通俗模糊数学与程序设计

Basic Fuzzy Mathematics and Program Design

吴士力 编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书的主要内容是模糊数学以及程序设计的相关知识。模糊数学从模糊集合开始，依次介绍了模糊关系、模糊度量、模糊逻辑与模糊推理等基本知识。接着在上述知识点的基础上，又分别介绍了模糊模式识别、模糊聚类、模糊控制三种模糊算法的基本原理和具体内容。介绍完模糊数学后，本书从 Java 语言开始介绍程序设计方面的内容。首先是 Java 语言的基本语法和特性，然后介绍了面向对象技术和可视化程序设计的原理和实现，并简单介绍了如何使用 JBuilder 2005 开发可视化程序。接下来本书重点讲解了如何结合模糊数学、面向对象以及可视化技术进行程序设计，这部分内容以模糊模式识别算法、模糊聚类算法和模糊控制算法为核心，具体实现了模糊模式识别程序、模糊聚类程序和模糊控制程序。

阅读本书需要具有基本的数学知识和一定的计算机软件基础知识（如程序语言、数据结构等）。本书适合于大学低年级的本科生，也适合于对模糊数学和 Java 程序设计感兴趣的自学人员。

本书实例的源代码可以从中国水利水电出版社网站上免费下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/。

图书在版编目（CIP）数据

通俗模糊数学与程序设计 / 吴士力编著. —北京：中国水利水电出版社，2008

ISBN 978-7-5084-5169-5

Ⅰ. 通… Ⅱ. 吴… Ⅲ. ①模糊数学②程序设计 Ⅳ. O159 TP311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 190693 号

书　　名	通俗模糊数学与程序设计
作　　者	吴士力　编著
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68331835（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京蓝空印刷厂
规　　格	787mm×1092mm　16 开本　15 印张　301 千字
版　　次	2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—4000 册
定　　价	28.00 元

前　　言

亲爱的读者朋友们，如果翻阅一下计算机专业的教学大纲，不难发现编程语言总是安排在其余课程的前面。这也就是说，学习计算机编程一般都是从学习编程语言开始的。从第一个高级编程语言 Fortran 发明以来，编程语言的种类日益丰富、数目不断增加，到目前为止人们已经发明了数千种编程语言了。高级语言屏蔽了计算机的底层细节，在语法和格式上很容易被人理解和接受。这些特性大大降低了编程的难度，使得编程不再只是科研人员和专家才能做的事情了，受过初、中级教育的人同样可以从事编程工作。在印度的许多 IT 公司中，就已经大量聘用了中学生来担当编程人员。

随着高级语言的进一步发展，编程变得越来越方便。在这种情形下，大多数人不但把计算机编程语言的学习看成了编程的必要条件，还看成了充分条件。概括地说，"学习编程就是学习编程语言"几乎成为了多数编程学习者的观点。更为严重的是，如今种类繁多的高级语言更加迷惑了刚刚步入编程殿堂的初学者。可以想象到，当他们看到书店里琳琅满目的计算机语言书时，必定会愈加感慨自己的才疏学浅吧。慢慢地在人们心中就会形成一种错误的观念——以掌握编程语言数目的多少来衡量编程水平的高低。为此，许多人从 Visual Basic 到 Delphi、从 C++到 Java、从 J2EE 到.NET，学得废寝忘食、不亦乐乎，还自我感觉编程水平与日俱增。然而事实却是客观的，那些貌似掌握了多门编程语言的"高手"往往写不出优质的代码，甚至连正确有效的代码都写不出来。那么问题到底出在哪里呢？也就是该如何学习编程呢？

回想一下我们小时候学写作文的过程。作文课一般都是在小学中年级的时候开设的。为什么不在小学一年级就开呢？道理很简单，写作文必须要先认识一定数量的字才行。那么，对于已经认识了一些字的小学中年级学生而言，他们写的作文质量大致如何呢？我想大家也都知道，多数作文都是流水账，有的连事情都叙述不清。这也就是说，写作文绝不是认识几个字那么简单。现在几乎人人都识字，但是能写出一手好文章的还只是少数人而已。因为衡量作文好坏的标准不在于字本身，文字只是起到了描述作文内容、表达作文思想的作用而已。对于内容枯燥紊乱的作文，无论用什么文字来写都不会变成好作文的。

