

# 奇异值分解及其在 广义逆理论中的应用

郭文彬 魏木生◎著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

0151.21/46

2008

# 奇异值分解及其在广义逆 理论中的应用

郭文彬 魏木生 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统地总结了各种类型的奇异值分解,并研究了奇异值分解在广义逆理论中的应用,包括各种类型广义逆的反序律,加边矩阵的广义逆和性质,分块矩阵关于广义逆的块独立性,三种加权广义逆的定义和结构、唯一性、等价性以及矩阵方程的最小范数解等.

本书适合数学专业研究生和从事数值代数研究的科技工作者阅读参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

奇异值分解及其在广义逆理论中的应用/郭文彬,魏木生著. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021349-5

I. 奇… II. ①郭… ②魏… III. ①异常值 ②广义逆 IV. O241 O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 032473 号

责任编辑:王丽平 唐保军/责任校对:陈玉凤

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008 年 5 月第一次印刷 印张: 9 3/4

印数: 1—3 000 字数: 180 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<明辉>)

## 出版说明

聊城地处鲁西大地，是全国历史文化名城之一。

元代以降，会通河之开通，不仅促成该地区经济的繁荣，也促进了南北文化的交融；明清之际的聊城，文运昌盛，书院林立，一时“科目鼎盛，贤士辈出”。这自然与齐鲁大地尊师重教之古风有所联系。

毋须追溯更远历史。屈指算来，清季“行乞兴学”之教育家武训、民国学人傅斯年、抗日英雄张自忠、国学大师季羨林、丹青高手李苦禅，以上诸位，差可堪称聊城文化之骄傲。一座名城的历史，仿佛一条有生命的河流，其所蕴涵之人文精神，势必造就一批又一批的贤良才俊。时至今日，薪传文化，弘扬传统，谁堪担当？

始建于 20 世纪 70 年代的聊城大学，其前身为山东师范学院聊城分院。80 年代初，独立为聊城师范学院；新世纪伊始，更名为聊城大学。学校历经 30 多年风雨洗礼，业已成为规模较大、颇具影响的省属综合性大学。作为鲁西最高学府，聊城大学上承历史，下启未来，其责任亦大矣！

放眼中外，大凡一高等学府兴盛壮大，皆须鼓励探索创新学术精神，积淀深厚学术底蕴。如今，学校内涵建设方兴未艾，学科建设蓬勃发展。为进一步推进学术进步，营造浓厚学术氛围，学校决定集中推介博士群体中涌现的优秀学术成果付梓面世。一则当代学苑再添新花；再则昭示聊城大学充满活力，后继有人。

文化学术，乃至民族精神，悉赖代代学人之勉力承传。那些“筚路蓝缕，以启山林”的开拓者和创新者，尤其值得尊重。愿聊城大学诸位学人，秉承历史文化之光，会通中西学术，为弘扬民族文化殚劳尽责！

聊城大学学术委员会

2008 年 1 月

## 前 言

广义逆的概念最早在 1903 年由 Fredholm 提出, 被称为“伪逆”. 随后, 大量的学者和专家在不同的领域从不同的方面分别对广义逆进行了大量的研究. 1920 年, Moore D 用投影的方法给出了广义逆的定义. 1955 年, Penrose 用四个矩阵方程, 以非常简洁直观的方法给出了广义逆的等价定义. 从那以后, 广义逆的理论研究以及在统计学、线性规划、最小二乘问题等领域的应用得到迅猛发展.

作者长期从事广义逆问题的研究, 发现奇异值分解是处理广义逆问题的一个强有力的工具. 本书详细地介绍了各种类型的奇异值分解, 并给出了其在广义逆领域的一些应用. 内容编排如下: 第 1 章讲述线性代数和数值代数的基本知识; 第 2 章讨论各种类型的奇异值分解; 第 3 章讨论广义逆的反序律问题; 第 4 章讨论加边矩阵广义逆的结构和性质问题; 第 5 章讨论分块矩阵的块独立性问题; 第 6 章讨论几种加权 MP 逆的结构、唯一性以及等价性; 第 7 章讨论使用奇异值分解的方法解矩阵方程的问题.

研究广义逆问题的文献非常丰富, 本书不可能列出所有的参考文献, 因此对于做了很多这方面工作的参考文献的作者表示谢意.

作者在编写本书时, 得到蒋尔雄教授、王国荣教授、黄廷祝教授、孟广武教授、赵建立教授的热情鼓励和支持, 他们提出了很多建设性的建议, 作者在此深表谢意.

