西安交通大學

研究生创新教育系列教材

广义函数和Sobolev空间

李开泰 马逸尘 王立周

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學

研究生创新教育系列教材

广义函数和Sobolev空间

李开泰 马逸尘 王立周

西安交通大学出版社

·西 安·

内容简介

本书内容为广义函数和 Sobolev 空间两部分。

广义函数包括三类广义函数的定义、性质、结构和相互关系；广义函数的卷积和 Fourier 变换等。Sobolev 空间主要讨论整数阶 Sobolev 空间、实数阶 Sobolev 空间、迹空间，以及在电磁场、连续介质力学中很有用的向量值 Sobolev 空间。

本书内容丰富，结构紧凑。可作为高等院校计算数学、应用数学、计算物理以及计算力学等专业研究生教材，也可作为有关专业的高年级大学生、研究生、大学教师和科技工作者教学和科研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

广义函数和 Sobolev 空间/李开泰，马逸尘，王立周著. 一西安：西安交通大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-5605-2766-6

Ⅰ.广… Ⅱ.①李…②马…③王… Ⅲ.①广义函数②函数空间 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 055114 号

书　　名　广义函数和 Sobolev 空间
编　　著　李开泰　马逸尘　王立周
责任编辑　叶涛　邹林

出版发行　西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张** 11.625　**字数** 207 千字
版次印次　2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-2766-6/O·277
定　　价　21.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy31@126.com

总　序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法，把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式，把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，有许多艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前　言

数学物理方程理论是数学科学中最为活跃的分支之一，它不但是很大一部分数学内容的基础，而且也是很大一部分物理内容的基础，它有助于人们对物质运动规律的认识。自然科学基本规律的精确数学表达式大都是微分方程，如 Newton 运动方程，Euler 方程，Navier-Stokes 方程，Maxwell 方程，Boltzmann 方程以及 Schrödinger 方程等。这些基本方程及其派生出来的方程几乎覆盖了一切科学工程领域，现代大型科学工程计算的主要任务，也是用现代大型计算机求解这些方程。

数学物理方程理论发展到今天，经典的和现代的互相渗透，形成内容十分丰富的学科。如何使应用数学、计算数学、物理和力学专业的研究生在较短的时间内，尽快地了解如此庞大理论体系中的主要方法和结论，以便结合数学和自然科学的各个分支，使它们互相渗透，有所创新。培养和训练研究生的这种能力，是近代科学综合发展趋势的要求，也是培养新一代科学工作者必不可少的环节。

从一个庞大的理论体系中选取一定的材料，使它不仅要包含原体系的主要结果和方法，还要自成体系、满足作为一本教材的种种要求，这不能不说是一件非常困难的事情。但我们仍需探索，努力做好，这是教师的责任。

本书包括广义函数和 Sobolev 空间，主要阐述广义函数和 Sobolev 空间的概念和基本性质，尤其是一些有重要应用的向量值函数 Sobolev 空间性质。还讨论了在弹性力学、流体力学、电磁场和量子力学中的应用。

第 1 章广义函数和 Fourier 变换。本章较系统地阐述了建立 Sobolev 空间的泛函基本知识。这样做为的是使学生从本科泛函分析课程中延续过来，起到承上启下的作用，使学生在一进入本课程时不致于太吃力。同时本章的讨论也为全书的展开打下了良好的基础。本章结构紧凑，各节的定义、定理及例子环环相扣，较简捷地处理了教材内容。

第 2 章 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$空间。本章内容虽然是经典的，但它是了解 Sobolev 空间所必需的。本章既介绍了 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$空间的主要内容，又强调了一些常用的基本方法，同时还适当地略去了那些与 Sobolev 空间关系不大的内容。

第 3 章整数阶 Sobolev 空间 $H^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$。本章恰当地处理了庞大而复杂的内容，如内插性质、延拓性质以及嵌入性质等，既阐明了基本方法，使学生对这

些性质的来龙去脉有个大致的了解，同时又不拘泥于琐碎的细节，繁简适当。

第 4 章实数阶 Sobolev 空间和迹空间。推广了整数阶 Sobolev 空间的性质，同时还讨论了若干向量值 Sobolev 空间，它们在弹性力学、流体力学和电磁场中有广泛应用。

