



“十一五”国家重点图书出版规划项目  
中国数学教育研究丛书

张奠宙  
总主编

SHUXUE XUEXI XINLI  
DE CPFS JIEGOU LILUN

# 的CPFS结构理论

• 喻平著 • 广西教育出版社

# 数学学习心理



G447/3

2008

“十一五”国家  
中国数

张奠宙 总主编



SHUXUE XUEXI XINLI  
DE CPFS JIEGOU LILUN

# 的CPFS结构理论·喻平著· 数学学习心理



广西教育出版社



图书在版编目(CIP)数据

数学学习心理的 CPFS 结构理论与实践/喻平著. —南宁:  
广西教育出版社, 2008.4

(中国数学教育研究丛书)

ISBN 978 - 7 - 5435 - 5163 - 3

I. 数… II. 喻… III. 数学—学习心理学—研究—中国  
IV. G447

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035465 号

---

总 策 划:黄力平

责任编辑:陆 毅

责任校对:何 云 杨红斌

装帧设计:梁伟琪

---

出 版 人:李小勇

出版发行:广西教育出版社

地 址:广西南宁市鲤湾路 8 号 邮政编码:530022

电 话:0771—5865797

本社网址:<http://www.gxeph.com>

电子信箱:[book@gxeph.com](mailto:book@gxeph.com)

印 刷:广西民族印刷厂

开 本:635mm×965mm 1/16

印 张:14

字 数:187千字

版 次:2008年4月第1版

印 次:2008年4月第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-5435-5163-3/G·4216

定 价:27.00元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与出版社联系调换。

# 总序

时序进入2008年，中华民族走在复兴的大道上。

100年前，中国处于满清末季，积贫积弱，文盲充斥。拖着辫子的臣民，没有接受现代数学教育的机会。1911年，辛亥革命爆发。1919年，五四运动兴起。科学、民主的口号催生了中国的现代数学教育。

中国的数学教育，早年学日本，然后学英美，艰难行进。1949年之后，中国人民站起来了。在全面学习苏联的基础上，羸弱的中国数学教育，渐渐强大起来。注重数学“双基”，发展三大能力，反对注入式，提倡启发式，学习唯物辩证法，加强数学与实践的结合。在总结正反两方面经验的基础上，中国数学教育开始形成了自己的特色。

20世纪70年代末起，中国实行改革开放政策。数学教育一方面大量吸收国外的优秀研究成果，一方面不断展现自己的数学教育特色，在理论和实践上都得到了重要发展。时至今日，中国数学教育已经走向世界，在国际上享有相当高的声誉。中国的优秀学生在国际数学奥林匹克中屡获佳绩，大范围国际数学测试的中国大陆学生成绩位居前列。以很低的教育投入，获得了如此优良的成绩，令人惊叹。事实上，数学教育的成果，成为中国经济起飞的重要支撑。千百万农民工走进现代化的企业，成为“中国制造”的主力军，没有必要的数学计算和思维能力，是不可想象的。

于是，一个严肃的课题摆在我们面前：怎样评价“中国的数学教育”？在风起云涌的教育改革浪潮中，对中国数学教育的传统有三种态度：

一种态度是基本否定。认为中国的数学教育，观念落后，内容陈旧，教师死教，学生死学，没有创新，没有探究，单打独斗，不讲合作，应试当头，摧残学生。一句话，必须彻底转变观念，改变学生的学习方式。对于中国的教育传统的继承，止于《学记》经典、孔子教育思想，书院模式。对于当代的数

学教育，则没有任何肯定。他们认为，如果说中国学生基础好，输在后面没有创新，那么更应该说，没有创新的基础，就是输在起跑线上了。

另一种态度是认为中国教育有积极因素，应该挖掘。这种观点常常以“中国教育悖论”的形式出现。例如，“中国学生何以比西方学生在学习成绩上好许多，但是他们的教和学看上去是如此的死记硬背？”<sup>①</sup>他们在实践上肯定中国学生的学习成绩，但是西方的许多正确教育理论不能解释，于是产生困惑，需要研究。这是国外一部分客观公正的教育家的观点，具有积极的意义。