本书的编写和出版得到国家自然科学基金 (编号: 10771073)、电子科技大学博士后基金以及聊城大学的支持. 没有这些大力支持, 本书的出版是不可能的.

编写本书时, 作者的家人毫无怨言地全力支持, 使得作者可以全身心地投入到本书的编写中. 没有他们的支持, 本书的编写不可能顺利完成.

最后, 在本书出版之际, 作者郭文彬对导师魏木生教授多年来的谆谆教诲、指导、关心和帮助表示诚挚的谢意.

由于作者水平的限制, 书中难免有错误和不妥之处, 希望读者能及时指出, 便于以后纠正.

郭文彬

2008 年 2 月

## 符 号 表

- $\mathbf{C}^{m \times n}$ : 所有  $m \times n$  复元素矩阵的全体
- $\mathbf{R}^{m \times n}$ : 所有  $m \times n$  实元素矩阵的全体
- $\mathbf{C}_r^{m \times n}$ :  $\mathbf{C}^{m \times n}$  中所有秩为  $r$  的矩阵的全体
- $\mathbf{C}^n$ : 所有复  $n$  维列向量的全体 (即  $\mathbf{C}^{n \times 1}$ )
- $\mathbf{R}^n$ : 所有实  $n$  维列向量的全体 (即  $\mathbf{R}^{n \times 1}$ )
- $\mathbf{C}$ : 所有复数的全体 (即  $\mathbf{C}^1$ )
- $\mathbf{R}$ : 所有实数的全体 (即  $\mathbf{R}^1$ )
- $\mathbf{R}_0$ : 所有非负实数的全体
- $\mathcal{U}_n$ : 所有  $n \times n$  酉矩阵的全体
- $\bar{A}$ : 矩阵  $A$  的共轭
- $A^T$ : 矩阵  $A$  的转置
- $A^H$ : 矩阵  $A$  的共轭转置 (即  $\overline{A^T}$ )
- $A^{-1}$ : 矩阵  $A$  的逆
- $A^\dagger$ : 矩阵  $A$  的 MP 逆 (即  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆)
- $A > 0$ : 指矩阵  $A$  是正定的 Hermite 矩阵
- $A \geq 0$ : 指矩阵  $A$  是半正定的 Hermite 矩阵
- $I_n$ :  $n \times n$  单位矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为  $I$
- $0_{m \times n}$ :  $m \times n$  零矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为  $0$ ;  $0_m$  为  $m$  阶零向量
- $0_+$ : 零矩阵或空矩阵
- $\mathcal{R}(A)$ : 由矩阵  $A$  的所有列向量所张成的子空间
- $\text{span}(u_1, \dots, u_i)$ : 表示由  $u_1, \dots, u_i$  张成的子空间
- $\mathcal{N}(A)$ : 矩阵  $A$  的零空间
- $P_{\mathcal{R}(A)}$ : 到  $\mathcal{R}(A)$  上的正交投影算子
- $\det(A)$ : 矩阵  $A$  的行列式
- $\text{rank}(A)$ : 矩阵  $A$  的秩
- $\text{tr}(A)$ : 矩阵  $A$  的迹

- $\rho(A)$ : 矩阵  $A$  的谱半径
- $\lambda(A)$ : 矩阵  $A$  的所有特征值全体
- $\sigma(A)$ : 矩阵  $A$  的所有奇异值的全体
- $\sigma_+(A)$ : 矩阵  $A$  的所有正奇异值的全体
- $\sigma_{\max}(A)$ : 矩阵  $A$  的最大奇异值
- $\sigma_{\min}(A)$ : 矩阵  $A$  的最小奇异值
- $\sigma_{\min+}(A)$ : 矩阵  $A$  的最小正奇异值
- $\|x\|_2$ : 向量  $x$  的 Euclid 长度
- $\|A\|_2$ : 矩阵  $A$  的谱范数
- $\|A\|_F$ : 矩阵  $A$  的 Frobenius 范数
- $A \geq B$ : 表示同阶矩阵  $A$  和  $B$  的每个元素满足  $a_{ij} \geq b_{ij}$
- $\in$ : 元素属于
- $\subseteq$ : 集合含于
- $\cup$ : 集合的并
- $\cap$ : 集合的交
- $\emptyset$ : 空集
- $\Leftrightarrow$ : 等价
- $\Rightarrow$ : 蕴涵