这里我们应该特别感谢周天孝、黄艾香两位教授。他们仔细地阅读了全部书稿，提出了非常宝贵的意见，由于他们的努力，本书才能够以今天这样的面貌同读者见面。

自 1980 年以来，我们经过多年的教学探索和实践，多次修改，撰写成本书。在 19 年的教学实践基础上，我们反复对本书进行了补充、修改，以期能不断地完善。

由于作者水平所限，错误在所难免，热忱欢迎读者提出宝贵意见，谢谢！

作者

2008.4

符号说明

集　合

$\boldsymbol{\Omega}$	$\mathbf{R}^n$ 中一开集　1.1
$\forall x \in A$	表示对集合 A 中任意元素 x　1.1
$G \subset \boldsymbol{\Omega}$	G 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的子集合　1.1
$\overline{G}$	集合 G 的闭包　1.1
$G \subset\subset \boldsymbol{\Omega}$	$\overline{G} \subset \boldsymbol{\Omega}$ 且 $\overline{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集　1.1
$A \times B$	集合的笛卡儿乘积
$A + B$	$\{x + y: x \in A, y \in B\}$　1.7
$A \backslash B$	集合 B 在集合 A 中的补集　1.1
$\partial \boldsymbol{\Omega}$	集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 的边界　1.1
$\boldsymbol{n}$	集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 的边界 $\partial\boldsymbol{\Omega}$ 的单位法向量　4.4，4.5
$\boldsymbol{\tau}$	集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 的边界 $\partial\boldsymbol{\Omega}$ 的单位切向量　4.4，4.5
	L 型区域　3.2
	C^k 型区域　3.4

标　量

$\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	数域，实数域，复数域
$\mathbf{K}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$	n 维数域，n 维实数域，n 维复数域　1.1，1.9
$\mathbf{R}^n_+$	上半空间　3.5
$\mathbf{R}_e(z)$、$\mathbf{I}_m(z)$	复数 $z \in \mathbf{C}$ 的实部和虚部　1.9
sup	上确界
inf	下确界
ess sup，ess inf	本性极大，本性极小　1.2

函　数

$f: A \to B$	f 是由 A 到 B 的映射
$R(f)$	映射 f 的值域
$f(S)$	映射 f 作用集合 S 后所得的像

$f^{-1}(T)$	映射 f 的逆作用集合 T 所得的像
$\operatorname{supp} f$	映射 f 的支集　1.1
$f\mid_G$	映射 f 在 G 上的限制
$\overline{f}$	复映射 f 的共轭
$\operatorname{Ker}(f)$	映射 f 的核
u,v,w,φ,ψ	标量函数(映射)　1.2
$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}$	向量值函数(映射)　4.6
T_f	由 f 生成的广义函数 T　1.4

线性空间

$M\subset X$	M 是线性赋范空间 X 的子空间
X/M	商空间　3.7
$\mathscr{L}(X,Y)$	由线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 上的线性连续算子所组成的线性空间
X'	赋范空间 X 的对偶空间　2.3
(x,y) 或 $(x,y)_H$	内积空间 H 中的内积
$X=V_1\oplus V_2$	线性赋范空间 X 是其子空间 V_1,V_2 的直接和
$X\simeq Y$	赋范空间 X 和 Y 是等距同构　2.3
$\prod_{j=1}^{r}X_j$	线性赋范空间 $X_j(1\leqslant j\leqslant r)$ 组成的笛卡儿乘积空间　3.1，4.5
X^n	$X\times\cdots\times X$(n 个 X 的乘积空间)　4.6
$\mathbf{Z}_+^n$	n 重非负整数空间　1.1

函数空间

$C(\boldsymbol{\Omega})=C^0(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$ 上连续函数的全体　1.2
$C^m(\boldsymbol{\Omega})(0\leqslant m\leqslant\infty)$	函数及其直到 m 阶偏导数在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上连续的函数全体　1.2
$C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$	函数及其直到 m 阶偏导数在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上有界且一致连续的函数全体　1.2
$C_B^m(\boldsymbol{\Omega})$	函数及其直到 m 阶偏导数在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上有界且连续的函数全体　1.2
$C^{m,\lambda}(\boldsymbol{\Omega})$	$C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 中其偏导数 $\partial^\alpha f,0\leqslant\mid\alpha\mid\leqslant m$，在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中满足指数为 λ 的 Hölder 条件的函数全体