计算机编程和写作文的过程在一定程度上是很相似的。如果把程序看成作文，那么计算机语言就是文字；作文可以用中文、英文等来写；程序也可以用 C、Java 来编。作文的好坏主要取决于其内在的思想和内容；程序质量的高低同样取决于程序本身的实现思路和方法，编程语言只不过是一种实现思路和方法的工具而已。

对于自然语言而言，主要是学习其词法、语法和语义；对于计算机编程语言的学习，主要也是学习其词法、语法和语义。但是和自然语言相比，编程语言的词法、语法和语义要简单得多，根本没有必要花费太多精力去教条地学习和记忆。在实际编程时，对于不熟悉或遗忘的语法点和方法，翻阅相关资料就可以了。对于从事特定领域的编程人员而言，很多语法点还会由于反复使用而自然而然地熟记于心。同时，计算机语言也没有好坏之分，只有分工不同。例如，C 语言因为支持对硬件的访问，常用于开发系统软件或底层应用；

Delphi 提供了 Win32 应用程序开发平台，能大大简化 Win32 应用程序的编写；Java 具有跨平台的特点，方便了网络应用软件的开发。再者，计算机高级语言之间的词法、语法和语义相似程度较高（如 C、Java 和 C#）。所以说，编程人员的学习重点不应该放在编程语言本身上。既然如此，学习编程的重点又在哪里呢？下面讨论左右程序质量的两大重要因素：实现思路和方法。

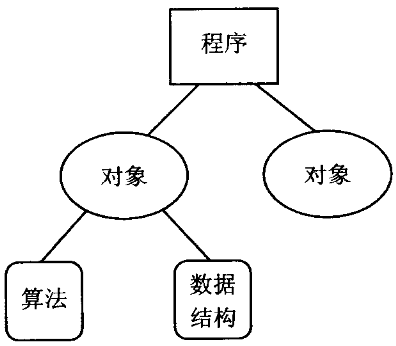
概括地讲，计算机程序的主要任务是对问题进行求解。我们把求解问题的方法称为算法。算法是程序功能具体实现的步骤集合，是程序的“灵魂”。因为做任何一件事情都要讲究方法，我们评价一件事情做得好与不好，关键就是看所用的方法好不好。而具体采用什么方法是由问题的特点决定的。在现实世界中，广泛存在着两大类问题：一类是数值问题，一类是非数值问题。数值问题的核心就是数值计算，一般可以用代数方程组来描述，进而应用初等代数、连续数学等方法进行求解（如线性代数、微积分等）。对于基于数据比较的非数值问题来说，就无法直接建立代数方程组模型来描述了。为了把数学方法引入到解决非数值问题中去，人们逐渐发明了离散数学。离散数学的内容极其广泛，包括拓扑论、图论、组合数学、逻辑学、代数系统等。离散数学很好地实现了对非数值问题模型的建立，为进一步解决问题做好了准备。对于不同问题的数学模型，必定需要设计不同的算法。一般来说，对于数值问题而言，算法可以直接从相对应的代数求解公式直接归纳推导出来。在电子计算机发明之前，数学家大多把精力放在了数值问题的求解上，因此其相应的求解方法相对成熟丰富，所以设计数值问题的求解算法是相对容易的。而对于非数值问题，算法就失去了直接从代数求解公式进行归纳的可能，必须另辟蹊径。在现代的计算机的教育体系中，学习的重点也是求解非数值问题的算法。但是，非数值问题的求解最终还是会转变到数值问题上，因为目前计算机只能进行数值运算。

要想设计出解决非数值问题的算法，首先必须在计算机中描述出问题的模型。就好比让某个人去做一件事情，首先要把事情描述给他听。在计算机中对非数值问题进行描述的方法就是建立数据结构。又因为目前我们使用的计算机采用的是“程序存储”体系结构，所以数据结构就包括两个方面：描述问题逻辑意义的是逻辑结构；描述问题在计算机中的存储结构的是物理结构。常见的逻辑结构有集合、线性表、树、图等；常见的物理结构有数组、链表等。我们可以在此基础上设计出新的数据结构。对于任意问题的逻辑结构，可以选择多种物理结构来存储；同样，任意的物理结构也可以存储多种逻辑结构。如树可以存储在数组或链表中，链表可以存储线性表、树、图等。