# 目 录

出版说明

前言

符号表

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 第 1 章 预备知识 .....                                              | 1  |
| 1.1 引言 .....                                                  | 1  |
| 1.2 特征值和特征向量 .....                                            | 4  |
| 1.3 广义逆 .....                                                 | 6  |
| 1.3.1 MP 逆 .....                                              | 6  |
| 1.3.2 其他广义逆 .....                                             | 10 |
| 1.4 $AA^+$ 和 $A^+A$ 的几何意义 .....                               | 12 |
| 第 2 章 奇异值分解 .....                                             | 14 |
| 2.1 奇异值分解 .....                                               | 14 |
| 2.2 CS 分解 .....                                               | 15 |
| 2.3 商奇异值分解 .....                                              | 17 |
| 2.4 积奇异值分解 .....                                              | 18 |
| 2.5 标准相关分解 .....                                              | 22 |
| 2.6 G-SVD .....                                               | 24 |
| 第 3 章 反序律 .....                                               | 26 |
| 3.1 概况 .....                                                  | 26 |
| 3.2 关于 $\{1\}$ 逆的反序律 .....                                    | 26 |
| 3.2.1 $B\{1\}A\{1\} \subseteq (AB)\{1\}$ 的等价性条件 .....         | 28 |
| 3.2.2 $(AB)\{1\} \subseteq B\{1\}A\{1\}$ 的等价性条件 .....         | 28 |
| 3.2.3 $(AB)\{1\} = B\{1\}A\{1\}$ 的等价性条件 .....                 | 29 |
| 3.3 关于 $\{1, 2\}$ 逆的反序律 .....                                 | 30 |
| 3.3.1 $B\{1, 2\}A\{1, 2\} \subseteq (AB)\{1, 2\}$ 的充要条件 ..... | 30 |
| 3.3.2 $(AB)\{1, 2\} \subseteq B\{1, 2\}A\{1, 2\}$ 的充要条件 ..... | 33 |
| 3.3.3 $(AB)\{1, 2\} = B\{1, 2\}A\{1, 2\}$ 的充要条件 .....         | 33 |
| 3.4 关于 $\{1, 3\}$ 和 $\{1, 4\}$ 逆的反序律 .....                    | 34 |
| 3.4.1 P-SVD .....                                             | 34 |
| 3.4.2 $A^{(1,3)}, B^{(1,3)}$ 和 $(AB)^{(1,3)}$ 的结构形式 .....     | 38 |

