新起点 高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

高等数学学习指导

主编 惠淑荣 史俊贤

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

新起点 高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

高等数学学习指导

主　编　惠淑荣　史俊贤

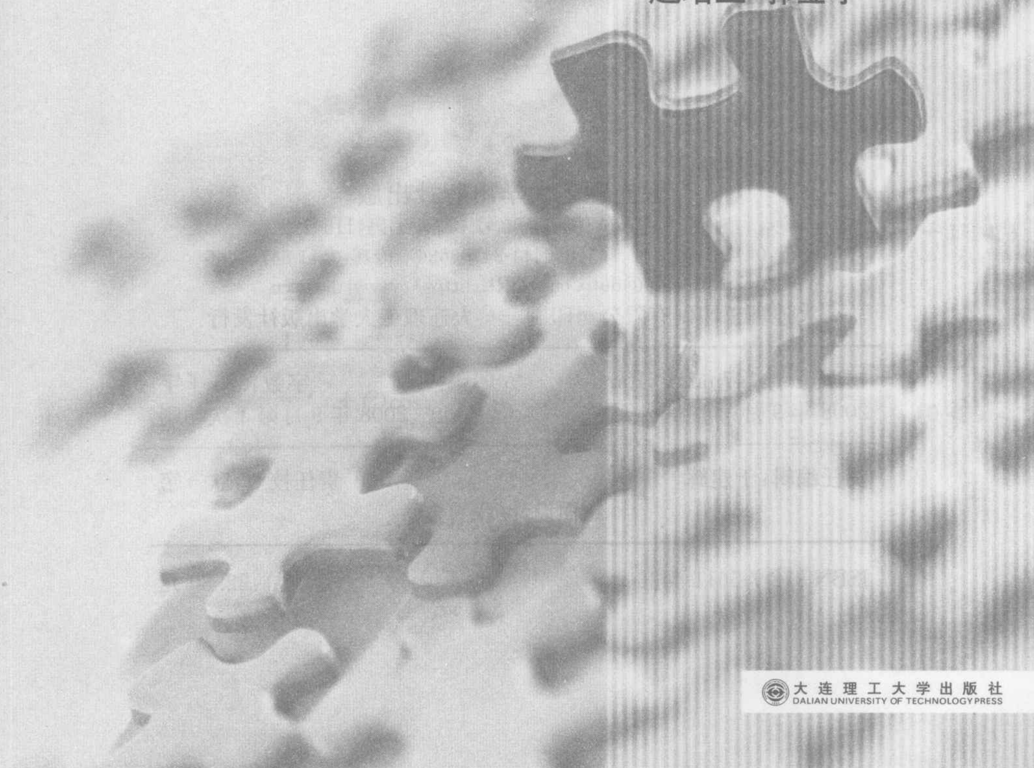
副主编　滕　勇　郭志鹏　宋　赟

编　者（按姓氏笔画）

马　芳　边　颖　关　驰

刘　波　李石涛　陈忠维

赵培玉　郭金亭



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导 / 惠淑荣,史俊贤主编. —大连:大连理工大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5611-4436-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①惠… ②史… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 132215 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:9.5 字数:385 千字

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:于建辉 责任校对:欣 宇

封面设计:张 金

ISBN 978-7-5611-4436-7 定 价:22.80 元

前 言

高等数学是高等院校学生最重要的基础课程之一，为了指导学生更好地学习这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，我们根据各个不同专业高等数学教学大纲的相关要求组织编写了这本《高等数学学习指导》。

本书是《高等数学》(第二版，史俊贤、惠淑荣主编，大连理工大学出版社出版)的配套辅导书。本书不仅对教师和学生有辅助作用，而且对准备考研的学生和科技工作者也有一定的指导作用。

本书共分 11 章，每章均包含四部分内容：

知识点精要 给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，便于学生学习和记忆。

典型题精解 由易到难，配合课堂教学同步训练，附有详细的解答过程。

教材习题同步解析 给出了教材中全部习题的解答。

单元同步测试 便于学生及时了解本章的学习情况。

本书在编写过程中得到了沈阳农业大学有关教师的大力支持，在此表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中不妥之处，恳请各位同仁及读者批评指正。

编 者

2008 年 8 月

目 录

第 1 章　函数与极限

知识点精要

1. 集合

集合是具有某种属性的一些对象所组成的总体。

集合里的各个对象称为这个集合的元素。

2. 邻域

当 $\delta>0$ 时，我们称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $\bigcup(a,\delta)$，即 $\bigcup(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$。点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{\bigcup}(a,\delta)$，即 $\mathring{\bigcup}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$。

