

1978~1985 · 1987~1994

研究生入学考试 数学试题选解

欧维义 陈璇艳

吉林大学出版社

1978—1985、1987—1994
研究生入学考试数学试题选解

欧维义 陈璇艳

吉林大学出版社

1978—1985 1987—1994
研究生入学考试数学试题选解
欧维义 陈璇艳

责任编辑、责任校对：陈维钧

封面设计：张沐沉

吉林大学出版社出版
(长春市东中华路 29 号)

吉林大学出版社发行
吉林农业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/16

1994 年 7 月第 1 版

印张：37.625

1994 年 7 月第 1 次印刷

字数：865 千字

印数：1—5100 册

ISBN 7-5601-1599-3/O · 184

定价：24.00 元

前 言

本书以 1987—1994 年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学试题为基础,同时精选了 1978—1985 年全国各院校硕士研究生入学试题的部分考题,它具有如下的特点:

1. 题目类型齐全. 本书重点是汇编 1987—1994 年的新题型,因此它突出地反映了近年来研究生入学考试对考生的要求;其中收入的 1978—1985 年的题型选自几十所院校和科学院系统. 因此,新老题型汇总在一起,较完整地反映出各类学校、不同专业的要求. 所以,考生能够根据自己的需要,选择复习重点;

2. 简明、针对性强. 考生如能按照我们的题型进行复习,既可以把握重点,掌握解题思想和方法,达到事半功倍的复习效果;

3. 本书有考察考生基础知识、基础理论方面的试题,又有考察考生分析问题、解决问题能力方面的试题. 因此,它体现了数学课程的较高要求. 所以,它不仅是学生学习数学的良师益友,而且也是一本有价值的教学参考书.

4. 由于篇幅的限制,这次我们没有收集数学试题 1、数学试题 4、数学试题 5 中所包含的复变函数和数理统计方面的考题,对填空题和选择题中出现的数理统计方面的题目也未作注解.

目 录

第一章 填空题与选择题	(1)
§ 1 1987 年的填空题与选择题	(1)
1.1 1987 年的填空题	(1)
1.2 1987 年的选择题	(3)
§ 2 1988 年的填空题与选择题	(6)
2.1 1988 年的填空题	(6)
2.2 1988 年的选择题	(9)
§ 3 1989 年的填空题与选择题	(12)
3.1 1989 年的填空题	(12)
3.2 1989 年的选择题	(14)
§ 4 1990 年的填空题与选择题	(20)
4.1 1990 年的填空题	(20)
4.2 1990 年的选择题	(23)
§ 5 1991 年的填空题与选择题	(26)
5.1 1991 年的填空题	(26)
5.2 1991 年的选择题	(29)
§ 6 1992 年的填空题与选择题	(34)
6.1 1992 年的填空题	(34)
6.2 1992 年的选择题	(38)
§ 7 1993 年的填空题与选择题	(42)
7.1 1993 年的填空题	(42)
7.2 1993 年的选择题	(45)
§ 8 1994 年的填空题与选择题	(50)
8.1 1994 年的填空题	(50)
8.2 1994 年的选择题	(53)
第二章 极 限	(57)
§ 1 基本知识	(57)
1.1 无穷小量与无穷大量阶的比较	(57)
1.2 极限计算中的几个常用定理	(57)
1.3 极限计算中的几个常用公式	(59)
§ 2 填空题与选择题	(60)
2.1 填空题	(60)
2.2 选择题	(62)
§ 3 函数的 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(65)
3.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(65)
3.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(71)
3.3 含参变量积分的 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(81)