|       |                                                                                         |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4.3 | $B\{1,3\}A\{1,3\} \subseteq (AB)\{1,3\}$ 的充分和必要条件                                       | 41  |
| 3.4.4 | $(AB)\{1,3\} \subseteq B\{1,3\}A\{1,3\}$ 的充分和必要条件                                       | 42  |
| 3.4.5 | $(AB)\{1,3\} = B\{1,3\}A\{1,3\}$ 的充分和必要条件                                               | 44  |
| 3.4.6 | $(AB)\{1,4\} = B\{1,4\}A\{1,4\}$ 的充分和必要条件                                               | 45  |
| 3.5   | 多个矩阵乘积广义逆的反序律                                                                           | 47  |
| 3.5.1 | 多个矩阵的 P-SVD                                                                             | 47  |
| 3.5.2 | $A^{(n)}\{1\} \cdots A^{(1)}\{1\} \subseteq (A^{(1)} \cdots A^{(n)})\{1\}$ 的等价性条件       | 48  |
| 3.5.3 | $A^{(n)}\{1,2\} \cdots A^{(1)}\{1,2\} \subseteq (A^{(1)} \cdots A^{(n)})\{1,2\}$ 的等价性条件 | 51  |
| 第 4 章 | 加边矩阵的广义逆                                                                                | 53  |
| 4.1   | QQ-SVD                                                                                  | 54  |
| 4.2   | $M$ 的 $\{1\}$ 逆                                                                         | 60  |
| 4.2.1 | $M$ 的 $\{1\}$ 逆的结构形式                                                                    | 61  |
| 4.2.2 | $M^-$ 中 $D_4^-$ 的性质                                                                     | 64  |
| 4.2.3 | $M^-$ 中 $D_1^-$ 的性质                                                                     | 67  |
| 4.3   | $M$ 的自反广义逆 $M\{1,2\}$                                                                   | 68  |
| 4.3.1 | $M$ 的自反广义逆 $M\{1,2\}$ 的结构形式                                                             | 72  |
| 4.3.2 | $M\{1,2\}$ 中 $D_1^{(12)}, D_2^{(12)}, D_3^{(12)}, D_4^{(12)}$ 之间的关系                     | 75  |
| 4.3.3 | $K$ 和 $M\{1,2\}$ 之间的关系                                                                  | 78  |
| 4.4   | $M$ 的 $\{1,3\}$ 逆和 $\{1,4\}$ 逆                                                          | 81  |
| 4.4.1 | QQ-SVD                                                                                  | 81  |
| 4.4.2 | $M$ 的 $\{1,3\}$ 逆的结构形式                                                                  | 89  |
| 4.4.3 | $M\{1,4\}$ 的结构形式                                                                        | 94  |
| 4.4.4 | $M^\dagger$ 的结构形式                                                                       | 95  |
| 4.4.5 | $M\{1,3\}$ 中各子矩阵的性质                                                                     | 97  |
| 4.4.6 | $A\{1,3\}, B\{1,3\}, C\{1,3\}$ 与 $M\{1,3\}$ 中各子矩阵的关系                                    | 99  |
| 第 5 章 | 分块矩阵的块独立性                                                                               | 105 |
| 5.1   | 分块矩阵的块独立的定义                                                                             | 105 |
| 5.2   | 分块矩阵关于 $\{1\}$ 逆的块独立性                                                                   | 109 |
| 5.2.1 | 两个 $m \times n$ 的复矩阵块独立的充要条件                                                            | 109 |
| 5.2.2 | 三个复矩阵的关于 $\{1\}$ 逆的块独立性                                                                 | 111 |
| 5.3   | 分块矩阵关于 $\{1,3\}$ 逆的块独立性                                                                 | 113 |
| 5.3.1 | 两个矩阵 $\{1,3\}$ 逆和 $\{1,4\}$ 逆的块独立性                                                      | 113 |
| 5.3.2 | 三个矩阵 $\{1,3\}$ 逆的块独立性                                                                   | 117 |
| 第 6 章 | 矩阵加权广义逆的结构                                                                              | 120 |
| 6.1   | 矩阵加权广义逆                                                                                 | 120 |

---

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 6.2 $n$ 类特殊的矩阵加权广义逆 .....       | 121        |
| 6.2.1 关于 $S_1$ .....            | 122        |
| 6.2.2 关于 $S_2$ .....            | 127        |
| 6.2.3 关于 $S_3$ .....            | 128        |
| <b>第 7 章 求解矩阵方程</b> .....       | <b>130</b> |
| 7.1 解矩阵方程 $AX + YA = C$ .....   | 130        |
| 7.2 解矩阵方程 $AXB + CYD = F$ ..... | 134        |
| <b>参考文献</b> .....               | <b>137</b> |

# 第1章 预备知识

## 1.1 引言

矩阵理论在数值计算、线性规划、数据分析、科学试验、信号传输等重大领域有着极其广泛的应用. 随着科技日新月异地进步, 人类社会开始步入信息化、数字化时代, 矩阵在生产实践中的应用越来越广泛, 矩阵理论的研究也就越来越重要.

在生产实践和科学试验中, 人们经常碰到一类线性系统

$$Ax = b,$$

其中,

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^m. \quad (1.1.1)$$

如果  $b \in \mathcal{R}(A)$ , 即系统相容, 则系统 (1.1.1) 一定有解. 特别地, 如果  $m = n$  且  $A$  可逆, 则系统的解为

$$x = A^{-1}b.$$

但在实际中,  $b \notin \mathcal{R}(A)$  的情况更为常见. 此时系统不相容, 没有一个  $x \in \mathbb{C}^n$  能使方程精确相等. 因此在实际应用中, 要找一个  $x \in \mathbb{C}^n$ , 使得  $Ax$  尽可能地逼近  $b$ . 如何去找这样的  $x$ ? 为了解决这一问题, 数学家们做了大量的工作. 高斯最先引入了最小二乘法, 并从统计方面证明它的合理性. 所谓最小二乘, 就是找出一个  $x \in \mathbb{C}^n$ , 使得系统的残差  $r = b - Ax$  的 2 范数最小, 即  $\min_{x \in \mathbb{C}^n} \|r\|_2$ . 如何计算最小二乘问题, 成了一个重要的课题. 但人们总是希望能像  $A$  可逆时那样显式地写出其解  $x$  的表达式. 广义逆应运而生, 并最终解决了这一问题. 1920 年, Moore 在《美国数学会通报》上以摘要的形式首先给出了任意矩阵广义逆的如下定义: 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 则满足