3. 函数及其特性

设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。

特性：(1)有界性；(2)单调性；(3)奇偶性；(4)周期性。

4. 初等函数

(1)基本初等函数：幂函数，指数函数，三角函数，反三角函数等五类函数。

(2)初等函数：由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数。

5. 数列的极限

如果当 n 趋向无穷大($n\to\infty$)时，a_n 无限趋近于一个确定的常数 a，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$。

如果数列没有极限，则称它是发散的。

6. 函数的极限

(1)当 $x\to\infty$ 时函数的极限

如果当 x 的绝对值无限增大($x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数

A,则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to\infty)$。类似地,可定义 $x\to-\infty$,$x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 以 A 为极限。

(2)当 $x\to x_0$ 时函数的极限

如果当 x 无限趋近于定值 x_0,即 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。

如果 x 从 x_0 的左侧($x<x_0$)趋于 x_0,而 $f(x)$ 趋于 A,则称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$。

如果 x 从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋于 x_0,而 $f(x)$ 趋于 A,则称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$。

定理:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 成立的充要条件是:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

(3)极限的性质

①若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$。

②若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则必存在 x_0 的某一个邻域(x_0 除外),在此邻域内 $f(x)$ 有界。

③若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在 x_0 的某一个邻域,在此邻域内,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

④若在 x_0 的某一邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$)。

7. 无穷小与无穷大

(1)无穷小:以零为极限的变量称为无穷小量。

(2)无穷小的运算性质:

①有限个无穷小的代数和是无穷小。

②无穷小与有界变量的积是无穷小。

③无穷小与常数的乘积是无穷小。

④有限个无穷小的乘积是无穷小。

定理:$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

(3)无穷大:如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大。

定理:在自变量 x 的同一变化过程中,

①如果 $f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小;

②如果 $f(x)(f(x)\neq 0)$是无穷小,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大。

8. 极限的运算法则

如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

其中,$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$,$b_j(j=0,1,2,\cdots,m)$为常数,$a_0\neq 0$,$b_0\neq 0$,m,n 均为非负整数。

9. 两个重要极限

(1)极限存在准则

如果在 x_0 的某一邻域内(x_0 点可除外),有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

(2)两个重要极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

②$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

10. 无穷小的比较

设在同一变化过程中,α 与 β 都是无穷小,且 $\beta\neq 0$,

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 高阶的无穷小,记 $\alpha=o(\beta)$;

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k\neq 0$,则称 α 与 β 是同阶的无穷小;

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 与 β 是等价的无穷小,记 $\alpha\sim\beta$。

定理：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，如果 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$。

11. 函数的连续性

(1)连续函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处既左连续，又右连续。

(2)函数的间断点

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，分为下列三种情况：

①$f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③虽然 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

分类如下：

$$\text{间断点}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{第一类间断点}\\\text{(左右极限都存在)}\end{array}\begin{cases}\text{可去间断点(左右极限相等)}\\\text{跳跃间断点(左右极限不相等)}\end{cases}\\\text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷型间断点}\\\text{振荡型间断点}\end{cases}\end{cases}$$

(3)连续函数的运算性质

在同一区间上连续函数的和、差、积、商(分母不为零)在该区间仍是连续函数；连续函数的复合函数仍是连续函数；所有基本初等函数在其定义域内都是连续函数；一切初等函数在其定义区间内是连续的。

(4)闭区间上连续函数的性质

①最大值和最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最小值。

②介值定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对于满足条件 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 的任何实数 μ，在闭区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$。

③零点定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

典型题精解

【例 1】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\lg(2-x)-\arccos\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$的定义域。

解 这个函数表达式是三项之和，当且仅当每一项都有意义时，函数才有意义。

第一项定义域 $D_1=\{x|x^2-1>0\}$，第二项定义域 $D_2=\{x|2-x>0\}$，第三项定义域 $D_3=\{x|-1\leqslant\dfrac{x}{2}+1\leqslant1\}$，所以 $f(x)$定义域 $D=D_1\cap D_2\cap D_3=\{x|-4\leqslant x<-1\}$。

【例 2】 设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$内的任意函数。证明：$f(x)$ 可表达为一个偶函数与一个奇函数之和。

证明 设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$内的任意函数，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)),\quad \psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

显然，$\varphi(x)$是偶函数，$\psi(x)$是奇函数，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，因此定义在对称区间$(-l,l)$内的任意函数 $f(x)$都可表达为一个偶函数与一个奇函数之和。

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$。

解 $x\neq2$ 时，$\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\dfrac{[(\sqrt{6-x})^2-2^2](\sqrt{3-x}+1)}{[(\sqrt{3-x})^2-1^2](\sqrt{6-x}+2)}=\dfrac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$