$C^m(I;V)$	区间 $I \subset R$ 到 V 上的 m 次连续可微抽象函数的全体	4.3
$C_o(\boldsymbol{\Omega})$	其紧支集为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的子集合的连续函数的全体	1.8
$C_o^\infty(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$ 上无穷次连续可微且其紧支集为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的子集合的函数全体	1.2
$C_o^\infty(\mathbf{R}^n,\boldsymbol{\Omega})$	$C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的限制的全体	1.2
$C_K^\infty(\boldsymbol{\Omega})$	$C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 中满足 $\operatorname{supp} f \subset K \subset \boldsymbol{\Omega}$ 的函数的全体	1.3
$D(\boldsymbol{\Omega})$	空间 $C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间	1.3
$D'(\boldsymbol{\Omega})$	$D(\boldsymbol{\Omega})$ 的拓扑对偶空间	1.4
$E(\boldsymbol{\Omega})$	$C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间	1.4
$E'(\boldsymbol{\Omega})$	$E(\boldsymbol{\Omega})$ 的拓扑对偶空间	1.4
$F^\gamma(I;V,H)$	$\{u \in L^2(I;V): \tau \to \lvert \tau \rvert^\gamma \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbf{R};H)\}$，其中 $I \subset \mathbf{R}$	4.7
$H^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$	$\{u \in C^m(\boldsymbol{\Omega}): \lVert u \rVert_{m,p,\boldsymbol{\Omega}} < \infty\}$ 关于范数 $\lVert \cdot \rVert_{m,p,\boldsymbol{\Omega}}$ 的完备化所得的空间	3.1
$H_0^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$	见 $W_0^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$	
$H^{-m,p'}(\boldsymbol{\Omega})$	$H_0^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$ 的对偶空间，其中 $1/p + 1/p' = 1$	3.3
$H^s(\mathbf{R}^n)(s \in \mathbf{R})$	$\mathbf{R}^n$ 上的实数阶 Sobolev 空间	4.1
$H^s(\boldsymbol{\Omega})(s \in \mathbf{R})$	$\boldsymbol{\Omega}$ 上实数阶 Sobolev 空间	4.5
$H^s(\partial\boldsymbol{\Omega})(s \in \mathbf{R})$	迹空间	3.5， 4.5
$H(\operatorname{div},\boldsymbol{\Omega})$	$\{\boldsymbol{v} \in L^2(\boldsymbol{\Omega})^n: \operatorname{div} \boldsymbol{v} \in L^2(\boldsymbol{\Omega})\}$	4.6
$H_0(\operatorname{div},\boldsymbol{\Omega})$	$D(\boldsymbol{\Omega})^n$ 在空间 $H(\operatorname{div},\boldsymbol{\Omega})$ 中的闭包	4.6
$H(\operatorname{curl},\boldsymbol{\Omega})$	$\{\boldsymbol{v} \in L^2(\boldsymbol{\Omega})^n: \operatorname{curl} \boldsymbol{v} \in L^2(\boldsymbol{\Omega})^n\}$	4.6
$H_0(\operatorname{curl},\boldsymbol{\Omega})$	$D(\boldsymbol{\Omega})^n$ 在空间 $H(\operatorname{curl},\boldsymbol{\Omega})$ 中的闭包	4.6
$L^1_{loc}(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$ 上局部可积函数的全体	1.4
$L^1_k(\boldsymbol{\Omega})$	紧支集在 $k \subset \boldsymbol{\Omega}$ 内可积函数全体	1.6
$L^p(\boldsymbol{\Omega})\ 1 \leqslant p < \infty$	满足 $\int_{\boldsymbol{\Omega}} \lvert u \rvert^p \mathrm{d}x < \infty$ 的可测函数全体	1.2，2.1
$L^\infty(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$ 中本性有界可测函数全体	1.2
$L^2_0(\boldsymbol{\Omega})$	$\{u \in L^2(\boldsymbol{\Omega}): \int_{\boldsymbol{\Omega}} u \mathrm{d}x = 0\}$	4.6