$$AG = P_{\mathcal{R}(A)}, \quad GA = P_{\mathcal{R}(G)} \quad (1.1.2)$$

的矩阵  $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$  称为  $A$  的广义逆矩阵, 记作  $A^\dagger$ , 其中,  $P_{\mathcal{R}(A)}$  和  $P_{\mathcal{R}(G)}$  分别是  $\mathcal{R}(A)$  和  $\mathcal{R}(G)$  上的直交投影算子. 1955 年, Penrose 在英国《剑桥哲学学会学报》上发表的《广义逆矩阵》论文以非常简单、直观的形式叙述了广义逆矩阵  $A^\dagger$  满足的 4 个条件 (也称为 Penrose 条件): 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 则满足

$$\begin{aligned} (1) \quad &AGA = A, & (2) \quad &GAG = G, \\ (3) \quad &(AG)^H = AG, & (4) \quad &(GA)^H = GA \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

的矩阵  $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$  称为  $A$  的广义逆矩阵, 记作  $A^\dagger$ . 可以证明, 以上两个广义逆的定义是等价的, 参见文献 [1]. 上面定义的这种广义逆  $A^\dagger$ , 通常称为 Moore-Penrose

广义逆, 简记为 MP 逆. 在 MP 逆的基础上又衍生其他许多类型的广义逆. 设  $\emptyset \neq \eta \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ , 则所有满足  $\eta$  中条件的矩阵集称为  $A$  的  $\eta$  逆, 其中,  $A$  的  $\{1\}$  逆通常称为  $A$  的广义逆或 g 逆, 记作  $A^-$  或  $A^{(1)}$ ;  $A$  的  $\{1, 2\}$  逆通常称为  $A$  的自反广义逆, 记作  $A_r^-$  或  $A^{(1,2)}$ ;  $A$  的  $\{1, 3\}$  逆通常称为  $A$  的最小二乘广义逆, 记作  $A_l^-$  或  $A^{(1,3)}$ ;  $A$  的  $\{1, 4\}$  逆通常称为  $A$  的极小范数广义逆, 记作  $A_m^-$  或  $A^{(1,4)}$ . 随着广义逆研究的不断深入, 又产生了诸如群逆、加权广义逆、Boot-Duffin 逆、Drazin 逆等其他广义逆. 广义逆甚至被引入无限维空间, 如 Banach 空间. 陈果良教授在无限维 Banach 空间的算子广义逆方面做了许多工作. 近几十年来, 国内许多知名学者, 如陈永林教授、孙文瑜教授、王国荣教授、魏益民教授、田永革教授等, 在广义逆方面作了大量的研究, 在各种不同的刊物上发表了大量论文, 出版了有关专著.

Penrose 条件的给出, 为广义逆矩阵的研究开辟了崭新的道路, 使得广义逆理论的研究获得蓬勃的发展, 深入到数学的各个领域, 扮演着极其重要的作用. 首先广义逆彻底地解决了有关系统 (1.1.1) 的解的问题. 由广义逆理论, 系统 (1.1.1) 相容的充要条件是对某个  $A^-$ , 有

$$AA^-b = b.$$

这时, 系统 (1.1.1) 的通解为

$$\begin{aligned} x &= A^-b + (I - A^-A)z, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \\ &= x_0 + \mathcal{R}(I - A^-A) \\ &= x_0 + \mathcal{N}(A), \quad x_0 \text{ 为式 (1.1.1) 的某个特解.} \end{aligned}$$

当系统 (1.1.1) 不相容时, 它的最小二乘解为

$$\begin{aligned} x &= Gb, \\ &= A_l^-b + (I - A^-A)z, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad G \text{ 为 } A \text{ 的一个 } \{1,3\} \text{ 逆,} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

其中, 唯一的极小范数最小二乘解为

$$x = A^\dagger b.$$

在考虑非线性方程组

$$f(x) = 0, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

时, 人们常用牛顿迭代法, 即

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1}f(x_k).$$

如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 或者其导数  $f'(x_k)$  是奇异的, 那么牛顿迭代法便不能应用. 1966 年, Ben-Israel 提出了广义牛顿迭代法 (也称为 Ben-Israel 迭代), 即用  $f'(x_k)$  的某个  $\{2\}$  逆去代替  $(f'(x_k))^{-1}$ , 上述的迭代格式就依然成立. 式 (1.1.4) 给出了没