于是
$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}=\frac{1}{2}$$

【例 4】 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$。

解 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+\sin x)\sim\sin x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

【例 5】 证明方程 $x^4-2x-1=0$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

证明 设 $f(x)=x^4-2x-1$，则 $f(x)$在闭区间$[1,2]$上连续，且 $f(1)=-2$，

$f(2)=11$，有 $f(1)\cdot f(2)<0$，则在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，证毕。

【例 6】 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

应怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数。

解 由初等函数的连续性，须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

在 $x=0$ 处，
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a$$
$$f(0)=a。$$

取 $a=1$，即有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是取 $a=1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

【例 7】 证明方程 $\frac{x^3}{3}+x+1=0$，在 $(-1,0)$ 内有唯一实根。

证明 令 $f(x)=\frac{x^3}{3}+x+1$，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续。

$f(-1)=-\frac{1}{3}$，$f(0)=1$，$f(-1)\cdot f(0)<0$，且 $f'(x)=x^2+1>0$，因此方程 $\frac{x^3}{3}+x+1=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根。

教材习题同步解析

习题 1-1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1)大于 5 的所有实数的集合；

(2)小于 5 的所有正整数的集合；

(3)圆 $x^2+y^2=1$ 内部一切点的集合。

解 (1) $\{x \mid x>5 \text{ 且 } x\in\mathbf{R}\}$

(2) $\{1,2,3,4\}$

(3) $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1, x,y\in\mathbf{R}\}$

2. 已知集合 $S_1=\{2,4,6,8\}$，$S_2=\{1,2,6\}$，$S_3=\{4,7,2,6\}$，求：

(1)$S_1\cup S_2$；　　(2)$S_1\cap S_3$；

(3)$S_1\cup S_2\cup S_3$；　　(4)$S_1\cap S_2\cap S_3$。

解　(1)$S_1\cup S_2=\{1,2,4,6,8\}$

(2)$S_1\cap S_3=\{2,4,6\}$

(3)$S_1\cup S_2\cup S_3=\{1,2,4,6,7,8\}$

(4)$S_1\cap S_2\cap S_3=\{2,6\}$

---

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1)$|x|\leqslant 5$；　　(2)$|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(3)$|x|>5$；　　(4)$|x+2|>3$。

解　(1)$[-5,5]$　　(2)$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

(3)$(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　(4)$(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$

---

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；　　(2)$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$。

解　(1)不同，$f(x)$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1\}$，而 $g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$；

(2)不同，$f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，而 $g(x)$的值域为$[0,+\infty)$；

(3)相同，$f(x)$与 $g(x)$具有相同的表达式、定义域及值域。

---

5. 确定下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{x^2-9}$；　　(2)$y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(3)$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$；　　(4)$y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

(5)$y=\dfrac{-5}{x^2+4}$；　　(6)$y=\arccos\dfrac{x+2}{5}$。

解　(1)$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$　　(2)$[-3,-1)\cup(1,3]$

(3)$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$　　(4)$[1,4]$

(5)$\mathbf{R}$　　(6)$[-7,3]$

6. (1)设 $g(t)=t^2+1$,求 $g(t^2)$,$[g(t)]^2$;

(2)设 $f(x)=a^x$,求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

解 (1)$g(t^2)=t^4+1$

$$[g(t)]^2=(t^2+1)^2=t^4+2t^2+1$$

(2)$\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$

---

7. 已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$,求下列函数的定义域:

(1)$f\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$;　　(2)$f(\cos x)$。

解 (1)由于$-1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant1$,因此定义域为$[-1,5]$;

(2)由于$-1\leqslant\cos x\leqslant1$,因此定义域为 $\mathbf{R}$。

---

8. 若 $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ 3, & 1<x\leqslant5\end{cases}$,

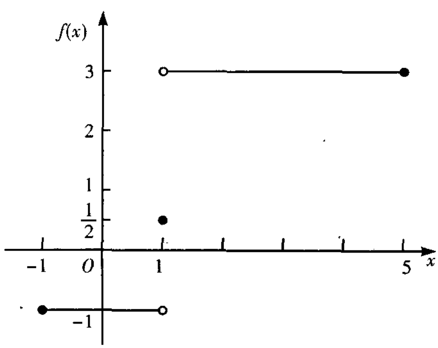
(1)求函数的定义域;　　(2)求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$,$f\left(\dfrac{6}{5}\right)$;

(3)作出函数的图形。

解 (1)函数定义域为$[-1,5]$;

(2)$f(-1)=-1$;$f(0)=-1$;$f(1)=\dfrac{1}{2}$;$f(\dfrac{6}{5})=3$;

(3)



9. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$,$f(x-1)$。

解　$f(x+1)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=[(x+1)-3][(x+1)-2]$