有了数据结构，算法的设计就有根据了。根据逻辑结构可以设计出算法的实现思路；根据物理结构可以设计出算法的实现方法。如对树的遍历而言，根据其逻辑结构特点，人们设计出了前序遍历、中序遍历和后序遍历算法，然后根据树的物理结构来具体实现这些遍历算法。对于一个具体问题来讲，数据结构的选择以及算法的设计是大有学问的。因为对于同一个问题，采用不同的数据结构与算法，会直接影响求解过程的性能好坏，即程序运行时的时空复杂度。如在物理结构为数组的线性表上插入一个元素，其时间复杂度为 $O(n)$，所需空间为 n 个单元；在物理结构为链表的线性表上插入一个元素，其时间复杂度为 $O(1)$，所需空间为 $2n$ 个单元。再如采用插入法对线性表中的数据进行排序，其时间复杂度为 $O(n^2)$；而采用快速排序法进行排序的时间复杂度为 $O(n\log n)$ 等。所以说，对数据

结构和算法的学习，主要就是要掌握各种逻辑和物理结构以及算法的性质规律，最终设计出具有较好运行性能的求解方法。有一个经典的公式很好地描述了数据结构和算法在编程中的作用——“程序=算法+数据结构”。

设计好了问题的数据结构和算法就等于为建造大楼准备好了砖和瓦，另外一个问题就是程序的开发方法。熟悉房建的朋友知道，一般的楼房有砖混结构和框架结构，其对应的建造方法是不同的。对于程序开发而言，也同样存在着面向过程和面向对象两大类开发方法。自软件危机爆发以来，面向对象技术开发方法逐渐替代了面向过程开发方法。面向对象的核心思想就是程序代码重用。重用代码一方面可以大大减少编码的工作量，还可以增加程序的健壮性、可读性、可维护性、易修改性等。面向对象技术主要是通过封装、继承和多态来具体实现的。其中，封装代码是基石；再通过继承已封装的代码来扩展重用手段；多态则是对继承的进一步扩展和优化，使得重用封装代码的过程变得灵活多变、简炼方便。面向对象的思想其实早就运用在日常生产的方方面面了。像维修业中的配件替换，生产线中的部件装配、升级、改装等。在众多的计算机高级语言里，可以直接使用面向对象技术的语言有 C++、Java、Delphi、Visual Basic、Visual C++等。这些语言都完全支持面向对象中的几乎所有的特性。使用面向对象技术编写的程序可以看成是一个对象的集合，也就是“程序＝对象＋…＋对象”。但是，有一点必须着重提出，对象是对功能代码的封装，而功能代码最终是由数据结构和算法来实现的。就好比结构复杂的大楼都是由砖和瓦砌起来的一样。面向对象思想对算法和数据结构进行了抽象，抽象的结果就是对象。也就是说，算法是对象的基石，对象又是面向对象的基石。下图形象地反映了以上关系。



以上简要介绍了算法、数据结构和面向对象开发方法之间的相互关系，以及它们在编程过程中的重要作用。如果您已经开始准备把学习重点先放在算法和数据结构上了，那么先不要急着那样做。因为在学习算法和数据结构前，还有更基础的知识要学习，那就是数学！

从唯物辨证法的角度来讲，人的任务就是不断地认识世界和改造世界。而数学则是人们在认识世界过程中发现和总结出的逻辑规律，这些规律对改造世界具有实质性的指导意义。

马克思是这样评价数学的作用的：“任何科学只有当它成功地使用了数学，才能趋于完善。”那么数学是如何在计算机程序的编写中发挥作用的呢？

首先，数学以其严密的形式语言给问题建立出逻辑模型，然后使用各种推理手段归纳总结出这个模型的求解方法。编程者根据这个数学方法的思路设计出能在计算机上实现的算法和数据结构，最后使用计算机语言编写出程序。由此可见，数学模型及其计算方法的