第三种态度，就是本丛书所采取的态度：基本肯定，需要改革。中国是一个有几千年文明历史的国家，具有灿烂的中华文化。教育是一种文化现象，其中积淀着许多文化的因子。例如鼓励教学相长，重视坚实基础，提倡启发诱导，相信熟能生巧，主张精讲多练，采用变式演练，等等。对这些深藏于中华文化中的教育因子，我们只能采取基本肯定的态度，继承发扬它的积极因素，使之熠熠发光。与此同时，防止它的异化，避免造成负面影响。

文化是不能废除和选择的。钱伟长先生说过，各个国家对文化的态度应当是“各美其美，美人之美，美美与共，天下大同”。教育上的观念，也应遵循这样的规律。

另一个不容忽视的事实是，1949年以来的中国数学教育，是许多前辈学者、几代教师苦心孤诣建设起来的，他们为国家的兴旺发达、经济起飞、教育普及作出了巨大的贡献，岂可一笔抹杀？数学教育上的双基教学、启发式讲解、三大能力的培养、师生讨论的模式、数学解题的教学等，都是能够闪光的金子。当然，我们也清醒地看到，中国数学教育有着明显的弊病。对于前面提到的中国数学教育的种种缺陷，我们同样感到痛心疾首，主张坚决革除。任何时候，任何国家都在根据自己的国情进行改革。我们只不过根据历史经验，主张避免“矫枉过正”而已。

晚近以来，我们学习了许多国外的优秀经验，特别是初步把握了比较科学的研究方法，注重调查实证，开始运用心理学

---

<sup>①</sup>D. Watkins, J. Biggs. *The Chinese Learner: Cultural, Psychological and Contextual Influences*. Hong Kong: CERC&ACER, 1996.

的最新成果进行分析。这就是说，已经有初步的条件把我国已有的教学经验上升为理论。

总上所说，我们觉得应该集中大家的力量，开始营建具有中国特色的数学教育体系了。于是，这套《中国数学教育研究丛书》的编写就提上了议事日程。广西教育出版社将它列入“十一五”国家重点图书出版规划项目上报，终获中华人民共和国新闻出版总署批准。

丛书的出版，得到数学教育同行的积极响应。我们欢迎一切数学教育研究成果参与丛书的出版。除了研究质量的普遍要求之外，附加的条件只有一个：具有中国特色。

丛书出版在即，希望它能成为一个时代的记录，一个中国数学教育发展的标志。

张真宙

2008年1月22日于沪上

## 前 言

一般而言,数学研究有两种思路,第一种思路是缩小研究对象的内涵,扩大外延,把研究对象放到一个更大的范围或空间去审视,从中发现概括性更高、普适性更广的现象或规律;另一种思路则与此相反,即增大研究对象的内涵,缩小外延,在一个相对较小的范围内探究对象特有的性质。例如,在研究若干具体函数的基础上,脱离各种函数的问题背景,抽象出它们的共性而形成函数的一般概念,这是第一种研究问题的思路。有了一般的函数概念,又可以反过来研究特殊函数的性质,如连续函数、可微函数、可积函数、解析函数等,这是第二种研究问题的思路。第一种思路是寻求包含若干子集的大集合的性质,第二种思路是探讨一个大集合的子集的性质。大集合的性质必然是子集的性质,反之则不然,子集的性质并不一定是大集合的全部性质。

显然,如果一个集合的子集没有独特的性质,那么这个子集就没有研究的价值,反之,如果找不到一个包含一群具有某种共性的子集的大集合,那么研究这样的大集合也是没有意义的。

以上说了许多似乎是题外的话,其实是想以此引入主题:教育心理学与数学教育心理学的关系,这是大集合与子集的关系。

数学教育心理学是否为教育心理学的下位学科?数学教育心理学是否能作为教育心理学这个大学科下的子学科而独立存在?要对这两个问题作出肯定回答,就要证明两个命题:其一,教育心理学研究的范畴和结论能解释数学教育心理的现象;其二,教育心理学研究的范畴和结论不能解释数学教育心理的全部现象。前者说明教育心理学包含数学教育心理学,后者说明数学教育心理学的自身的独特性,如果没有独特性,数学教育心理学就不能成为一门相对独立的学科。

