基本运算及性质

定义 1.3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和矩阵**,并称这种运算为矩阵的**加法**(**addition**)运算.

注意,只有当两个矩阵的行数与列数分别相等时才可以作加法运算,这样的两个矩阵称为**同型矩阵**.

矩阵加法满足下列运算规律(其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

由此规定矩阵的**减法**(**subtraction**)为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

定义 1.4 设 λ 为一个数,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,矩阵

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**乘积**,也称为**数乘矩阵**.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ、μ 为数,数乘矩阵满足下列运算规律

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

定义 1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}$由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**(**product**),记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

如果记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

则线性方程组(1.1)可以通过矩阵的乘法表示成下列方程

$$\boldsymbol{A}x=b. \tag{1.3}$$

这种用等号连接起来含有未知矩阵的等式称为**矩阵方程**(**matrix equation**).

下面给出一些矩阵基本运算的例子.

例 1.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$，

则
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

例 1.2　数乘矩阵　$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 15 \\ -9 & -12 & 15 \end{pmatrix}$.

例 1.3　矩阵乘法　$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+0+0+0 \\ 2-1+0+1 \\ 0+0+0+0 \\ 0-1+0+0 \\ 1+0+0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例 1.4　矩阵乘法　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

例 1.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}.$$

由定义及例 1.5 可以看出，矩阵乘法与数的乘法有一些根本性的区别：

(1) 矩阵的乘法对相乘的两个矩阵在行数和列数上是有要求的，即乘积 $\boldsymbol{AB}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，否则乘法无意义.

(2) 矩阵的乘法不满足交换律，即在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 实际上，$\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义，即使有意义，两者也不一定相等.

(3) 两个非零矩阵相乘有可能等于零矩阵. 因而，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

假设以后的矩阵运算都有意义. 可以验证矩阵的乘法满足如下运算规律

(1) 结合律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$；

（2）分配律　$(A+B)C=AC+BC, A(B+C)=AB+AC$;

（3）对任一数 k，有 $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

矩阵连同满足运算规律的加法、数乘和乘法运算统称为**矩阵代数**.

对任意矩阵 A, B，有 $IA=A, BI=B$.

定义 1.6　把矩阵 A 的各行变成同序数的各列得到的矩阵，称为 A 的**转置**(**transpose**)，记作 A^{T}(或 A').

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的转置为 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足如下运算规律

（1）$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

（2）$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

（3）$(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$;

（4）$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

前三个规律是显然的，现在证明(4)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times p$ 矩阵，于是

$$A^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m}, B^{\mathrm{T}}=(b'_{ij})_{p\times n}, \text{其中 } a'_{ij}=a_{ji}, b'_{ij}=b_{ji},$$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 j 列元为　$\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}'a_{kj}' = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$.

而 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 j 列元是 AB 中的第 j 行第 i 列元，即　$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$,

所以 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.　　证毕

矩阵除了用来解线性方程组外，还是处理许多实际问题的有力工具．因此，矩阵运算的化简具有十分重要的意义．矩阵的分块是处理复杂矩阵常用的方法．对于行数和列数较高的矩阵 A，为了使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，时常采用**分块法**．将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的**子块**，以子块为元的矩阵称为**分块矩阵**(**partitioned matrices**).

例如将 3×4 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多，下面举出一种分块形式