有约束条件 (1.1.1) 的最小二乘解, 但在实践中经常碰到的是具有约束条件的最小二乘问题. 例如,

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2 \quad \text{且使得 } Cx = d,$$

其中,  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{C}^m$ ,  $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ ,  $d \in \mathbb{C}^p$ . 由广义逆理论知道其解集为

$$M = \{(AE)^\dagger(b - AC^\dagger d) + C^\dagger d + (I - (AE)^\dagger A)\xi \mid \xi \in \mathcal{N}(C)\},$$

其中,

$$E = I - C^\dagger C \quad \text{且} \quad \min_{x \in \varphi} \|Ax - b\|_2 = \|(I - A(AE)^\dagger)(AC^\dagger d - b)\|_2, \\ \varphi = \{x \mid x = C^\dagger d + \mathcal{N}(C)\}.$$

魏木生教授运用矩阵分解的方法和广义逆理论, 在加权等式约束和亏秩最小二乘等方面做了大量工作, 发表了一系列极有影响的论文, 参见文献 [2~4].

Hurt 和 Waid 在文献 [5] 中, 运用  $\{1, 2\}$  逆研究了线性系统积分解的有关性质:

设  $A, B, D$  是可积的矩阵, 并且矩阵方程  $AXB = D$  相容, 则该系统有积分解当且仅当

$$A^{(1,2)}DB^{(1,2)}$$

可积, 其通解为

$$X = A^{(1,2)}DB^{(1,2)} + Y - A^{(1,2)}AYBB^{(1,2)},$$

其中,  $Y$  是具有适当维数的任意矩阵.

在考虑区间线性规划问题

$$\max\{C^T x : a < Ax < b\} \quad (1.1.5)$$

(其中,  $a, b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ) 时, 广义逆理论也有着重要的应用. 事实上, 若式 (1.1.5) 可行和有界, 则由广义逆理论, 式 (1.1.5) 的最优解为

$$x_0 = A^-P_{\mathcal{R}(A),S} \eta(a, b, (A^-P_{\mathcal{R}(A),S})^T C) + y, \quad y \in \mathcal{N}(A),$$

其中,  $P_{\mathcal{R}(A),S}$  是投影矩阵,  $S$  是与  $\mathcal{R}(A)$  互补的子空间且  $\eta(u, v, w) = (\eta_i)_m$ ,

$$\eta_i = \begin{cases} u_i, & w_i < 0, \\ v_i, & w_i > 0, \\ \lambda_i u_i + (1 - \lambda_i) v_i, & 0 < \lambda_i < 1, \quad w_i = 0. \end{cases}$$

当然广义逆的应用远不止于此, 如在二次规划、可分变量的非线性最小二乘问题、奇异情形的最大似然估计、线性估计等领域都有着广泛的应用.

## 1.2 特征值和特征向量

本节列举矩阵代数的几条熟知的定义和结论.

**定义 1.2.1** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 如果存在  $\lambda \in \mathbb{C}$  和非零向量  $x \in \mathbb{C}^n$ , 使得  $Ax = \lambda x$ , 则  $\lambda$  称为  $A$  的特征值,  $x$  称为  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量.

$A$  的所有特征值的全体, 称为  $A$  的谱 (spectrum), 记为  $\lambda(A)$ .

据定义 1.2.1,  $\lambda \in \lambda(A)$  的必要和充分条件是

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (1.2.1)$$

$p(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A)$  称为  $A$  的特征多项式. 如果  $A$  有  $r$  个不同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , 其重数分别为  $n(\lambda_1), \dots, n(\lambda_r)$ , 则

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n(\lambda_i)}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j), \quad (1.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^r n(\lambda_i) = n,$$

其中,  $n(\lambda_i)$  称为  $\lambda_i$  的代数重数. 如果

$$\text{rank}(\lambda_i I - A) = n - m(\lambda_i), \quad (1.2.3)$$

则  $m(\lambda_i)$  称为  $\lambda_i$  的几何重数, 它表示  $A$  的属于  $\lambda_i$  的线性无关特征向量的个数. 显然有

$$1 \leq m(\lambda_i) \leq n(\lambda_i) \leq n.$$

**定理 1.2.1** (Jordan 分解) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  有  $r$  个不同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , 其代数重数分别为  $n(\lambda_1), \dots, n(\lambda_r)$ . 则必存在非奇异矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}AP = J \equiv \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_r(\lambda_r)), \quad (1.2.4)$$