§ 4 函数的 1^∞ 型极限	(86)
4.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(86)
4.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(89)
§ 5 数列极限	(93)
5.1 数列极限的杂题	(93)
5.2 不定型的数列极限	(102)
5.3 部分和型数列的极限	(107)
§ 6 极限存在判别和证明题	(111)
6.1 单调有界原理	(111)
6.2 夹挤定理	(119)
6.3 极限证明题	(125)
第三章 微分学	(137)
§ 1 内容提要	(137)
1.1 连续函数及其基本性质	(137)
1.2 导数、微分、偏导数、全微分的概念	(138)
1.3 导数、偏导数的运算法则	(139)
§ 2 连续性与可微性	(141)
2.1 1987—1994 年研究生入学试题选(填空题与选择题)	(141)
2.2 1979—1985 年研究生入学试题选(连续性)	(145)
2.3 1979—1985 年研究生入学试题选(连续性、可微性)	(152)
2.4 1979—1985 年研究生入学试题选(多元函数)	(161)
§ 3 微分法	(169)
3.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(169)
3.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(177)
3.3 1979—1985 年研究生入学试题选(多元函数)	(187)
§ 4 场论和微分恒等式	(196)
4.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(196)
4.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(196)
第四章 积分法	(203)
§ 1 不定积分	(203)
1.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(203)
1.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(207)
§ 2 定积分	(215)
2.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(215)
2.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(218)
§ 3 广义积分	(228)
3.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(228)
3.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(228)
§ 4 重积分	(234)
4.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(234)
4.2 1979—1985 年研究生入学试题选	(238)
§ 5 曲面积分	(257)
5.1 1987—1994 年研究生入学试题选	(257)

5.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(261)
§ 6	曲线积分	(272)
6.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(272)
6.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(273)
第五章	中值定理、不等式和零点	(285)
§ 1	中值定理及其应用	(285)
1.1	中值定理的内容	(285)
1.2	1987—1994 年研究生入学试题选	(285)
1.3	1979—1985 年研究生入学试题选	(288)
§ 2	不等式	(298)
2.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(298)
2.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(302)
§ 3	方程的根和函数的零点	(328)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(328)
3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(330)
第六章	极 值	(337)
§ 1	函数型极值	(337)
1.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(337)
1.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(337)
§ 2	普通极值应用问题	(343)
2.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(343)
2.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(348)
§ 3	条件极值应用问题	(360)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(360)
3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(360)
第七章	几何与物理应用	(371)
§ 1	函数的图形和它的性质	(371)
1.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(371)
1.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(375)
§ 2	向量、切线、切平面及其它	(385)
§ 3	面积、体积及其它	(393)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(393)
3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(399)
§ 4	物理应用	(406)
4.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(406)
4.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(409)
第八章	级 数	(426)
§ 1	数值级数	(426)
1.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(426)
1.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(427)
§ 2	函数级数	(443)
§ 3	幂级数	(446)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(446)

3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(449)
§ 4	Fourier 级数	(467)
4.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(467)
4.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(468)
第九章	常微分方程	(487)
§.1	一阶方程	(487)
1.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(487)
1.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(491)
§ 2	二阶微分方程	(498)
§ 3	应用问题	(503)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(503)
3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(505)
§ 4	积分型方程	(506)
4.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(506)
4.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(508)
第十章	线性代数	(511)
§ 1	内容提要	(511)
1.1	n 阶行列式	(511)
1.2	矩阵及其运算	(512)
1.3	向量组的线性相关性与矩阵的秩	(516)
1.4	线性方程组	(517)
1.5	矩阵的特征值与特征向量	(521)
1.6	二次型及其在正交变换下的标准形	(522)
1.7	相似矩阵	(524)
§ 2	行列式的性质及其计算	(525)
2.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(525)
2.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(527)
§ 3	矩阵运算和矩阵方程	(533)
3.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(533)
3.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(537)
§ 4	线性方程组	(549)
4.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(549)
4.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(557)
§ 5	向量组的线性关系	(561)
5.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(561)
5.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(566)
§ 6	特征值与特征向量、二次型和相似矩阵	(570)
6.1	1987—1994 年研究生入学试题选	(570)
6.2	1979—1985 年研究生入学试题选	(579)

第一章 填空题与选择题

在以下的填空题中,将答案填入横线上空白处(不填解题过程),填对得3分;不填或填错一律得0分.在以下的选择题中,每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后的括号内.每个小题选对给3分,不选、选错或选出的代号超过一个一律得0分.

