全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

卢恩双　边宽江　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

卢恩双　边宽江　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/卢恩双，边宽江主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11868-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①卢…②边… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 122868 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑 杨金妹 陈 瑨

北京智力达印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm 1/16 印张：14.5

字数：255 千字

定价：19.80 元

编写人员名单

主　编　卢恩双　边宽江

副主编　欧阳安　刘迎洲

参　编　刘欠宁　赵　斌　邓业胜　赵保魁　田　凯

单青松　李文敏　高国荣　魏　宁　柳建军

前　　言

线性代数是数学的一个分支，是一门重要基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强逻辑性、抽象性和广泛的应用性，特别是随着计算机的飞速发展，线性代数越来越显示出它的重要性．通过对本课程的学习，掌握基本概念、重要理论及运算方法，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础，同时培养学生抽象思维和逻辑推理的能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和自主学习能力，逐步培养创新精神和创新能力等．

本教材是根据高等学校线性代数教学大纲和“十一五”本科教学质量工程的要求，是编者在进行多年教学实践的基础上而编写的．书中介绍了 n 阶行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性空间和内积、线性方程组、矩阵的对角化与二次型、线性代数应用举例、线性代数数值方法举例等内容．为增强可读性、方便教师教学，在保留线性代数基本内容的基础上，本着重概念、重方法、重应用、重数学意识和能力培养的精神，编写时采取通过大量例题来阐明线性代数的思想，通过一些实际例子的介绍，增强学生学习线性代数的兴趣、淡化定理的推导、强调方法的训练．目的是使读者易于理解和掌握这些概念及难点，特别是很多例题是近几年研究生入学考试的题型，这对读者参加考研提高通过率大有益处．

本书是为农林院校各专业编写的教材，书中带“*”号的内容教师可根据教学学时及学生实际学习能力进行取舍，读者可根据实际需要来选择．本书共分 8 章，除带“*”号的两章内容，大约需要 40 学时，也可作为其他非数学专业的教材或科研人员的参考书．

本书主编为卢恩双、边宽江，副主编为欧阳安、刘迎洲，参加编写的还有刘欠宁、赵斌、邓业胜、赵保魁、田凯、单青松、李文

敏、高国荣、魏宁、柳建军，全书由卢恩双负责统稿和定稿. 在此，对西北农林科技大学教务处、教材科、应用数学系的支持致以诚挚的谢意，对本书选用的参考文献的作者表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，不妥之处在所难免，诚请广大读者和使用本教材的教师批评指正.

编 者

2007 年 5 月

目　　录

第一章　n 阶行列式

在初等数学中，从解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的概念．行列式不但是研究线性方程组和矩阵的有用工具，而且在许多理论和实际应用问题中，它也发挥着重要的作用．因此，行列式是线性代数中一个必不可少的基本概念．本章将介绍 n 阶行列式的定义和基本性质．

§1　n 阶行列式的概念

一、排列及逆序数

由 n 个自然数 1，2，…，n 按一定顺序排成一列，称为一个 n 元排列．这 n 个数的 n 元排列共有 n！个不同的排列．在这 n！个不同的排列中，规定排列 $123\cdots n$ 为标准排列．对于任一 n 元排列，当某两个数的先后次序与标准排列不同时，就说有一个逆序．一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数．逆序数为偶数（零算偶数）的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列．

在排列中将两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换叫做对换．将相邻两个数对换，叫做相邻对换（简称邻换）．

例 1　计算以下排列的逆序数，并指出它们的奇偶性．

① 524163；　　　　② $135\cdots(2n-1)264\cdots(2n)$．

解　① 所给排列，5 排在首位，逆序数为 0；2 的前面有 1 个比它大的数，逆序数为 1；4 的前面有 1 个比它大的数，逆序数为 1；1 的前面有 3 个比它大的数，逆序数为 3；6 的前面有 0 个比它大的数，逆序数为 0；3 的前面有 3 个比它大的数，逆序数为 3. 把这些数加起来，即

$$\tau(524163)=0+1+1+3+0+3=8.$$

故排列 524163 的逆序数为 8，因而是偶排列．

② 同理可得

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列.

定理 1 一个排列中的任意两数对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+1} 排列变为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$，显然 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+2}\cdots p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变；当 $p_i<p_{i+1}$ 时，经对换后，$p_{i+1}p_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1，当 $p_i>p_{i+1}$ 时，$p_{i+1}p_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1，所以排列 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_i\cdots p_n$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+m+1}，把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换，排列变为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列变为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$，从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1} 的对换，它是经过$2m+1$次相邻对换而成，排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反.

推论 n（$\geqslant 2$）元排列中，奇偶排列各占一半$\left(\frac{1}{2}n!\right)$.

证 设在 n 元排列中，共有 p 个奇排列，q 个偶排列. 则有 $p+q=n!$，对 p 个奇排列同时对换 1，2，则可得 p 个不同的偶排列. 故 $p\leqslant q$，同理可得 $q\leqslant p$，因此 $p=q$. 即在 n 元排列中奇偶排列各占一半，各为$\frac{1}{2}n!$ 个（因 $n\geqslant 2$，所以$\frac{1}{2}n!$ 为整数）.

二、n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式定义，先来分析二、三阶行列式.

二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

上式中的每一个数 a_{ij} 称为该行列式的元素，每个元素的两个下标分别表示这个元素所在的行（第一个下标表示）与列（第二个下标表示）. 容易看出二阶行列式有以下特性：

① 它是 2! 项的代数和；

② 其中每一项是位于不同行、不同列的两个元素的乘积；

③ 各项的符号由该项两个元素乘积构成的行标排列与列标排列的逆序数

之和的奇偶性确定．当逆序数之和为偶数时，则取正号；逆序数之和为奇数时，则取负号．

项 $a_{11}a_{22}$ 的行标排列 12 与列标排列 12 逆序数之和为零，是偶数；项 $a_{12}a_{21}$ 的行标排列 12 与列标排列 21 的逆序数之和为 1，是奇数．

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (2)$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

与二阶行列式类似，有以下特性：

① 它是 3！项的代数和，各项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里第一个下标（行标）排成标准次序 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的某个排列，这样的排列共有 6 种，所以（2）式的右端共含 6 项；

② 其中每一项是位于不同行、不同列的三个元素的乘积；

③ 各项符号可由该项三个元素的乘积构成的行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性确定．由于（2）式右端各项的行标为标准次序，所以各项的正负号与列标的排列有关．如：带正号的三项列标排列是：123，231，312；带负号的三项列标排列是：132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列，因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，其中 τ 为列标排列的逆序数．

因此，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和．

现在，把上述特性推广到 n 阶行列式，从而给出 n 阶行列式的定义．

定义 1　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

在不同行、不同列中取 n 个数作乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并乘以符号 $(-1)^{\tau}$（其

中 τ 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数)，记为 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，这样的乘积有 $n!$ 项，它们的和

$$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{3}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 中 (i, j) 的元素．

定理 2 n 阶行列式的项可以定义为

$$(-1)^{p+q}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 p 与 q 分别是行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数．

证 该项中任意两个元素互换，行下标与列下标同时对换，由定理 1 知排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性，于是 $p+q$ 的奇偶性不变，若将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换成标准排列 $123\cdots n$（逆序数为 0)，排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也随之换为 $j_1j_2\cdots j_n$（逆序数为 J)，则有

$$(-1)^{p+q}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^{J}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由定理 2 可知，行列式可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{p+q}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{4}$$

若将行列式中项的列下标按标准排列，则相应行下标排列变为 i_1，i_2，…，i_n，于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{I}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{5}$$

其中 I 为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数．

例 2 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由行列式的定义，D 的一般项可写成

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{n-1,q_{n-1}}a_{nq_n},$$

先找其中元素不为零的项．第 n 行的零最多，只有 $a_{nn}\neq 0$，其列标 $q_n=n$. 显然 D 中不为零的项为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{n-1,q_{n-1}}a_{nn}$；在这种项里 q_{n-1} 不能取 n（因为要求元素取自不同列），故除 $q_{n-1}=n-1$，即 $a_{n-1,n-1}\neq 0$ 外，其余元素全为零，于是 D 中不为零的项为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$；由此类推，$D$ 中非零项只有

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

显然这一项应取正号，故

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为例 2 的特例，对角行列式（其中未写出的元素均为零）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3　证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$（未写出的元素均为 0）.

证　若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 τ 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4$ 时，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \lambda_3 & & \\ \lambda_4 & & & \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

由例 2、例 3 可见，n 阶行列式主对角线各元素之积构成的项总取正号，

而它另一对角线各元素之积构成的项可能取正号，也可能取负号．

§2 n阶行列式的性质

根据行列式的定义计算行列式，首先要把各项都找出来，其次要逐项确定符号．当行列式阶数较高时，这样计算是相当麻烦的．为了简化行列式的计算，本节将讨论 n 阶行列式的性质．

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式．

性质 1 行列式与它的转置行列式相等．

证 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 D^{T} 的 (i, j) 元素为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，按行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

而由定理 2，有

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

故

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然．

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式反号．

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换第 p，q 两列得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 与 D_1 按（5）式计算，对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_n n},$$

其中 I 为排列 $i_1 i_2\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 的逆序数，在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^\tau a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_n n}$$

（当 $j\neq p$，q 时，第 j 列元素取 a_{ij}，第 p 列元素取 $a_{i_q q}$，第 q 列元素取 $a_{i_p p}$），其中 τ 为排列 $i_1 i_2\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 的逆序数，而

$$i_1 i_2\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$$

与

$$i_1 i_2\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$$

只经过一次对换，由定理 1 知，$(-1)^I$ 与 $(-1)^\tau$ 相差一个符号，又因

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_n n}=a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_n n}$$

所以对于 D 中任一项，D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等，又 D 与 D_1 的项数相同，所以 $D=-D_1$.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，交换 i，j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　若行列式中有两行（列）对应元素相同，则该行列式值等于零.

证　把这两行（列）互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此性质也可叙述为：行列式某行（列）有公因子时，可将公因子提到行列式外面．第 i 行（列）乘以 k，记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

性质 4　行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 5　行列式某一行（列）的各元素都是两数之和，即