$L^p(I;X)$	由区间 $I\subset\mathbf{R}$ 到赋范空间 X 上且 $\|\cdot\|_X\in L^p(I)$ 的抽象函数的全体　4.3
$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$	$C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中在无穷远处急降函数全体　1.3
$S(\mathbf{R}^n)$	空间 $\tilde{S}(\mathbf{R})$ 赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间　1.3
$S'(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$ 的拓扑对偶空间　1.4
V	$\{\boldsymbol{u}\in H_0^1(\boldsymbol{\Omega})^n:\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\}$　4.6
V_0	$\{\boldsymbol{u}\in D(\boldsymbol{\Omega})^n:\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\}$　4.6
V^0	$\{\boldsymbol{f}\in H_0^{-1}(\boldsymbol{\Omega})^n:\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle=0,\forall\,\boldsymbol{v}\in V\}$　4.6
$W^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$	$\{u\in L^p(\boldsymbol{\Omega}):\partial^\alpha u\in L^p(\boldsymbol{\Omega}),0\leqslant\|\alpha\|\leqslant m$,其中 $\partial^\alpha u$ 是 α 阶弱导数$\}$　3.1
$W_0^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$	$C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,p,\boldsymbol{\Omega}}$ 下的闭包　3.1
$W^{-m,p'}(\boldsymbol{\Omega})$	$W_0^{m,p}(\boldsymbol{\Omega})$ 的对偶空间,其中 $1/p+1/p'=1$　3.3

算　子

$\rho.\gamma$ 或 $\rho.\gamma$	算子的复合　3.5，4.1
$\partial^\alpha(\alpha\in\mathbf{Z}_+^n)$	α 阶偏导数　1.1
$\partial_j(1\leqslant j\leqslant n)$	对 x_j 的偏导数
$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}},\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$,	法向导数　1.5，4.6
∇,grad	梯度算子　4.6
$\nabla\times$,curl	旋度算子　4.6
$\nabla\cdot$,div	散度算子　4.6
Δ	Laplace 算子
$J_\varepsilon(f)$	f 的磨光算子　1.8
δ,δ_n	Dirac 泛函　1.3
γ,γ_n	迹算子　3.5，4.6
γ_τ	4.6
$\gamma_j(0\leqslant j)$	j 阶迹算子　3.5

目　录

第 1 章　广义函数和 Fourier 变换

本章从连续函数空间入手，建立广义函数空间，并且研究广义函数的可导性、结构及其运算，包括卷积和 Fourier 变换，同时给出了用途很广的磨光算子、平均函数及单位分解定理.

1.1　记号和说明

$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中一个点，其内积和范数分别定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\quad |x|^2=(x,x),\quad \forall\, x,y\in\mathbf{R}^n$$

若 $x,y\in\mathbf{R}^n$，则点 x 和 y 之间的距离为

$$\operatorname{dist}(x,y)=|x-y|$$

若 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合，则点 $x\in\mathbf{R}^n$ 到 G 的距离为

$$\operatorname{dist}(x,G)=\inf_{y\in G}\operatorname{dist}(x,y)$$

若 G,H 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个集合，则集合 G 和 H 之间的距离为

$$\operatorname{dist}(G,H)=\inf_{x\in G}\operatorname{dist}(x,H)$$

若 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一开集，则称之为区域. 又如 $G\subset\mathbf{R}^n$，则用 $\bar{G}$ 表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包. 如 $\bar{G}\subset\boldsymbol{\Omega}$ 且 $\bar{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集（即有界闭集），则记为 $G\subset\subset\boldsymbol{\Omega}$. 如果 u 是定义在 G 上的函数，则集合 $\{x\in G: u(x)\neq 0\}$ 的闭包定义为 u 的支集，记为

$$\operatorname{supp}u=\overline{\{x\in G: u(x)\neq 0\}}$$

如果 $\operatorname{supp}u\subset\subset\boldsymbol{\Omega}$，则称 u 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中具有紧支集.

用 $\partial\boldsymbol{\Omega}$ 表示 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边界，即集合 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}\cap\boldsymbol{\Omega}^c$，其中 $\boldsymbol{\Omega}^c=\mathbf{R}^n\backslash\boldsymbol{\Omega}=\{x\in\mathbf{R}^n: x\notin\boldsymbol{\Omega}\}$ 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的补集.