设计是程序编写的首要步骤。如果数学模型建不起来，那么算法和数据结构也就无从谈起。就算建立了数学模型，如果计算方法效率很低，同样会影响最终程序的质量。举个非常简单的例子（百钱买百鸡问题），设一只公鸡 5 元钱，一只母鸡 3 元钱，三只小鸡 1 元钱，如用 100 元钱买一百只鸡，则公鸡、母鸡、小鸡各多少只。最直观的办法就是用三重循环来求解，每重循环分别代表公鸡、母鸡和小鸡，循环范围从 1 到 100。如果再仔细想一下，可以发现公鸡的个数不会超过 20 只，母鸡的个数不会超过 33 只，小鸡的个数就是 100 减去公鸡和母鸡的个数总和。这样一来，三重循环就可以降为二重循环，循环范围分别为 19 和 33，明显加快了程序求解的速度。

总而言之，数学的核心作用就是发现事物规律，并从中找到解决问题、优化问题的逻辑方法，指导模型的建立，为程序编写提供最原始也是最重要的依据，是程序真正的驾驭者。可以说，从计算机本身的电路设计到计算机应用都是直接建筑在数学的基础上的。没有数学的支撑，任何计算机技术都无法实现和发展。与此同时，计算机技术的发展与应用又反过来推动了数学的研究和发展。像图论、组合数学、数值分析等学科都是在计算机发明后才迅速发展起来的。数学与计算机的这种辨证关系和相互作用，大大加快了人们认识世界、改造世界的步伐。在许多如天气预报、DNA 密码破解、仿真试验、宇宙探索、人工智能等新兴领域的研究中，更是到处可见计算机的身影。

说到这里，我想大家应该大致知道应该如何去学习计算机编程的基本方法了吧。计算机编程是一项创新性、技巧性很强的工作，是思维逻辑的产物。而数学正是对逻辑的完美体现。所以说，没有坚实的数学基本功和计算机理论基础，是很难保证思维逻辑的正确和高效的。

以上的介绍都是抽象的文字说明，似乎有些泛泛。为了让读者能够直观地感受到以上介绍内容的意义，本书以模糊数学理论为基础，综合了数据结构以及算法设计，并通过面向对象语言 Java 来实现程序。让读者逐步了解编程的一般规律和方法，正确地认识计算机语言、算法与数据结构以及面向对象技术之间的辨证关系，从而抓住编写程序的本质核心，把学习精力和重点放在正确的地方，扎扎实实地练习基本功。本书没有涉及到高深的理论知识，读者只需要具备一定的离散数学基础知识，以及对计算机高级语言有一个基本了解就可以了。

本书在编写过程中，参考和引用了国内外部分著作和文献中的相关内容，在此对这些资料的作者表示衷心感谢！由于编者水平有限，时间紧迫，书中难免会出现错误和漏洞，真诚希望广大读者批评指正！

作　者

2008 年 1 月

目　　录

第 1 部分　模糊数学基础

第 2 部分 模糊算法的应用

第3部分 模糊算法的实现

第1部分

模糊数学基础

第1章 导论

1.1 模糊数学的由来

人类了解和掌握自然规律首先是从观察和研究自然现象入手的，这是一个从事物的表面现象到内部本质的认知过程。例如，牛顿观察到苹果落地现象后发现了万有引力；海尔蒙脱通过盆栽柳树试验发现了植物的光合作用；法拉弟发现通电导线能绕磁铁发生偏转，以此揭开了电磁感应的奥秘；科学家观察到遮住耳朵的蝙蝠会失去方向，从而发现了蝙蝠使用超声波制导的原理。

在五花八门、多姿多彩的自然现象中，有一类自然现象是可以用语言精确描述的。例如，1加1等于2；水的温度达到100摄氏度时会沸腾；加热高锰酸钾可以产生氧气；光的速度是每秒30万公里，等等。可以看到，这类现象都具有精确的定义和性质，我们把这类现象称为“精确现象”。显然精确现象在自然界中是普遍存在的。自古以来，人类在研究这些精确现象内在规律的过程中发明和积累了许许多多的方法与经验，并至今一直都发挥着极其重要的作用，如代数、几何、数论、微积分、离散数学等学科。人们把这类研究精确现象的数学学科称为“精确数学”。