其中,  $1 \leq i \leq r$ ,

$$J_i(\lambda_i) = \text{diag}(J_i^{(1)}(\lambda_i), \dots, J_i^{(k_i)}(\lambda_i)) \in \mathbb{C}^{n(\lambda_i) \times n(\lambda_i)}, \quad (1.2.5)$$

$$J_i^{(k)}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k(\lambda_i) \times n_k(\lambda_i)}, \quad 1 \leq k \leq k_i, \quad (1.2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{k_i} n_k(\lambda_i) = n(\lambda_i), \quad 1 \leq i \leq r,$$

并且除了  $J_i^{(k)}(\lambda_i) (1 \leq k \leq k_i, 1 \leq i \leq r)$  的编排次序可以改变外,  $J$  是唯一确定的.

式 (1.2.6) 所示的每个矩阵  $J_i^{(k)}(\lambda_i) (1 \leq k \leq k_i, 1 \leq i \leq r)$  称为 Jordan 块; 式 (1.2.4) 中的矩阵  $J$  称为  $A$  的 Jordan 标准型.

定理 1.2.1 是矩阵论的基本结果之一, 它的证明可以在普通的线性代数教程中找到.

**定义 1.2.2** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 如果存在非奇异矩阵  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 使得

$$Q^{-1}AQ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (1.2.7)$$

则  $A$  称为可对角化矩阵 (又称单构矩阵, 或者可正规化矩阵).

易知下面 5 种叙述互相等价:

- (1)  $A$  是可对角化矩阵,
- (2)  $\mathbb{C}^n$  中存在由  $A$  的特征向量构成的一组基底,
- (3)  $A$  的初等因子都是线性的,
- (4)  $A$  的 Jordan 标准形中的 Jordan 块都是 1 阶的,
- (5)  $m(\lambda_i) = n(\lambda_i), \forall \lambda_i \in \lambda(A)$ .

**定义 1.2.3** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 如果  $AA^H = A^HA$ , 则称  $A$  为正规矩阵; 如果  $A^H = A$ , 则称  $A$  为 Hermite 矩阵; 如果  $A^T = \bar{A} = A$ , 则称  $A$  为实对称矩阵; 如果  $A^HA = I$ , 则称  $A$  为酉矩阵; 如果  $A^TA = I$  并且  $\bar{A} = A$ , 则称  $A$  为实正交矩阵.

下面的定理 1.2.2 是熟知的.

**定理 1.2.2 (Schur 分解定理)** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 则存在酉矩阵  $U \in \mathcal{U}_n$ , 使得

$$U^HAU = T, \quad (1.2.8)$$

其中,  $T$  是上三角阵; 而且适当选取  $U$ , 可使  $T$  的对角线元素按任一指定顺序排列.

**证明** 对  $n$  用归纳法. 当  $n = 1$  时显然成立. 设  $1 \leq n \leq k$  时也成立. 当  $n = k + 1$  时, 选择  $\lambda \in \lambda(A)$ ,  $x \in \mathbb{C}^{k+1}$  是相应的单位特征向量,  $x^Hx = 1$ . 令矩阵  $\tilde{U} = (x, U_1) \in \mathcal{U}_{k+1}$ , 于是有  $U_1^Hx = 0$ , 并且

$$\tilde{U}^H A \tilde{U} = \begin{pmatrix} x^H A x & x^H A U_1 \\ U_1^H A x & U_1^H A U_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda & x^H A U_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

根据归纳法假设, 存在  $\hat{U} \in \mathcal{U}_k$ , 使得

$$\hat{U}^H A_1 \hat{U} = T_1,$$

其中,  $T_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$  是上三角矩阵. 令  $U = \tilde{U} \text{diag}(1, \hat{U})$ ,  $T = \begin{pmatrix} \lambda & x^H A U_1 \hat{U} \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ , 则  $T$  和  $U$  满足  $U^H A U = T$ . 于是结论对所有的  $n$  成立.  $\square$

式 (1.2.8) 右端的  $T$  称为  $A$  的 Schur 上三角形式, 可记为

$$T = A + M, \quad A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

其中,  $M$  为严格上三角矩阵 (即对角线元素为零的上三角矩阵).

从定理 1.2.2 可得如下推论.