§1 1987年填空题与选择题

1.1 1987年的填空题

1. 数学试题1、数学试题2的填空题

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$

平行,且过原点的平面方程为 $x-y+z=0$.

注解 设所求的平面为 π ,并把两直线分别记成

$$l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases} \quad l_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

如果把直线 l_1 的方程改写为

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}$$

即知直线 l_1 的方向向量 τ_1 可取为

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = j + k = \{0, 1, 1\}$$

又直线 l_2 的方向向量 $\tau_2 = i + 2j + k = \{1, 2, 1\}$. 于是向量

$$n = \tau_1 \times \tau_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i + j - k = \{-1, 1, -1\}$$

垂直于平面 π . 故所求的平面过原点 $(0, 0, 0)$, 且以 $n = \{-1, 1, -1\}$ 为法向量, 于是它的方程为 $x - y + z = 0$.

(2) 当 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 时, 函数 $y = x^{2^x}$ 取得极小值.

注解 显然函数 $y = x^{2^x}$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 内无穷次可导, 又 $y' = 2^x(1 + x \ln 2)$. 解方程

$y'=0$ 得 $x_0=\frac{-1}{\ln 2}$. 即 x_0 是函数 $y(x)=x^{2^x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的唯一驻点.

又当 $x < x_0$ 时, $y' < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $y' > 0$. 故 $x = x_0$ 时, 函数 $y = x^{2^x}$ 取极小值.

(3) 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是

$$\frac{3}{2}.$$

注解 根据题意要求面积的图形为图 1.1 中的阴影部分.

对 y 积分知所求的面积

$$S = \int_0^1 (e+1-y-e^y) dy = \frac{3}{2}$$

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 则曲线积分

$$\oint_L (2xy - 2y) dx + (x^2 - 4x) dy$$

值是 -18π .

注解 对所论积分应用场论中的格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

得到所求积分的值

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - 2y) \right] dx dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 9} 2 dx dy = -18\pi \end{aligned}$$

(5) 已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)'$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)'$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)'$, 则向量 $\beta = (2, 0, 0)'$ 在上述基底下的坐标是 $(1, 1, -1)$.

注解 注意到

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则由

$$\beta = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. 数学试题 3 的填空题

(1) 设 $y = \ln(1+ax)$ 其中 a 为非零常数, 则

$$y' = \frac{a}{1+ax} \quad y'' = \frac{-a^2}{(1+ax)^2}$$

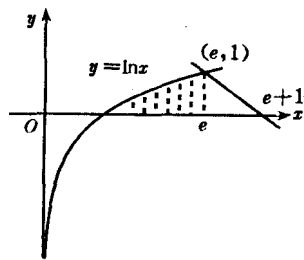


图 1.1

(2) 曲线 $y = \arctg x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是 $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$; 法线方程是 $y - \frac{\pi}{4} = -2(x-1)$.

(3) 定积分中值定理的条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 结论是在 $[a, b]$ 内至少有一点 ξ 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = e^{-3}$. *

(5) $\int f'(x) dx = f(x) + C$
 $\int_a^b f'(2x) dx = \frac{1}{2} [f(2b) - f(2a)]$

1.2 1987 年的选择题

1. 数学试题 1、数学试题 2 的选择题

(1) 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.

(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 收敛或发散与 k 的取值有关.

答: (C)

注解 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ 绝对收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛, 故其和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ 条件收敛.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数

$$I = t \int_0^s f(tx) dx$$

其中 $t > 0, s > 0$, 则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t .

(B) 依赖于 s, t, x .

(C) 依赖于 t 和 x , 不依赖于 s .

(D) 依赖于 s , 不依赖于 t .

答: (D)

注解 对所给定积分, 作变量变换, 即见 (D) 成立.

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在点 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$.

(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

答: (B)

注解 由题的假设知,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$$

* 本章关于极限的填空题、选择题, 其注解都放在第二章的填空题与选择题中.

根据极限的性质推出, 当无论 $x > a$ 或 $x < a$, 只要 x 充分靠近 $x = a$ 时, 都有

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$$

于是, 存在 $\delta > 0$, 使

$$f(x) < f(a) \quad \text{当 } 0 < |x - a| < \delta$$

故 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处取极大值.