但是，在现实世界中还大量存在着一类难以甚至无法被精确描述和定义的自然现象。例如，张三是高个子（身高多少属于高个子呢？）；今天下的雨是中雨（雨量多少是中雨呢？）；昆明的气候非常好（什么样的气候是好气候？）；李四是一个中年人（年龄为多少属于中年人呢？）；某品牌的电视机质量很好（什么样的质量能称为很好呢？），等等。为了和精确现象相对应，我们把这类没有精确定义或性质的自然现象称为“模糊现象”。模糊现象的这种特性使得人们很难直接套用精确数学的方法去研究和分析。打个比方，如果我们认为一个身高1.8米的人是身材高大的，那么对于一个身高1.79米的人呢？显然没有理由因为他比1.8米矮1厘米就说他身材不是高大的；同样的道理，身高1.78米的人也还是会被认为其身材是高大的；按照这种逻辑依次类推，就会得到1米的身高也是高大身材的谬论。再比如，人的长相是随着时间在连续变化的。也就是说，就算只过了一秒钟，人的长相都会产生细微的变化。但是在短时间内，人们之间的互相辨认是不会受这种细微变化影响的。这是因为人类大脑具备对精确信息进行模糊化的能力。如若不然，就会出现

今天还是互相认识的，明天就互相不认识的笑话。

模糊现象的共性是其在各自的范畴内都不约而同地具有模糊性。因此，要客观科学地认识和研究模糊现象就必须从分析模糊性的实质入手。从上面的例子可以看到，具有模糊性的对象往往都是很难给予明确判断标准的。如人的高矮、气候的好坏、中青年与老年的划分、质量的高低等都是没有绝对的标准的，或者也可以说标准本身就是模糊的。反过来，那些具有明确判断标准的对象就认为其具有精确性。例如，中国的首都是北京；成人是指年满 18 周岁的人（在中国）；某大学的高考录取分数线是 606 分等。虽然模糊性和精确性有着本质上的不同，但两者都是对事物性质的体现。也就是说，任何事物都有其精确的一面和模糊的一面。模糊性和精确性是相互共存的，并且在一定的环境和条件下，模糊性和精确性也会互相转化。例如，南京在江苏省范围内绝对属于大城市了，但在全国范围内是否还属于大城市就难说了。

为了用严谨的科学手段去研究模糊现象、分析模糊性质，模糊数学应运而生。模糊数学的出发点就是通过数学的手段研究和分析模糊现象的内在规律。尽管模糊数学的研究对象是模糊现象，但其研究方法还是在精确数学的基础上发展起来的。读者在学完本书后就会发现，模糊规律的分析和总结最终还是依靠精确数学的手段实现的。这种从精确到模糊，再由模糊到精确的过程不是原地踏步，而是螺旋式地前进，是自然辨证法否定之否定原理的深刻体现。

1.2　模糊数学和概率论的关系

我们知道模糊数学是专门研究和分析具有模糊性质的自然现象的学科。在自然界中，除了精确现象和模糊现象之外，还客观存在着另外一种现象，那就是随机现象。如掷出骰子将会出现的点数是多少；明天的天气情况会如何；年初制定的全年生产任务能否如期完成；2008 年北京奥运会中国能拿多少枚奖牌，这些都是随机现象。可以看到，随机现象本身具有的随机性质也是一种不确定性，这和模糊现象的模糊性是类似的。但是我们还应该看到，随机现象的不确定性和模糊现象的不确定性又有着本质的区别。随机现象的不确定性是指在事件本身的定义和范畴是确定的情况下，事件发生的具体结果是不确定的。如下落的骰子，其正面朝上的点数必定是 1～6 之间的自然数，其事件本身是确定的，仅仅下落后的点数到底是多少我们不确定。再比如明天要么下雨，要么不下雨，只有这两种情况，这是明确肯定的，到底是哪种情况今天还不能确定。而对于模糊现象来说，其模糊性的意思是指事件发生的结果是明确的，而事件本身的定义和范畴是不明确的。例如，某个人的高度是明确可知的，但这个高度是否属于“高个子”是不确定的，因为高个子的范围是不

确定的；一辆汽车的各种性能参数是明确知道的，但不能明确说这辆车是“好车”，因为好车的标准不是绝对的。

由此可见，模糊现象和随机现象是从两个不同的方面来反映和体现自然现象的不确定性。和精确性与模糊性类似，随机性和模糊性往往也是相互共存的。例如，假设从小王同学现在的学习情况看，明年考上名牌大学的希望很大。我们知道，小王能否考上名牌大学是随机的，要么考得上要么考不上；同时。名牌大学的概念是模糊的。到底什么大学才叫名牌大学呢？可能每个人都会有自己的看法。