在“教育”前面加限定词“数学”,这种增大概念内涵的方式使数

学教育心理学自然成为教育心理学的子学科,这个观念是容易接受的。但是,如何证明这个子学科有自己的特征,却是一件不易做到的事情。如果做不到这一点,人们就会对是否存在数学教育心理学这门学科表示怀疑,如果真做不到这一点,数学教育心理学就确实没有存在的价值。正如如果“循环群”没有自身的性质,人们就没有必要去定义“循环群”的概念一样。

本书的内容属于数学教育心理学范畴,所做的工作就是寻找数学教育心理学的特征。

本研究的逻辑起点是个体在学习中对知识的表征。在综合分析认知心理学家对知识表征的一般研究基础上,我们引入了概念域、概念系、命题域、命题系等四个概念,作为刻画数学知识表征的4个基本单元,由这些单元生成的复合结构称为 CPFS 结构,它是数学学习心理特有的认知结构。CPFS 结构提示了数学知识表征的特殊心理现象。

数学知识表征之所以有特殊性,源于数学学科自身的特殊性。众所周知,严谨性、抽象性、符号化、结构化是数学学科的特征,由此导致了数学概念、命题具有动态的生长性,也导致了数学概念、命题表现形式的多样性,这是使数学知识表征出现特殊性的原因所在。

本书的基本结构由三部分组成,即提出理论、验证理论和理论应用,这也正是本研究的思路。

第一章是建构数学学习心理的 CPFS 结构理论框架。这一理论的提出不是空穴来风,而是笔者以多年的中学数学教学和大学数学教学实践为基础,通过反思、探索过程提出来的一种构想。第二章是采用实证方法验证 CPFS 结构理论。既然 CPFS 结构是一种构想、一种思辨的产物,那么自然会提出问题:CPFS 结构存在吗?个体的 CPFS 结构会对学习效果产生影响吗?个体的 CPFS 结构与其他心理要素之间是什么关系?等等。不回答这些问题,这一所谓的理论就是毫无意义的。第二章的内容正是回答(部分回答)这些问题,力图为 CPFS 结构理论积蓄依据。第三章是将 CPFS 结构理论用于教学实践,主要回答“应该怎么做”和“这样做的效果如何”,描述了将理论用于实践的操作程序和实施策略。需要说明的是,第三章第四节、第五节的工作主要是由我的研究生秦向荣、鲍红梅完成的。



要正确立数学教育心理学的地位,真正发挥数学教育心理学在教学实践中的指导作用,是一项浩瀚的系统工程,笔者只是做了一项微不足道的工作,而且,即使微不足道也可能漏洞百出。今斗胆将自己近些年来的研究成果汇集成册,意在求教方家,共同为建构数学教育心理学作出贡献。同时,我也希望这些成果能用于数学教学实践,在实践中检验,在实践中发展。

俞 平

2008年2月于南京师范大学



MULU

# 目录

总序

前言

## 第一章 数学认知心理的 CPFS 结构理论

★★★	—
第一节 数学知识的表征★★★	—
一 知识的广义分类与表征★★★	—
二 数学知识的分类与表征★★★	一〇
第二节 数学知识表征的 CPFS 结构★★★	一五
一 概念域和概念系★★★	一五
二 命题域和命题系★★★	二〇
三 CPFS 结构★★★	二四
第三节 CPFS 结构的性质和功能★★★	二四
一 CPFS 结构的性质★★★	二四
二 CPFS 结构的功能★★★	二七