**推论 1.2.1** 下列结论成立:

(1)  $A$  是正规矩阵  $\Leftrightarrow$  存在酉矩阵  $U$ , 使得

$$U^H A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

即  $\mathbb{C}^n$  存在由  $A$  的特征向量构成的标准正交基,

(2)  $A$  是 Hermite 矩阵  $\Leftrightarrow A$  是正规矩阵, 并且  $\lambda(A) \subseteq \mathbb{R}$ ,

(3)  $A$  是酉矩阵  $\Leftrightarrow A$  是正规矩阵, 并且

$$\lambda(A) \subseteq \varphi \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

同理, 可得实对称矩阵和实正交矩阵的类似结论.

**定义 1.2.4** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是 Hermite 矩阵. 如果

$$\begin{aligned} x^H A x &> 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0 \\ (\text{或 } x^H A x &\geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

则  $A$  称为正定 (或半正定) 矩阵.

以下用  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) 表示  $A$  是正定 (半正定) 矩阵.

设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为 Hermite 矩阵. 容易验证下面的 5 种叙述是互相等价的:

- (1)  $A$  是正定 (半正定) 矩阵,
- (2)  $A$  的每个特征值  $> 0$  ( $\geq 0$ ),
- (3)  $A$  的每个主子阵都是正定 (半正定) 矩阵,
- (4)  $A$  的每个主子式 (即主子阵的行列式)  $> 0$  ( $\geq 0$ ),
- (5) 对任一  $n \times n$  非奇异矩阵  $Q$ ,  $Q^H A Q$  是正定 (半正定) 矩阵.

## 1.3 广 义 逆

### 1.3.1 MP 逆

设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 如果  $A$  是非奇异矩阵, 则  $A$  存在唯一的逆矩阵  $X$ , 满足

$$AX = XA = I_n.$$

$A$  的逆矩阵  $X$  记作  $A^{-1}$ . 如果方程组  $Ax = b$  的系数矩阵  $A$  是非奇异阵, 则该方程组存在唯一解  $x = A^{-1}b$ .

但是, 如果矩阵  $A$  是奇异方阵或者是长方阵, 这时矩阵  $A$  的逆矩阵不存在. 在这种情形下, 如何定义  $A$  的某种逆?

广义逆矩阵的概念最早是由 Fredholm 在 1903 年提出的, 随后 Moore 于 1920 年<sup>[6]</sup>以摘要的形式给出了如下任意矩阵广义逆的定义. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  满足

$$AX = P_{\mathcal{R}(A)}, \quad XA = P_{\mathcal{R}(X)}, \quad (1.3.1)$$

则  $X$  称为  $A$  的广义逆矩阵, 记为  $A^\dagger$ , 其中,  $P_{\mathcal{R}(A)}$  和  $P_{\mathcal{R}(X)}$  分别是  $\mathcal{R}(A)$  和  $\mathcal{R}(X)$  上的正交投影算子.

Penrose 于 1955 年<sup>[7]</sup>利用 4 个矩阵方程, 以非常简单、直观的形式给出了广义逆矩阵的定义. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , 满足

$$\begin{aligned} (1) \quad AXA &= A, & (2) \quad XAX &= X, \\ (3) \quad (AX)^H &= AX, & (4) \quad (XA)^H &= XA. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

可以证明, 以上两个广义逆矩阵的定义是等价的, 广义逆矩阵是存在并唯一的.

**定理 1.3.1** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . 则方程组 (1.3.2) 存在唯一解  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .

**证明** 唯一性. 假设方程组 (1.3.2) 有两个解  $X, Y$ , 则有

$$\begin{aligned} Y &= YAY && (\text{由式(1.3.2) - (2)}) \\ &= A^H Y^H Y && (\text{由式(1.3.2) - (4)}) \\ &= (AXA)^H Y^H Y && (\text{由式(1.3.2) - (1)}) \\ &= (XA)^H (YA)^H Y \\ &= XAY && (\text{由式(1.3.2) - (4), 式(1.3.2) - (1)}) \\ &= XAXAY && (\text{由式(1.3.2) - (2)}) \\ &= XX^H A^H Y^H A^H && (\text{由式(1.3.2) - (3)}) \\ &= XX^H A^H && (\text{由式(1.3.2) - (1)}) \\ &= XAX && (\text{由式(1.3.2) - (3)}) \\ &= X. && (\text{由式(1.3.2) - (2)}) \end{aligned}$$

存在性. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的奇异值分解为  $A = U \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H$ , 其中,  $U$  和  $V$  为酉矩阵,  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) > 0$ . 令

$$X = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H.$$

容易验证,  $X$  满足式 (1.3.2) 中所有 4 个方程. □