设向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，它的每个分量都是非负整数，所有这些向量的集合，称为 n 重非负整数空间，记为 $\mathbf{Z}_+^n$，也称 α 为 n 重指标，若 $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_+^n$，则规定 $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$，$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$. 如果 $\alpha_j\leqslant\beta_j$，$j=1,2,\cdots,n$，则称 $\alpha\leqslant\beta$. 还有 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$. 而且如果 $\alpha\leqslant\beta$，则

$$\binom{\beta}{\alpha}=\frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}=\binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}$$

若 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$，则用 x^α 表示次数为 $|\alpha|$ 的单项式 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 类似地，对于 $1\leqslant j\leqslant n$，则

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n},\quad 其中\quad \partial_l=\frac{\partial}{\partial x_l}$$

表示阶数为 $|\alpha|$ 的导数，显然 $\partial^{(0,\cdots,0)}u=u$.

对于在 x 附近 $|\alpha|$ 次连续可导函数 u 和 v，容易证明 Leibniz 公式，

$$\partial^\alpha(uv)(x)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta u(x)\partial^{\alpha-\beta}v(x)$$

1.2　连续函数空间

设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集，$\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$，m 为非负整数.

集合 $C^m(\boldsymbol{\Omega})$ 是则定义在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上，并在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上连续且具有直到 m 阶连续的偏导数 $\partial^\alpha f(|\alpha|\leqslant m)$ 的函数 f 组成.

集合 $C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 是由 $C^m(\boldsymbol{\Omega})$ 中这样的函数 f 组成：f 及其直到 m 阶偏导数 $\partial^\alpha f(|\alpha|\leqslant m)$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上有界和一致连续. 如定义范数为

$$\|f\|_{C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\boldsymbol{\Omega}}|\partial^\alpha f(x)| \tag{1.2.1}$$

则 $C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 是 Banach 空间.

通常用 $C(\boldsymbol{\Omega})$ 表示 $C^0(\boldsymbol{\Omega})$，$C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 表示 $C^0(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$.

$C_B(\boldsymbol{\Omega})$ 是由定义在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的有界连续函数的全体组成. 类似地，可以定义 $C_B^m(\boldsymbol{\Omega})$. $C_B^m(\boldsymbol{\Omega})$ 是 Banach 空间，其范数的定义与 $C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 的相同.

如果 $0<\lambda\leqslant 1$，定义 $C^{m,\lambda}(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 是 $C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 的子空间，它由 $C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 中的这样的函数 f 组成：对于 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$\partial^\alpha f$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中满足指数为 λ 的 Hölder 条件，即存在常数 c，使得

$$|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|\leqslant c|x-y|^\lambda,\quad \forall x,y\in\boldsymbol{\Omega}$$

如定义范数为

$$\|f\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\boldsymbol{\Omega}})}=\|f\|_{C^m(\overline{\boldsymbol{\Omega}})}+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{\substack{x,y\in\boldsymbol{\Omega}\\ x\neq y}}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \tag{1.2.2}$$

则 $C^{m,\lambda}(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 是 Banach 空间，称之为指标为(m,λ) 的 Hölder 空间.

如果 $\boldsymbol{\Omega}$ 是有界区域，下面两个众所周知的定理为确定 $C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 的子集合的稠密性和紧性提供了有效的判别准则.

定理 1.2.1(Stone-Weierstrass 定理) 设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域. 如果 $C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 的子集合 A 满足:

(1) 如果 $f, g \in A$,且 $c \in \mathbf{K}$,$\mathbf{K}$ 为一数域. 则 $f+g$,fg 和 cf 都属于 A;

(2) 如果 $f \in A$,则 $\overline{f} \in A$,其中 $\overline{f}$ 是 f 的复共轭;

(3) 如果 $x, y \in \overline{\boldsymbol{\Omega}}$,$x \neq y$,则存在 $f \in A$,使得 $f(x) \neq f(y)$;

(4) 如果 $x \in \overline{\boldsymbol{\Omega}}$,则存在 $f \in A$,使得 $f(x) \neq 0$.

那么,A 在 $C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 中稠密.