## 第二章 CPFS 结构对数学学习影响的实证

研究★★★ 四〇

### 第一节 个体 CPFS 结构与数学问题表征研究

★★★ 四〇

#### 研究 1: 个体 CPFS 结构与数学问题表征的相关性

研究★★★ 四〇

一 问题的提出★★★ 四〇

二 研究方法★★★ 四二

三 结果★★★ 四四

四 讨论★★★ 四六

#### 研究 2: 不同年级中学生对数学问题表征的差异性

研究★★★ 四七

一 问题的提出★★★ 四七

二 研究方法★★★ 四八

三 结果★★★	五〇
四 分析与讨论★★★	五二
五 结论★★★	五五
第二节 数学问题解决中个体的 CPFS 结构对迁移影响的研究★★★	五六
一 问题的提出★★★	五六
二 实验研究★★★	五七
三 结果与讨论★★★	六一
四 结论★★★	六二
第三节 中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响★★★	六三
一 问题的提出★★★	六三
二 研究方法★★★	六四
三 结果★★★	六六
四 讨论★★★	六九
五 结论★★★	七〇
第四节 个体 CPFS 结构与探究问题能力的关系研究★★★	七七
一 问题的提出★★★	七七
二 概念界定★★★	七八
三 研究 1★★★	七九
四 研究 2★★★	八四
五 讨论★★★	八六
六 结论★★★	八八
<b>第三章 CPFS 结构理论与教学教学实践</b>	
★★★	九八
第一节 CPFS 结构理论在数学概念教学中的应用★★★	九八
一 概念学习研究的一般理论★★★	九九

# 教育学

# 目录

MULU

二 数学概念学习理论★★★	一〇四
三 数学概念学习中完善学生 CPFS 结构的教 策略★★★	一〇七
第二节 CPFS 结构理论在数学命题教学中的应 用★★★	一一五
一 数学命题学习研究理论★★★	一一五
二 数学命题学习中完善学生 CPFS 结构的教 学策略★★★	一二〇
第三节 CPFS 结构理论与数学解题教学★★★	一三七
一 数学解题教学的现代理论基础★★★	一三七
二 数学问题解决的认知模式★★★	一四七
三 运用 CPFS 结构理论促进学生解题能力的 发展★★★	一五五
第四节 高中生 CPFS 结构对促进数学思维灵活 性、深刻性发展的实验研究★★★	一六九
一 问题的提出★★★	一六九
二 完善高中生 CPFS 结构的教 学策略★★★	一六九
三 实验研究★★★	一七七
第五节 完善中学生 CPFS 结构的生长教学策略 研究★★★	一八六
一 问题的提出★★★	一八六
二 生长教学策略★★★	一八七
三 实验研究★★★	一九七
参考文献★★★	二〇五

## 第一章

# 数学认知心理的 CPFS 结构理论

### 第一节 数学知识的表征

知识的表征,是建立在知识分类基础之上的.正是看到了知识分类是学习理论的一个基本要点,历代教育心理学家都十分关注对知识分类的研究,而且取得了丰富的成果.本节以安德森(J. R. Anderson)等人最近 20 年的研究成果为基础,对知识的分类作个简介,然后结合数学学习特有的心理规律,探讨数学知识的分类与表征的特殊性.

#### 一 知识的广义分类与表征

##### 1. 知识的广义分类

安德森等人提出将知识分为两大类<sup>①</sup>,一类为陈述性知识,另一类为程序性知识.

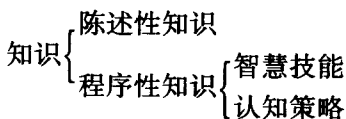
陈述性知识是关于事实的知识,是人所知道的有关事物状况的知识.例如,“三角形内角和等于 $180^\circ$ ”,“有一组邻边相等的平行四边形是菱形”,都



<sup>①</sup> Anderson J R. Cognitive Psychology and it's Implications [ M ]. New York: Freeman, 1980: 10.

是陈述性知识. 数学中的概念、命题均可视为陈述性知识. 而程序性知识则是关于人怎样做事的知识, 即由完成一件事所规定的程序、步骤及策略等组成的知识. 简言之, 陈述性知识是关于“是什么”的知识, 程序性知识是关于“怎么办”的知识.

按此分法, 程序性知识本质上表现为一种技能, 因而程序性知识又分为两个亚类: 一类是通过练习, 其运用能达到相对自动化, 很少或不需要受意识控制的知识; 另一类是受意识控制的, 其运用难以达到自动化程度的知识. 加涅(R. M. Gagne)把前者称为智慧技能, 后者称为认知策略.



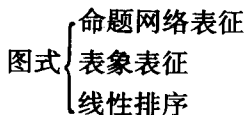
对知识做这样一种分类, 就把通常意义下所说的知识、技能以及认知能力统一地整合为一体, 故称为“广义知识”. 这是对传统上将知识、技能、能力割裂的狭义知识观的否定. 广义知识观不仅揭示了狭义知识与技能、能力之间的内在联系, 而且又为各类知识的表征、获取建立了研究的逻辑起点.

## 2. 知识的表征

所谓知识的表征, 指人在自己的工作记忆和长时记忆中对信息的贮存、表示和再现方式.

### (1) 陈述性知识的表征

陈述性知识的基本表征有三种形式, 即命题网络表征、表象表征和线性排序. 在此基础上形成综合表征形式——图式<sup>①</sup>.



#### ——命题网络表征

认知心理学家将陈述性知识的最小单位称为命题. 一个命题由一种关系和一组论题构成. 关系一般由动词、副词和形容词表

<sup>①</sup> 吴庆麟. 教育心理学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1999: 244.

达,有时也用其他关联词如介词表达.论题一般指概念,由名词或代词表达.

例如,“三角形内角和等于  $180^\circ$ ”是一个命题,其中论题是“三角形”、“内角”、“和”、“ $180^\circ$ ”,关系是“等于”.

有时候一句话中含有多个命题,比如,数学中的复合命题就由多个命题组合而成.

“等腰三角形的底角相等”这句话可以分解成两个命题:

三角形是等腰三角形.

三角形的底角相等.

认知心理学家用一个图来表示一个命题.其方法是:用一个圆圈表示一个命题,用箭头将命题的论题和关系联系起来.例如,上面的两个例子可表示为(如图 1-1):

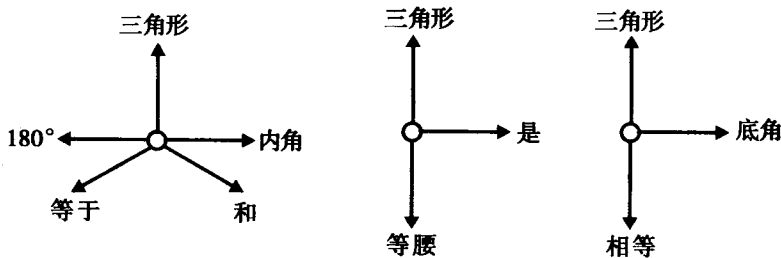


图 1-1 命题表征实例

如果两个或多个命题有共同成分,通过这种共同成分,可以把若干个命题彼此联系起来,从而组成命题网络.例如,“等腰三角形的底角相等”可以表示为图 1-2 所示的命题网络:



图 1-2 命题网络实例

对于更复杂的命题网络,科林斯(A. M. Collins)和奎廉

(M. R. Quillian)通过一个经典实验,提出了一个命题的层次网络模型<sup>①</sup>.他们认为对动物、鸟、鱼等分类的知识,以图 1-3 的层次结构贮存.

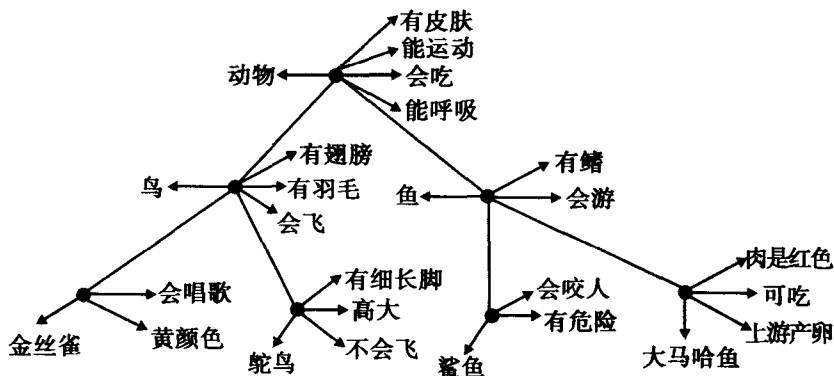


图 1-3 信息按层次组织的网络

科林斯和奎廉认为,人对不同动物知识的概括水平不同,分为若干级层.在每一个概括水平上贮存了可以用来区分其他水平的物质的属性.例如“有皮肤”是所有动物的属性,贮存在最高水平.用这一属性可区别动物和矿石等物质.又如,“有羽毛”是所有鸟的属性,贮存在比“动物”低一级水平上,可区分鸟与非鸟类动物.科林斯等假设,由于贮存在知识网络中的事实的距离不同,人们回忆并提取它们的反应时间也将不同.比如“金丝雀是黄色的吗?”“金丝雀是鸟吗?”和“金丝雀有皮肤吗?”这三个问题,所处的水平不同,被试者判断这些语句的真伪的反应时间也不同.科林斯和奎廉的实验证明了这一点,即随着问题的级别提高,被试者判断问题真伪的反应时间越长.

层次网络模型是指人们在表征事物时,按概念的从属关系相应地实行分级贮存.在每一级概念的水平上,只贮存该级概念独有的特征,而同一级的各概念所具有的共同特征则贮存于上一级概念的水平上,这样就形成一个有层次的命题网络结构.例如,有关“三角形”的命题网络结构如图 1-4.

<sup>①</sup> Collins A M, Quillian M R. Retrieval Time From Semantic Memory Processing[J]. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 1969(8):240-247.



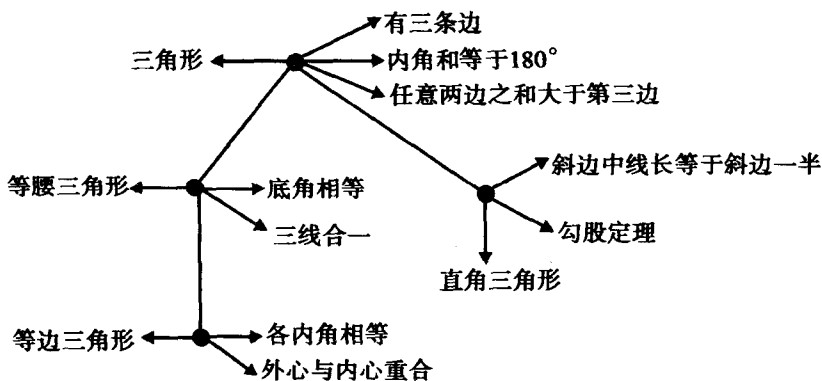


图 1-4 三角形层次网络片断

层次网络模型有缺陷的一面,即忽视了各个层次概念之间和同一层次概念之间的横向联系.后来科林斯等人又提出了一种“激活扩散模型”<sup>①</sup>,该模型以语义联系或语义相似性将概念组织起来.用结点表示概念,概念之间的连线表示它们的联系,连线的长度表示联系的紧密程度,连线愈短,表明联系愈紧密,两个概念有愈多的共同特征.或两个结点之间通过其共同特征有愈多的连线,则两个概念的联系愈紧密.

激活扩散模型不仅能说明概念之间存在层次(纵向联系),而且还刻画了概念之间的横向联系,因而比层次网络模型对陈述性知识的表征有更合理的解释.

#### ——表象表征

表象表征指人们借助于对事物知觉的表象去记忆或贮存陈述性知识的方式.人在知觉事物时,有时会在头脑中形成该事物的形象,而在回忆该事物时,会以表象形式呈现出来.譬如,有人问你:“象比羊大这一说法是否正确”,你可能会在头脑中浮现这两种动物,然后借助于形象去作出判断.

表象表征是人们对事物在各个方面的一些物理特征作出连续保留的一种陈述性知识的形式,这是命题表征做不到的.斯诺

① 王甦,汪安圣.认知心理学[M].北京:北京大学出版社,1992:180-182.