1.3 模糊数学的应用和前景

模糊数学理论自从 1965 年由美国控制专家查德创立以来，得到了飞速的发展。模糊数学在经典数学的基础上进行了开创性的扩展，科学地建立起了自身特殊的方法理论。如今模糊数学已经在原有基础上派生出了模糊拓扑、模糊图论、模糊概率、模糊逻辑等分支学科，大大丰富了模糊数学的内容。经过几十年的不断发展，模糊理论已经成功地运用在诸如军事、医疗、地矿、生物、天气预报、信息处理、人工智能等很多领域。模糊技术的应用使得生产工具能够更好地与人配合，最终产生出巨大的生产力。

在我国，模糊数学的研究与应用已经取得了很大的成绩，很多研究成果都处于世界领先地位。为了继续提倡和发展对模糊数学的研究和应用，自 20 世纪 80 年代起，国家相继创办了《模糊数学》、《模糊系统与数学》等学术期刊，用于从事模糊理论研究和应用的学者互相交流和传播经验。各个高校和研究机构也都相应开设了模糊理论课程并创办了专业实验室。

总的来说，模糊数学在认识世界、改造世界的实践活动中已经表现出了强大的生命力，并将扮演越来越重要的作用。但是我们也要认识到，相对其他一些学科而言，模糊数学还是一门新兴学科，其理论体系还远远没有成熟，存在着巨大的可发展空间和广大的前景，期待更多的有志之士去探索和研究。

第 2 章　模糊集合

自 19 世纪末德国数学家康托尔提出集合论以来，集合论已经广泛应用到了各个数学分支中，并起着极其重要的基础作用。可以说，集合论是现代数学的基石。模糊集合也是从集合论中衍生推广出来的。所以在详细介绍模糊集合前，有必要先对集合论的主要内容进行简单的介绍。为了和模糊集合相区别，这里把康托尔创立的集合论统称为普通集合。

2.1　普通集合

2.1.1　普通集合的概念

1. 普通集合及其元素

在这个物质世界里，到处都是形态各异的事物。为了方便人们尽可能地去研究和掌握每个事物的规律，一个好的办法就是对事物进行分类，然后再总结归纳出各类事物的一般规律。例如地质学家研究矿石，显然不可能把地球上每块矿石都拿到实验室去研究。所以只有把矿石进行分类，再有针对性地去研究各类矿石的性质。由于同一类矿石的性质是相同或基本相似的，这样人们就可以在相对较短的时间内掌握一类矿石的性质。这就是从一般到特殊，又从特殊到一般的认知过程。

我们把一类具有相同性质，且互相可区别的事物对象的总体称为**集合**。集合中的每个对象称为**元素**。通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示元素。如自然数集合用 N 表示，整数集合用 Z 表示，元素常用 a、b 等表示。集合本身可以随着待处理问题的范围而变化。如研究鸟类性质时，麻雀、老鹰、大雁被看成是鸟类集合中的元素，研究动物性质时，麻雀、老鹰、大雁又被看成是动物集合中的元素。为了方便从大量的对象中准确地定义集合，往往事先划定一个对象总体的范围，这个范围就称为集合的**论域**。可以看到，论域本身就是一个集合。如动物集合是鸟集合的论域，鸟集合又可以是候鸟集合的论域等。其实我们在小学就接触到了集合的概念，像自然数集合、整数集合、有理数集合等。到了中学又学习了实数集合、虚数集合等。

在一个普通集合中，元素的性质是确定的。换句话说，论域中的元素要么属于集合，要么不属于集合，也就是“非此即彼”的意思。如 1 属于自然数、0 属于整数、中国属于

发展中国家等。在数学上，用记号“$\in$”表示元素属于集合，用记号“$\notin$”表示元素不属于集合。如$a \in A$表示元素a属于集合A；$a \notin A$表示元素a不属于集合A。

我们把没有任何元素的集合称为**空集**，记为“$\varnothing$”。注意：空集和“0”不是一回事，“0”是一个集合的元素。集合中所有元素的个数称为**基数**。集合A的基数记为$|A|$。如设$A=\{0\}$，则$|A|=1$，而$|\varnothing|=0$。

根据集合包含元素的个数是否是有限的，可以将集合分为**有限集合**和**无限集合**两类。如鸟类集合和动物集合，尽管其包含的元素个数很多，但还是有限个，所以都属于有限集合。自然数集合、整数集合则是无限集合。

根据集合包含元素的个数是否一一可列，集合又分为**可列集合**和**不可列集合**两类。像自然数集合虽然是无限集合，但属于可列集合。实数集合则是不可列集合，因为我们无法一一列出每个实数。

2. 普通集合的表示

我们已经知道，集合是具有相同性质的一类对象的总体。如何把集合的概念运用到数学中去呢？第一步就是要用数学语言来描述和表示集合。这里介绍几种常见的数学表示法。

（1）枚举法。把集合中所有元素全部一一列出的方法就是枚举法。

例 2-1

1）10 以内所有质数的集合$=\{2,3,5,7\}$。

2）计算机高级语言的集合=\{Basic,C,Delphi,Java…\}。

3）自然数集合$N=\{1,2,3,4,5\cdots\}$。

枚举法具有简单直观的优点，但是只能描述可列集合，而且没有把集合的性质和规律以一种直观的方式显示出来。所以枚举法一般用在元素性质相对简单、元素个数比较少的情况下。

（2）描述法。描述法通过直接描述集合元素的性质来描述集合，而不是单纯地罗列元素个体。具体方法如下：

设集合A的元素具有属性P，则$A=\{x \mid P(x)\}$。其中“|”左边的x泛指集合A的元素，而“|”右边的代数式$P(x)$表示元素x的性质。

例 2-2

1）自然数集合$N=\{x \mid x\text{是自然数}\}$。

2）有理数集合$Q=\{a/b \mid a \in Z, b \in Z\}$。

3）二次抛物线$Y=\{x^2 \mid x \in R\}$。

可以看到，描述法体现出了集合的本质特性。在表示无限或不可列集合时，描述法非常简练方便。

（3）特征函数法。特征函数法通过判断论域上的元素是否属于集合来描述集合。其

数学表达式如下：

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$$

特征函数也可以看成是一个布尔函数，其值只有 0 和 1 两种可能。任何一个集合都有唯一的特征函数与之对应。

例 2-3

已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，其对应的特征函数如下：

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & (0<x<6，x\in N)\\ 0 & (x\leqslant 0\cup x\geqslant 6)\end{cases}$$

读者或许会认为对于集合来说，特征方法似乎有点多此一举。的确，对于常见的普通集合来说，特征函数法、枚举法和描述法在逻辑上有一定的重叠，但对于后面要讲的模糊集合来说，特征函数法起到了承上启下的重要作用。

3. 子集

在许多集合的运用过程中，往往需要把集合中的一部分元素抽取出来组成一个新的集合，以满足实际需要。这就是子集概念的由来。若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 为 B 的**子集**。即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，并记为 $A\subseteq B$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”。若 A 是 B 的子集，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$。

注意：子集表达的是集合与集合之间的从属关系，这要和元素与集合之间的从属关系严格区别开来。

例 2-4

1）设 $A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则 $A\subseteq B$ 或 $A\subset B$。

2）设 $A=\{x\mid x\text{是自然数}\}$，$B=\{x\mid x\text{是整数}\}$，则 $A\subseteq B$ 或 $A\subset B$。

3）设 $f_A(x)=\begin{cases}1 & (1\leqslant x\leqslant 10，x\in N)\\ 0 & (x>10，x\in N)\end{cases}$，$f_B(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant 100，x\in N)\\ 0 & (x>1，x\in N)\end{cases}$，则 $A\subseteq B$ 或 $A\subset B$。

2.1.2　普通集合的基本运算及其性质

1. 集合上的基本运算

集合实现了同类性质事物的抽象统一。但是在实际的运用中，往往需要把不同的集合进行一系列的逻辑组合，以生成新的集合。这个过程称为集合的基本运算。下面介绍普通集合上的基本运算的概念。

设 A 和 B 是论域 U 中的两个集合，则：

- A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$。$A$ 与 B 的并集可以看成