推论 1.2.1(Weierstrass) 设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域,$f \in C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$,则对任意一个 $\varepsilon > 0$,存在一个多项式 $P(x)$ 满足:

$$\| f - P \|_{C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})} < \varepsilon$$

定理 1.2.2(Ascoli-Arzela 定理) 设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域,$C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 的子集合 A 在 $C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ 是准紧(相对紧)的,如果 A 满足:

(1) 存在常数 M,使得对一切 $f \in A$ 和 $x \in \boldsymbol{\Omega}$,$|f(x)| \leqslant M$;

(2) 对每个 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得 $\forall f \in A$,$x, y \in \boldsymbol{\Omega}$,都有当 $|x-y| < \delta$ 时,$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

令 $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m(\boldsymbol{\Omega})$,它是 $\boldsymbol{\Omega}$ 上无穷次连续可微函数的全体,$C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 中函数本身及其偏导数可能在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上无界. 类似地,可以定义 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$,把 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的限制所得的函数全体记为 $C^\infty(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{\Omega})$, 即

$$C^\infty(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{\Omega}) = \{u : u = v|_{\boldsymbol{\Omega}},\ v \in C^\infty(\mathbf{R}^n)\}$$

显然, $C^\infty(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{\Omega}) \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

定义
$$C_0(\boldsymbol{\Omega}) = \{f \in C(\boldsymbol{\Omega}) : \operatorname{supp} f \subset\subset \boldsymbol{\Omega}\}$$
$$C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega}) = \{f \in C^\infty(\boldsymbol{\Omega}) : \operatorname{supp} f \subset\subset \boldsymbol{\Omega}\}$$

类似地有 $C_0^m(\boldsymbol{\Omega})$,$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 把 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的函数限制在 $\boldsymbol{\Omega}$,所得函数的全体组成 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{\Omega})$.

为了以后的讨论,这里给出 $C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 内有界集的定义. 若 A 是由 $C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 中的部分元素组成的集合,如对任意给定的整数 $m \geqslant 0$ 和紧集 $K \subset \boldsymbol{\Omega}$,存在只依赖于 m 和 K 的常数 $c > 0$, 使得

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leqslant c, \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad \forall \psi \in A, \quad x \in K.$$

则称 A 是 $C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 中的有界集合.

相应地,集合 A 在 $C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 中有界是指存在紧子集 $K \subset \boldsymbol{\Omega}$,使得 $\operatorname{supp} \psi \subset K$,$\forall \psi \in A$ 以及 $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$,存在常数 c_α, 使得

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leqslant c_\alpha, \quad \forall x \in K, \quad \forall \psi \in A.$$

设 p 为一正实数,u 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的可测函数,则定义

$$L^p(\boldsymbol{\Omega}) = \{u: \int_{\boldsymbol{\Omega}} |u|^p \mathrm{d}x < \infty\} \tag{1.2.3}$$

在 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ 中，把两个定义在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上几乎处处相等的函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$（即在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中除去一个零测集之外，$u_1(x) = u_2(x)$）称为是等价类. 因此 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ 中的元素是满足 $\int_{\boldsymbol{\Omega}} |u|^p \mathrm{d}x < \infty$ 的可测函数等价类. 其范数定义为

$$\| u \|_{0,p,\boldsymbol{\Omega}} = \{\int_{\boldsymbol{\Omega}} |u|^p \mathrm{d}x\}^{1/p} \tag{1.2.4}$$

用 $L^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 表示在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中除去一个零测集之外是有界的可测函数全体. 若 $u \in L^\infty(\boldsymbol{\Omega})$，则存在一个常数 c（与 $u(x)$ 有关）使得 $|u(x)| \leqslant c$ 几乎处处成立. 定义其范数为

$$\| u \|_{0,\infty,\boldsymbol{\Omega}} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\boldsymbol{\Omega}} |u(x)| = \operatorname{ess}\inf\{c: |u(x)| \leqslant c\} \tag{1.2.5}$$

1.3　检验函数空间

1. 引言

在分析领域，古典函数已不能满足实际的需要. 例如，偏微分方程的解已经不能为古典函数所描述，许多物理量也不能为古典函数所刻划，这就需要扩大函数的概念. 广义函数理论从此建立起来. 完整的广义函数理论是由 Schwartz 等人于 1950 年建立起的，它是作为泛函数而被引入的. 然而，应该选择怎样的函数空间，使得它在上面的线性连续泛函可以作为广义函数呢？

首先考察 $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 空间，由 Riesz 表示定理知对于 $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 上的任一线性连续泛函 $l \in (L^2(\boldsymbol{\Omega}))'$（$L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 的对偶空间），存在着唯一的函数 $u \in L^2(\boldsymbol{\Omega})$，使得对于任意 $v \in L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 有

$$\langle l, v\rangle = (u, v) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} uv \mathrm{d}x$$

反之，$L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 中任一函数，可以利用上式建立一个 $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 上的线性连续泛函. 这就在 $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ 和 $(L^2(\boldsymbol{\Omega}))'$ 之间建立了一一对应的关系. 由 Riesz 表示定理知，这种对应关系实际上是等距同构，即 $\| l \|_{(L^2(\boldsymbol{\Omega}))'} = \| u \|_{0,2,\boldsymbol{\Omega}}$. 这说明，如我们取 $(L^2(\boldsymbol{\Omega}))'$ 中的元素作为广义函数，并没有扩大所研究的函数的范围.