因此,$f(x)=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$

$$f(x-1)=(x-1)^2-5(x-1)+6=x^2-7x+12$$

---

10. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=\frac{1}{x^2}$;　　(2)$y=5x-x^3$;

(3)$y=e^x+1$;　　(4)$y=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

(5)$y=a^x+a^{-x}$;　　(6)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解　(1)$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$,故为偶函数。

(2)$f(-x)=5(-x)-(-x)^3=-5x+x^3=-f(x)$,故为奇函数。

(3)$f(-x)=e^{-x}+1\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$,故为非奇非偶函数。

(4)$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,故为奇函数。

(5)$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$,故为偶函数。

(6)$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-f(x),$$

故为奇函数。

---

11. 试证:两个偶函数的和是偶函数;两个奇函数的和是奇函数;两个偶函数的乘积(或商)是偶函数;两个奇函数的乘积(或商)是偶函数;一个偶函数与一个奇函数的乘积(或商)是奇函数。

证明　设 $f(x)$与 $g(x)$都是偶函数,令 $F(x)=f(x)+g(x)$,则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$$

故 $F(x)$为偶函数,即两个偶函数的和是偶函数。类似地,可证其他。

---

12. 已知 $f(x)=x^2+2x$,$\varphi(t)=\ln(1+t)$,求 $f[\varphi(t)]$。

解　$f[\varphi(t)]=\varphi^2(t)+2\varphi(t)=\ln^2(1+t)+2\ln(1+t)$

13. 指出下列函数是怎样复合而成的：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=(\arcsin\sqrt{3-x^2})^3$；

(3) $y=e^{\cos^3 x}$；　　(4) $y=\log_a \sin e^{x-1}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\ln\sqrt{x}}$；　　(6) $y=\ln^3 \arccos x^2$。

解 (1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$

(2) $y=u^3, u=\arcsin v, v=\sqrt{w}, w=3-x^2$

(3) $y=e^u, u=v^3, v=\cos x$

(4) $y=\log_a u, u=\sin v, v=e^w, w=x-1$

(5) $y=\sqrt[3]{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$

(6) $y=u^3, u=\ln v, v=\arccos w, w=x^2$

---

14. 一弹簧的伸长与所受拉力成正比，每伸长 1 cm 需要力 8 N，求弹簧伸长的长度与所受拉力的函数关系。

解 设所受拉力为 y N，弹簧伸长的长度为 x cm，则

$$\frac{y}{x}=\frac{8}{1}$$

即 $y=8x$

---

15. 用铁皮做一个容积为 V_0 的圆柱形罐头盒，试将它的全面积表示成底半径的函数，并确定此函数的定义域。

解 设其全面积为 y，其底半径为 x，其高为 h，则

由于 $\pi\cdot x^2\cdot h=V_0$，知

$$h=\frac{V_0}{\pi x^2}$$

而

$$y=2\pi x^2+2\pi x h=2(\pi x^2+\frac{V_0}{x})$$

此函数定义域为 $(0,+\infty)$。

---

16. 在半径为 r 的球内嵌入一个圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定函数的定义域。

解 设圆柱的高为 h，体积为 V，其底面半径为 R，则

$$V=\pi R^2 h,\text{且}(\frac{h}{2})^2+R^2=r^2$$

即
$$R^2=r^2-\frac{1}{4}h^2$$

因此，$V=\pi h(r^2-\frac{1}{4}h^2)$，其定义域为$(0,2r)$。

---

17. 旅客乘坐火车时，随身携带的物品不超过 20 kg 的免费。超过 20 kg 的部分，每 kg 收费 a 元。超过 50 kg 的部分，每 kg 再加收 50%。试求携带的物品费与物品重量的函数关系式。

解　设物品费为 y 元，物品重量为 x kg，则

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ \frac{3}{2}a(x-50)+30a, & x>50\end{cases}$$

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值：

(1)$a_n=\frac{1}{n^3}$；　　(2)$a_n=(-1)^n n$；　　(3)$a_n=3-\frac{1}{n}$；

(4)$a_n=\frac{n-1}{n+1}$；　　(5)$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2n}$。

解　(1)0　(2)不存在　(3)3　(4)1　(5)0

---

2. 观察下列函数的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值：

(1)$\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)$；　　(2)$\lim\limits_{x\to -3}x^2$；　　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}$；

(4)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$；　　(5)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$；　　(6)$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$。

解　(1)5　(2)9　(3)0　(4)1　(5)$\frac{1}{2}$　(6)0

---

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, x\leqslant 0\\ x+1, x>0\end{cases}$，画出 $f(x)$的图像，并用左、右极限说明 $x\to 0$ 时 $f(x)$有无极限。