(4) 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 的行列式 $|A| = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*|$ 等于

(A) a .

(B) $\frac{1}{a}$.

(C) a^{n-1} .

(D) a^n .

答: (C)

注解 按设 A^{-1} 存在, 并且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad A^* A = \begin{bmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

此于上面第二个等式的两端取行列式, 得

$$|A^*| |A| = |A|^n$$

因此 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

2. 数学试题 3 的选择题

(1) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} \quad (-\infty < x < +\infty)$ 是

(A) 有界函数.

(B) 单调函数.

(C) 周期函数.

(D) 偶函数.

答: (D)

(2) 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大.

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

答: (C)

(3) 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$$

等于

(A) $f'(a)$.

(B) $2f'(a)$.

(C) 0.

(D) $f'(2a)$.

答: (B)

注解

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+x) - f(a)}{x} + \frac{f(a-x) - f(a)}{-x} \right]$$

根据导数的定义, 即见 (B) 成立.

(4) 与1的(2)相同.

3. 数学试题4、数学试题5的选择题

(1) 函数_____在其定义域内连续.

(A) $f(x) = \frac{1}{x}$

(B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

答:(A)

(2) 广义积分_____是收敛的.

(A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

(B) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

(C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$.

(D) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{1/2}}$.

答:(C)

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, x_1 和 x_2 是区间 (a, b) 内任意两点 ($x_1 < x_2$), 则至少存在一点 ξ , 使_____.

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, 其中 $a < \xi < b$.

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b - x_1)$, 其中 $x_1 < \xi < b$.

(C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, 其中 $x_1 < \xi < x_2$.

(D) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - a)$, 其中 $a < \xi < x_2$.

答:(C)

注解 对函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 须要求: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; $f(x)$ 在 (a, b) 内可导.

(4) 假设 A 是 n 阶方阵, 其秩 $r < n$, 那么在 A 的 n 个行向量中_____.

(A) 必有 r 个行向量线性无关.

(B) 任意 r 个行向量线性无关.

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

(D) 任何一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表出.

答:(A)

(5) 对于任意二事件 A 和 B , 有 $P(A-B) =$ _____

(A) $P(A) - P(B)$.

(B) $P(A) - P(B) + P(AB)$.

(C) $P(A) - P(AB)$.

(D) $P(A) + P(B) - P(AB)$.

答:(C)

(6) 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB) = 0$, 则_____.

(A) A 和 B 不相容(相斥).

(B) AB 是不可能事件.

(C) AB 未必是不可能事件.

(D) $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$.

答:(C)

4. 数学试题 4(10 分) 判断下列各题中的结论是否正确:您认为结论正确,在括号内打“√”,否则打“×”.(每小题,回答正确得 2 分,回答错误得-1 分,不回答得 0 分;全题最低得 0 分).

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (×)

注解 注意 $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$ (√)

注解 奇函数在对称区间上的积分为 0.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 也必发散. (×)

注解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$ 都发散,但它们之和收敛.

(4) 假设 D 是矩阵 A 的 r 阶子式,且 $D \neq 0$,但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0. 那么矩阵 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0. (√)

注解 按设知矩阵 A 的秩为 r ,故 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于零.

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0. (√)

5. 数学试题 5(10 分) 判断下列各题中的结论是否正确:您认为结论正确,在括号内打“√”,否则打“×”.(每小题,回答正确得 2 分,回答错误得-1 分,不回答得 0 分;全题最低得 0 分).

(1)、(2)、(5)与 4 题(1)、(2)、(5)相同;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内严格单调增加,则对于区间 (a, b) 内的任何一点 x , 有 $f'(x) > 0$ (×)

注解 函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加,但在点 $x=0$ 处有 $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$.

(4) 若 A 为 n 阶方阵, k 为常数,而 $|Ak|$ 和 $|kA|$ 为矩阵 A 和矩阵 kA 的行列式,则 $|kA| = k|A|$ (×)

注解 按数乘矩阵的定义,知 $|kA| = k^n |A|$.

§ 2 1988 年的填空题与选择题

2.1 1988 年的填空题

1. 数学试题 1、数学试题 2 的填空题

(1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}$, 则 $f'(t) = (2t+1)e^{2t}$.

注解

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \exp \left\{ 2t \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right\} = te^{2t}$$

$$f'(t) = (2t + 1)e^{2t}$$

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的付立叶(Fourier)级数在 $x=1$ 处收敛于 $\frac{3}{2}$.

注解 Fourier 级数的收敛定理说, 对每个 $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) \\ &= \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned}$$

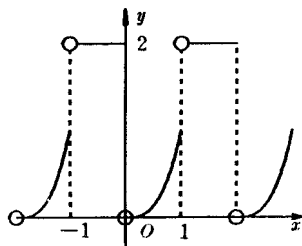


图 1.2

如 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的图 1.2 所示

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

因此, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=1$ 处收敛于 $\frac{[f(1-0) + f(1+0)]}{2} = \frac{3}{2}$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 则 $f(7) = \frac{1}{12}$.

注解 根据带参变量积分的求导公式

$$\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right)' = \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t)$$

于等式 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$ 两端对 x 求导得

$$f(x^3 - 1)3x^2 = 1$$

在上式中令 $x=2$, 得 $f(7) = \frac{1}{12}$.

(4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4$, $|B| = 1$, 则行列式 $|A+B| = \underline{\quad 40 \quad}$.

注解 注意

$$|A+B| = |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha + \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| = 8(|A| + |B|)$$

2. 数学试题 3 的填空题

(1) 若 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x > 0, \\ 2x + a, & x \leq 0, \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$

1.

(2), (3) 与 1 题的 (2), (3) 相同.

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\lg x} = \underline{1}$

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{2(e^2 + 1)}$

注解 在变量变换 $\sqrt{x} = y$ 下, 并利用定积分的分部积分公式, 有

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^2 y e^y dy = 2(e^2 + 1)$$

3. 数学试题4、数学试题5的填空题(满分12分)

(一) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, $-\infty < x < +\infty$

(1) $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

(2) $f(x)$ 的单调性: 单调增加;

(3) $f(x)$ 的奇偶性: 奇函数;

(4) $f(x)$ 图形的拐点: (0,0);

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性: $x < 0$ 时上凹(下凸), $x > 0$ 时下凹(上凸);

(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线: $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

注解 因为 $f(x)$ 是由连续函数 $G(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 变动积分上限的函数

$$f(x) = \int_0^x G(t)dt = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

所以有 $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 于是在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 又

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = - \int_0^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = -f(x)$$

即 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数.

因为 $f''(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 所以当 $x < 0$ 时, $f''(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内上凹(下凸); 当 $x > 0$ 时, $f''(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内下凹(上凸). 并且 $(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x)$ 的图形的拐点.

注意到

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = -\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} d\left(-\frac{1}{2}r^2\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

于是有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

从而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有水平渐近线 $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 有水平渐近线 $y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(二) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-3}}.$

$$(三) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(四) 假设 $P(A)=0.4$, $P(A \cup B)=0.7$. 那么

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(B)=$ 0.3;

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B)=$ 0.5;

2.2 1988 年的选择题

1. 数学试题 1、数学试题 2 的选择题

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy

是

(A) 与 Δx 等阶的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

答: (B)

注解 根据题设 $dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$, dy 与 Δx 为同阶无穷小.

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解, 若 $f(x_0)>0$, 且 $f'(x_0)=0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0

(A) 取得极大值.

(B) 取得极小值.

(C) 某个邻域内单调增加.

(D) 某个邻域内单调减少.

答: (A)

注解 由 $f(x)$ 满足方程及题中的假设条件, 可推出

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)<0$$

故 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值.

(3) 设有空间区域

$$\Omega_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0;$$

$$\Omega_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$$

则

$$(A) \quad \iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$$

$$(B) \quad \iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$$

$$(C) \quad \iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$$

$$(D) \quad \iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$$

答: (C)

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛.

(B) 绝对收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性不能确定.

答: (B)