其次考察 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ 空间，且 $\boldsymbol{\Omega}$ 是有界区域，$p > 2$. 在定理 2.3.1 中将会看到 $L^{p'}(\boldsymbol{\Omega})$ 与其对偶空间 $(L^p(\boldsymbol{\Omega}))'$ 有着等距同构关系，记为 $(L^p(\boldsymbol{\Omega}))' \simeq L^{p'}(\boldsymbol{\Omega})$，其中 $1/p + 1/p' = 1$. 因为 $p > 2$，有 $1 < p' < 2$，由 Hölder 不等式容易证明，$\forall u \in L^p(\boldsymbol{\Omega})$，必有 $u \in L^{p'}(\boldsymbol{\Omega})$ 且范数满足

$$\| u \|_{0,p',\boldsymbol{\Omega}} \leqslant (\mu(\boldsymbol{\Omega}))^{(1/p')-(1/p)} \| u \|_{0,p,\boldsymbol{\Omega}}, \quad (\mu(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{d}x)$$

这说明,如果我们把 $(L^p(\boldsymbol{\Omega}))'$ 中的元素作为广义函数,则扩充了所研究的函数空间 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$.

最后,考察由

$$l(\psi)=\psi(0),\quad \forall\,\psi\in C_B(\boldsymbol{\Omega})$$

所定义的线性泛函,称其为 δ 函数或 Dirac 函数,记为

$$\delta(\psi)=\langle\delta,\psi\rangle=\psi(0)$$

或 $\delta(\psi)=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\delta(x)\psi(x)\mathrm{d}x$.

可以证明,线性泛函 δ 在 $C_B(\boldsymbol{\Omega})$ 的范数下是连续的.事实上,令 $\psi_n(x)\in C_B(\boldsymbol{\Omega})$,且满足

$$\|\psi_n(x)\|_{C_B(\boldsymbol{\Omega})}\to 0,\quad 当\ n\to\infty\ 时$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(\psi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(0)=0$,所以 $\delta(\psi)$ 是连续的.然而,我们找不到一个连续函数 $f(x)$,使得

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}f(x)\psi(x)\mathrm{d}x=\psi(0),\quad \forall\,\psi\in C_B(\boldsymbol{\Omega})$$

在后面的讨论中,我们还将知道,甚至找不到一个可积函数 $f(x)$ 使得上式成立.

引入泛函数序列

$$\langle\delta_h,\psi\rangle=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\delta_h(x)\psi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\,\psi\in C(\boldsymbol{\Omega})$$

下式 ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球体积,以及

$$\delta_h(x)=\begin{cases}(\omega_n h^n)^{-1}, & |x|\leqslant h\\ 0, & |x|>h\end{cases}$$

由中值定理,有

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\delta_h(x)\psi(x)\mathrm{d}x=\psi(\xi)$$

其中 $\xi\in B_h(0)$,$B_h(0)$ 表示中心在原点,半径为 h 的闭球.显然,当 $h\to 0$ 时,$\xi\to 0$.故 $\lim\limits_{h\to 0}\langle\delta_h,\psi\rangle=\psi(0)=\langle\delta,\psi\rangle$.因此,$\delta$ 可以看作泛序列 δ_h 在某种意义下的极限.

由上述分析,不难看出,函数空间的性质越好,则在此函数空间上所定义的泛函就越多,其对偶空间就越广.我们把定义在一些特定的函数空间上的连续线性泛函数称为广义函数,而这些特定的函数空间称为检验函数空间.

2. 检验空间 $C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$,$C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 以及空间 $E(\boldsymbol{\Omega})$,$D(\boldsymbol{\Omega})$

$C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ 在加法和数乘运算下是一个线性空间.

对于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的任一紧子集 K 和 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$,定义半范如下: