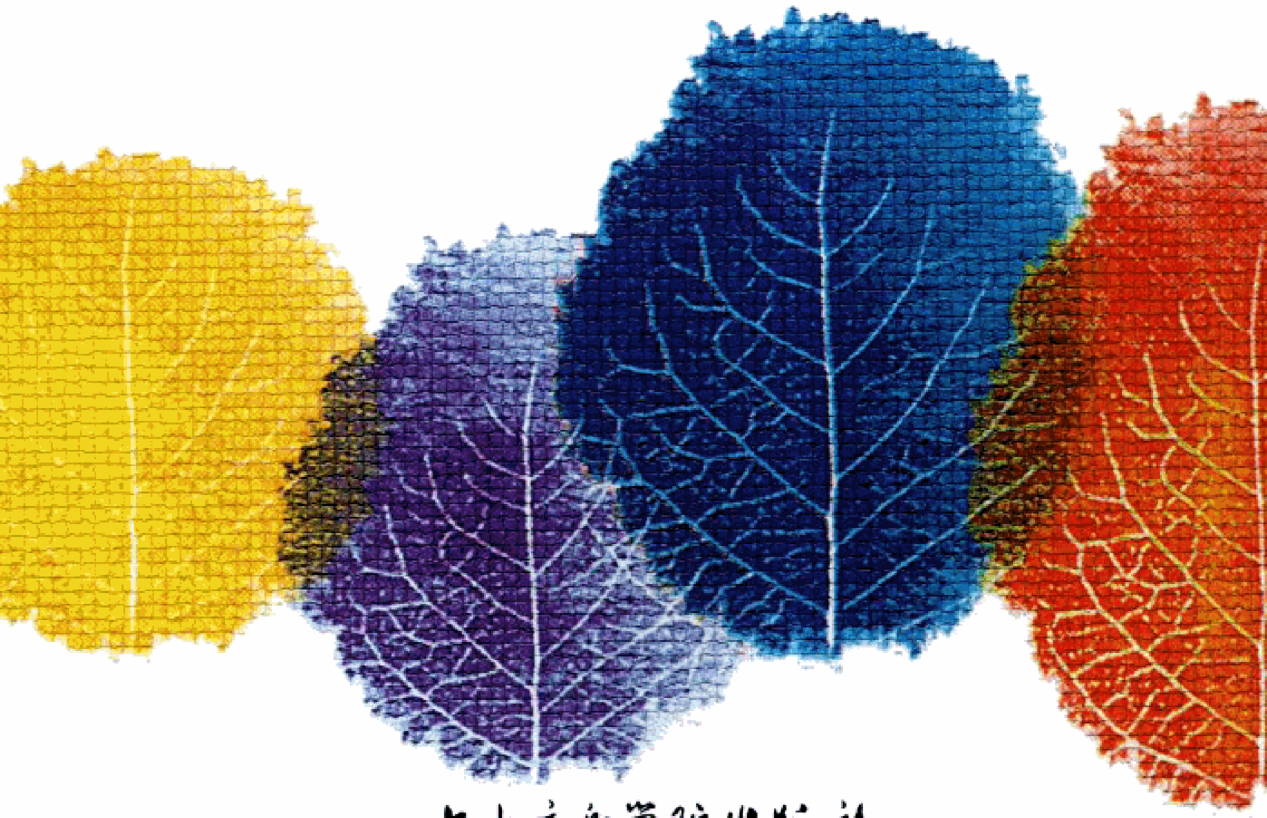
百日冲刺

艺术院校考生高考辅导教材

主　　编　张　华
编　　者　阎长安　张恩慧
　　　　　李景文　王美茹

数　学



中央音乐学院出版社

编者的话

高考作为华夏第一大考，涉及到千家万户，引起了广大师生和家长的关注。千军万马过独木桥将是一年一度美丽的风景。在烽火又起的高考即将来临之际，我们组织了广大一线优秀教师，共同编写了这套高考百日冲刺丛书，希望以此能够帮助广大艺术院校考生在高考路上走的更长、更稳。

本套丛书本着贯彻国家教育方针、落实高考精神，体现"以学生发展为本"的理念，立足于学生的全面、和谐及个性化发展，着力培养学生的创新精神和实践能力，严格依据新课程标准，科学地考查基础知识、基本技能，坚持"以能力立意"和"以教育价值立意"的命题理念，注意试题素材的正面教育功能和积极的价值取向，提倡整合学科知识以考查分析解决实际问题的综合能力和探究能力，力求做到科学精当，准确适用。本丛书分为语文、数学、英语、地理、政治、历史六科。每科按新课标的最新学科标准分类，以章或单元的形式系统梳理本学科高中阶段的所学内容，是报考艺术院校的广大考生在高考冲刺复习阶段必备的辅导用书。本丛书具有以下特点：

抓住规律，循序渐进 依照考点顺序由易到难地编排近来高考过程中各类最新题型，并注重呈现各地具有代表性和经典性的试题。力求在达到完全夯实学生基础知识和基本技能的同时，全面训练学生了解新题型、熟悉新题型、掌握新题型内在的规律的解题技巧。

试题精讲，触类旁通 每一道例题的选择均严格把据新颖性、经典性原则，所选例题着重表现每一考点的内容实质和不同的形式，使学生能够触类旁通，举一反三；而对试题的精当解析，则有的放矢地梳理出了解题思路、方法和规律，对学生的复习起到至关重要的指导作用。

真题模拟，思维突破 设有特色鲜明的"真题模拟"栏目，它既是对某类题型的归纳概括，同时又是该类题型的拓展延伸，引导学生面对试题如何进行思考、入手解决，具有浓郁的人文关怀和严肃的科学精神。通过此栏目，既训练了学生的解题能力，又检验了学生的知识掌握情况，拓展了学生的解题思路。

诗人泰戈尔说："不是槌的打击/而是水的载歌载舞/使鹅卵石臻于完美。"科学的方法，合理的工具，往往使你的学习事半功倍。愿怀有梦想的你，幸运地选择本套丛书，愉快地使用本套丛书，在即将面对的考试中，拨开云雾见晴天，以得意想不到的突破，获得理想如意的成绩。

烽火高考路，我们与你同行！

编　者

2007 年 1 月

目 录

第一章 集合与简易逻辑 …… (1)
第二章 函 数 …… (8)
§2.1 映射、函数及反函数 …… (8)
§2.2 函数的定义域、值域 …… (15)
§2.3 函数的单调性、奇偶性 …… (21)
§2.4 二次函数 …… (30)
§2.5 指数与指数函数 …… (36)
§2.6 对数与对数函数 …… (41)
§2.7 函数的图象 …… (48)
第三章 数 列 …… (55)
第四章 三角函数 …… (64)
第一单元 任意角的三角函数,两角和与差的三角函数 …… (64)
第二单元 三角函数的图象和性质 …… (77)
第五章 平 面 向 量 …… (89)
第六章 不 等 式 …… (101)
第七章 直线与圆的方程 …… (111)
§7.1 直线方程和两直线的位置关系 …… (111)
§7.2 简单的线性规划 …… (117)
§7.3 圆的方程 …… (122)
§7.4 直线和圆的位置关系 …… (127)
第八章 圆锥曲线 …… (132)
§8.1 椭 圆 …… (132)
§8.2 双 曲 线 …… (139)
§8.3 抛 物 线 …… (145)

§8.4　直线与圆锥曲线的位置关系 …… (150)
第九章　直线、平面、简单几何体 …… (156)
第一单元　空间直线和平面 …… (156)
第二单元　简单几何体 …… (173)
第十章　排列、组合、二项式定理 …… (184)
§10.1　排列与组合 …… (184)
§10.2　二项式定理 …… (191)
第十一章　概　　率 …… (199)
§11.1　随机事件的概率 …… (199)
§11.2　互斥事件与相互独立事件的概率 …… (204)
第十二章　导数及应用 …… (213)

第一章　集合与简易逻辑

高考内容解读

1. 理解集合、子集，补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义．了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合．

2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充分条件，必要条件及充要条件的意义．

基础知识梳理

一、内容提要

（一）集合的基本概念及表示方法

1. 集合与元素

一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集，通常用大写字母 A、B、C…表示，集合中的每个对象叫做这个集合的元素，通常用小写字母 a、b、c…表示．

2. 集合的分类

集合
- 按元素的属性分
  - 数集（元素是数）
  - 点集（元素是点）
  - 序数对（元素是有序数对）
- 按元素多少分
  - 有限集（元素个数是有限个）
  - 无限集（元素个数是无限个）
  - 空集（不含任何元素）

3. 集合中元素的性质

集合有两个特性：整体性和确定性．

对于一个给定的集合，它的元素具有确定性，互异性，无序性．

4. 集合的表示方法

（1）列举法　（2）描述法　（3）图示法　（4）区间法（数集）　（5）字母法

（二）元素与集合、集合与集合之间的关系

1. 元素与集合：“$\in$”或“$\notin$”

注意：元素与集合之间是个体与整体的关系，不存在大小与相等关系，如 3 与$\{3\}$，只

能是 $3\in\{3\}$,不是 $3=\{3\}$,再如 2 与 $\{3\}$ 只能是 $2\notin\{3\}$

2. 集合与集合之间的关系

(1)包含关系

(2)相等关系

(3)真子集关系

(4)运算关系

(三)集合之间的逻辑关系

1. 交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A,(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B$

$A\cap U=A,A\cap A=A,A\cap\phi=\phi$

2. 并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A,(A\cup B)\supseteq A,(A\cup B)\supseteq B$

$A\cup U=\cup,A\cup A=A,A\cup\phi=A$

3. 补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A,\complement_U\phi=\cup,\complement_U\cup=\phi$

$A\cap(\complement_U A)=\phi\quad A\cup(\complement_U A)=\cup$

4. 分配律,结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

5. 反演律(摩根法则)

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

6. 传递性

若集合 $A\subseteq B,B\subseteq C$,则集合 $A\subseteq C$

若集合 $A\subsetneq B,B\subsetneq C$,则集合 $A\subsetneq C$

(四)有限集合的子集个数公式

1. 设有限集合 A 中有 n 个元素,则 A 的子集个数有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$(个)其中真子集的个数为 2^n-1(个)非空子集个数为 2^n-1(个)非空真子集个数为 2^n-2(个)

2. 有限集合间的元素的个数公式

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$,$\cup$ 为全集,易得

(1)$n(A)+n(\complement_U A)=n(\cup)$

(2)$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\complement_U B)=n(B)-n(B\cap\complement_U A)$

(3)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(五)命题

1. 命题:可以判断真假的语句叫做命题.

2. 逻辑联结词:"或"、"且"、"非"这些词叫逻辑联结词.

或:两个简单命题至少有一个成立.

非:对一个命题的否定.

且:两个简单命题都成立.

3. 简单命题与复合命题:不含逻辑联结词的命题叫做简单命题,由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合题题.

4. 表达形式:用小写的拉丁字母 $p,q,r,s\cdots$ 来表示简单命题.

复合命题有三类:①p 或 q;②p 且 q;③非 p

5. 真值表:表示命题真假的表叫真值表.

①非 p 形式复合　②p 且 q 形式复合　③p 或 q 形式复合

6. 四种命题及其关系

(1)四种命题

在两个命题中,如果第一个命题的条件(或题设)是第二个命题的结论,且第一个命题的结论是第二个命题的条件,那么这两个命题叫做互逆命题;如果把其中一个命题叫做原命题,那么另一个叫做原命题的逆命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定,这样的两个命题叫做互否命题,把其中一个命题叫做原命题,另一个命题就叫做原命题的否命题.

一个命题的条件和结论,分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定,这样的两个互为逆否命题,把其中一个命题叫做原命题,另一个命题叫做原命题的逆否命题.

(2)表示形式

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

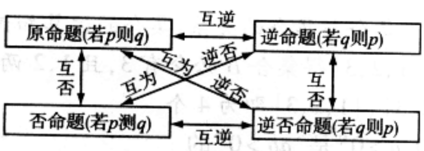
原命题:若 p 则 $q(p\Rightarrow q)$

逆命题:若 q 则 $p(q\Rightarrow p)$

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q(\neg p\Rightarrow\neg q)$

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p(\neg q\Rightarrow\neg p)$

(3)四种命题的关系



二、充要条件

定义

若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件

若 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要条件

若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件

若 $q\Rightarrow p$,且 $p\nRightarrow q$,则 p 是 q 的必要不充分条件

如果 $p\Leftrightarrow q$,则 p 是 q 的充分且必要条件

解析经典试题

一、选择题

1. (2006·重庆卷)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{3,4,5\}$,则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{1,6\}$　　B. $\{4,5\}$　　C. $\{2,3,4,5,7\}$　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

[答案] D

[解析] 本题主要考查集合的运算.

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,6,7\}$. 故选 D.

2. (2006·安徽卷)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,集合 $S=\{1,3,5\}$,$T=\{3,6\}$,则$\complement_U(S\cup T)$等于 ( )

A. ϕ　　B. $\{2,4,7,8\}$　　C. $\{1,3,5,6\}$　　D. $\{2,4,6,8\}$

[答案] B

[解析] 本题考查集合的运算

$\because S=\{1,3,5\}$,$T=\{3,6\}$,$\therefore S\cup T=\{1,3,5,6\}$

$\because U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$　$\therefore \complement_U(S\cup T)=\{2,4,7,8\}$. 故选 B

3. (2006·江西卷)已知集合 $P=\{x|x(x-1)\geqslant 0\}$,$Q=\{x|\frac{1}{x-1}>0\}$,则 $P\cap Q$ 等于 ( )

A. ϕ　　B. $\{x|x\geqslant 1\}$　　C. $\{x|x>1\}$　　D. $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

[答案] C

[解析] $P=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$,$Q=\{x|x>1\}$

$\therefore P\cap Q=\{x|x>1\}$

4. (2006·辽宁卷2)设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 8

[答案] C

[解析] 本小题主要考查集合与集合的关系,集合的运算知识

由于 $A=\{1,2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$ 得集合 B 必含有3,且1,2两个元素至多含有两个,则 B 集合为 $\{3\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$ 即为4个

5. (2006·浙江卷7)"$a>0,b>0$"是"$ab>0$"的 ( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[答案] A

[解析] 本题考查充分必要条件

由"$a>0,b>0$"显然能推出"$ab>0$",反之不行

二、填空填

6. (2006·北京市海淀区高三年级第二学期期末练习)若集合 $\cup=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,5\}$,则 $B\cup(C\cup A)=$ ________

[解析]　本题考查集合运算及概念理解

据题意知 $C\cup A=\{1,5\}$，故 $B\cup C\cup A=\{2,5\}\cup\{1,5\}=\{1,2,5\}$

7. (2006·北京市西城区5月抽样测试1)设全集为R，若集合 $M=\{x|x\geqslant 1\}$，$N=\{x|0\leqslant x<5\}$ 则 $N\cap(C_RM)=$ ________

[解析]　本题考查集合的运算，由题意得

$C_RM=\{x|x<1\}$　$\therefore N\cap C_RM=\{x|0\leqslant x<s\}\cap\{x|x<1\}=\{x|0\leqslant x<1\}$

8. (2006·北京市海淀区高三年级第二学期期中练习5)"$x>1$"是"$|x|>\frac{1}{x}$"的什么条件 ________

[解析]　本题考查对充分条件和必要条件的理解与判断，据题意易知当 $x>1$ 时，不等式 $|x|>\frac{1}{x}$ 成立，但反之易知当 $x<0$ 时，不等式也成立，故 $x>1$ 是 $|x|>\frac{1}{x}$ 充分但不必要条件

三、解答题

9. (2006·浙江省杭州二中9)已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，集合 $B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$

若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值

[解析]　$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$

$A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$

$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}=\{x|(x-1)(x-a+1)=0\}$

则有 $a-1=2\Rightarrow a=3$ 或 $a-1=1\Rightarrow a=2$

10. (2006·华师附中模拟10)已知集合 $A=\{x|(x-2)[x-(3a+1)]<0\}$

$B=\{x|\frac{x-2a}{x-(a^2+1)}<0\}$

(1)当 $a=2$ 时，求 $A\cap B$

(2)求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围

[解析]　(1)当 $a=2$ 时，$A=(2,7)$　$B=(4,5)$

$\therefore A\cap B=(4,5)$

(2)$\because B=(2a,a^2+1)$

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$A=(3a+1,2)$

要使 $B\subseteq A$，必须 $\begin{cases}2a\geqslant 3a+1\\a^2+1\leqslant 2,\end{cases}$ 此时 $a=-1$

当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$A=\phi$，使 $B\subseteq A$ 的 a 不存在

当 $a>\frac{1}{3}$ 时，$A=(2,3a+1)$

要使 $B\subseteq A$　必须 $\begin{cases}2a\geqslant 2\\a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$ 此时 $1\leqslant a\leqslant 3$

综上可知，使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围是 $[1,3]\cup\{-1\}$

独立测试练习

一、选择题

1. (2006 · 高考全国卷 1)设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$,$N=\{x||x|<2\}$,则 ( )

A. $M\cap N=\phi$　　B. $M\cap N=M$

C. $M\cup N=M$　　D. $M\cup N=R$

2. (2006 · 高考北京卷 1)设集合 $A=\{x|2x+1<3\}$,$B=\{x|-3<x<2\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|-3<x<1\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$

C. $\{|x|x>-3\}$　　D. $\{x|x<1\}$

3. (2006 · 高考江苏卷 7)若 A,B,C 为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有 ( )

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$

C. $A\neq C$　　D. $A=\phi$

4. (2006 · 高考安徽卷 4)“$x>3$”是“$x^2>4$”的 ( )

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. (2006 · 高考山东卷 9)设 p: $x^2-x-2<0$,q: $\frac{1+x}{|x|-2}<0$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

6. (2006 · 高考浙江卷 1)设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$则 $A\cap B=$________

7. (2006 · 北京市东城区高三年级综合练习(二))设全集 $U=\{1,3,5,7\}$,集合 $A=\{3,5\}$,$B=\{1,3,7\}$则 $A\cap(C_UB)=$________

8. (2006 · 北京市东城区高三年级综合练习(一)2)已知 $m,n\in R$,则“$m\neq 0$”是“$mn\neq 0$”的什么条件________

三、解答题

9. (2006 · 模拟 7 浙江省杭州二中)已知两个命题 p: 3 是 13 的约数,q: 3 是方程,$x^2-4x+3=0$ 的解,试写出这组命题构成的“p 或 q”,“p 且 q”,“非 p”形式的复合命题,并判断它们的真假.

10. (2006 · 模拟,8,绍兴一中)已知命题 p: $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根,命题 q: $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,若命题“q 或 q”为真,命题“p 且 q”为假,求实数 m 的取值范围.

[独立测试练习参考答案]

1. [答案] B

[解析] 本题考查不等式的解法及集合的运算.

由 $x^2-x<0$ 得 $0<x<1$,由 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$

经检验，只有 $M\cap N=M$ 成立，故选 B

2. [答案] A

[解析] 本题考查集合运算

$\because A=\{x|2x+1<3\}=\{x|x<1\}$

$B=\{x|-3<x<2\}$

$\therefore A\cap B=\{x|-3<x<1\}$

3. [答案] A

[解析] 本题考查集合的运算，显然 $A\subseteq C$，否则 $A\cup B=B\cap C$ 不可能成立.

4. [答案] B

[解析] 考查充分必要条件

由 $x>3$，$\therefore x^2>9$ $\therefore x^2>4$，当 $x^2>4$ 即 $x>2$ 或 $x<-2$

不能推出 $x>3$，$\therefore x>3$ 是 $x^2>4$ 的充分不必要条件

5. [答案] A

[解析] 本题考查不等式的解法与充要条件

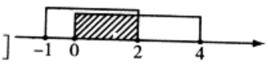
对于 p: $x^2-x-2<0\Rightarrow -1<x<2$

对于 q: $\dfrac{1+x}{|x|-2}<0\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\|x|-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x<0\\|x|-2>0\end{cases}\Rightarrow -1<x<2$ 或 $x<-2$，故选 A

6. [答案] $[0,2]$

[解析] 本题考查集合基本运算

如图：$A\cap B=[0,2]$



7. [解析] 本题考查集合交集、补集运算，比较简单，$\complement_U B=\{5\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{5\}$

8. [解析] 本题考查了充分条件和必要条件的判定及不等关系的理解

“$mn\neq0$”$\Leftrightarrow m\neq0$ 且 $n\neq0$，而 $m\neq0$ 只是其中的一种情况，所以 $m\neq0$ 是 $mn\neq0$ 的必要不充分条件.

9. [解析] p 或 q:3 是 B 的约数或是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解，“p 且 q”:3 是 13 的约数且是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解

非 p:3 不是 13 的约数

因为 p 是假 q 是真，所以“p 或 q”为真“p 且 q”为假

非 p 为真

10. [解析] $\because x^2+mx+1=0$ 有两不等负根

$\therefore\begin{cases}m^2-4>0\\-m<0\end{cases}$ 得 $m>2$

$\because 4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根

$\therefore 16(m-2)^2-16<0$ 得 $1<m<3$

有且只有一个为真，若 p 真 q 假 得 $m\geqslant3$

若 p 假 q 真 得 $1<m\leqslant2$

综合上述得 $m\geqslant3$ 或 $1<m\leqslant2$

第二章 函 数

§2.1 映射、函数及反函数

高考内容解读

1. 了解映射的概念,能根据定义判断所给对应是否为映射,会求映射中所指定的象或原象.

2. 理解函数的概念,掌握函数的三种表示方法.

3. 了解反函数的概念及至为反函数的函数图象间的关系,会求一些简单函数的反函数.

基础知识梳理

(一)映射

1. 映射$f:A\to B$包含三个要素:原象集合A,象集合$C(C\subseteq B)$以及从集合A到集合B的对应法则f,两个集合A、B可以是数集,也可以是点集或其他的集合,对应法则f可以用文字叙述,也可以用符号表示.

2. 映射是一种特殊的对应,它具有:

(1)方向性:一般地从A到B的映射与从B到A的映射是不同的;

(2)任意性:集合A中的任意一个元素都有象,但集合B的每一元素未必有原象;

(3)唯一性:集合A中的元素的象是唯一的,不允许"一对多",但可以"多对一".

(二)函数

1. 函数是一种特殊的映射$f:A\to B$必须满足:(1)A、B都是非空的数集;(2)集合B中的每一个元素都有原象(其象的集合是B的子集).

2. 构成函数关系的三要素是:定义域、值域、对应法则,其中定义域和对应法则是两大独立要素,值域是由定义域和对应法则确定的;两个函数当且仅当定义域、值域、对应法则都相同时,才是相同的函数,因此,判断两个函数是否相同,不仅要看函数的表达式化简后是否相同,还要注意未化简前的定义域是否相同;也可用图象来判断.

3. 函数的表示方法一般有三种:列表法、解析法和图象法.

4. 若函数在其定义域的不同子集上,对应法则不同或用几个不同式子来表示,这种形式的函数叫做分段函数.

5. 若 y 是 u 的函数,u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$,$u=g(x)$,$u\in(m,n)$,$x\in(a,b)$,那么 y 称为 f 和 g 的复合函数,这时 $y=f[g(x)]$,u 叫做中间变量,u 的取值范围就是 $g(x)$ 的值域.

(三)反函数的概念

1. $y=f(x)$ 的定义域为 A,A 中的每一个 x 与其函数值成"一一对应"时,$f(x)$ 才存在反函数,不允许两个(或多个)x 有同一个函数值,单调函数必有反函数,而 $y=x^2$ 在 R 上不存在反函数.

2. 求一个函数 $y=f(x)$ 的反函数的一般步骤:

(1)判断:原函数是否有反函数存在;

(2)反解:由 $y=f(x)$ 求出 $x=f^{-1}(y)$;

(3)互换:在 $x=f^{-1}(y)$ 中,按习惯将 x,y 的位置互换,得到 $y=f^{-1}(x)$;

(4)标注:将所求反函数的定义域标明.

3. 互为反函数的两个函数间有以下重要关系:

(1)$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域与值域对调;

(2)$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数$\Leftrightarrow$它们的图象关于直线 $y=x$ 对称;

(3)$f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$,善于利用可使解题迅捷;

(4)$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 具有相同的单调性;

(5)如果 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)\quad(x\in A,y\in B)$,的反函数,那么,$f^{-1}[f(x)]=x$,$f[f^{-1}(y)]=y$.

4. 分段函数的反函数的求法是先分段求解,再合并写出.

解析经典试题

例1 下列各函数中,图象完全相同的是 ( )

A. $y=2lgx$ 和 $y=lgx^2$;

B. $y=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $y=x$;

C. $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 和 $y=\begin{cases}-1, X\in(-\infty,1),\\ 1 \quad x\in(1,+\infty)\end{cases}$

D. $y=x-3$ 和 $y=\sqrt{x^2-6x+9}$

[解析] 两个函数的图象完全相同即两个函数为同一函数,这须两个函数的三要素分别相同,据此易知 C 为正确选项.

例2 设映射 $f:x\to -x^2+2x$ 是实数集 M 到实数集 N 的映射,若对于实数 $P\in N$,在 M 中不存在原象,则 P 的取值范围是 ( )

A. $(1,+\infty)$; B. $[1,+\infty)$; C. $(-\infty,1)$; D. $(-\infty,1]$

[解析] 要使 P 存在原象,那么方程 $-x^2+2x=P$ 有实数根;若不存在原象,则方程 $-x^2+2x=P$ 即 $x^2-2x+P=0$ 无实数根,由 $\triangle=4-4P<0$,得 $P>1$,故选 A.

例3 (1)已知$f(x)$是一次函数,且满足

$3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$,求(1)$f(x)$的解析式;

(2)已知$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,求$f(x)$的解析式;

(3)已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求$f(x)\cdot f(x+1)$,$f(x^2)$;

(4)已知$2f(x)+f(\frac{1}{x})=10^x$,求$f(x)$;

(5)已知$f(x+1)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0,\\ lg(-x) & x<0,\end{cases}$求$f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)$的值.

解:

(1)(待定系数法)已知$f(x)$是一次函数,可设$f(x)=ax+b$,

$\therefore 3f(x+1)-2f(x-1)$

$=3[a(x+1)+b]-2[a(x-1)+b]$

$=ax+5a+b$

$=2x+17$

$\therefore \begin{cases}a=2,\\ 5a+b=17.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2\\ b=7\end{cases}$

$\therefore f(x)=2x+7$

(2)(换元法)设$t=\frac{1-x}{1+x}$,则$x=\frac{1-t}{1+t}$.

$$\therefore f(t)=\frac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$\therefore f(x)=\frac{2x}{1+x^2}(x\neq 1)$

(3)解法一:(换元法)设$t=\sqrt{x}+1\geqslant 1$,则$\sqrt{x}=t-1(t\geqslant 1)$,$x=(t-1)^2$,

$\therefore f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1(t\geqslant 1)$.

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$

$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant 0)$,

$f(x^2)=x^4-1(x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1)$.

解法二:(配凑法)$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$,$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$(想一想,为什么$x\geqslant 1$),以下同解法一.

(4)由$2f(x)+f(\frac{1}{x})=10^x$,得$2f(\frac{1}{x})+f(x)=10^x$,两式联立消去$f(\frac{1}{x})$,得$f(x)=\frac{2}{3}\times 10^x-\frac{1}{3}\times 10^{\frac{1}{x}}$.

(5)设 $t=x+1$，则 $x=t-1$，

$\therefore f(t)=\begin{cases}\sin(t-1) & t\geqslant 1,\\ \lg(1-t) & t<1.\end{cases}$

$\therefore f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-a)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\lg 10=1.$

例4 求下列函数的反函数

(1) $y=\frac{2x}{5x+1}$；

(2) $y=x^2-2x-1(x\leqslant 0)$；

(3) $y=\sqrt{-x-2}$；

(4) $y=\begin{cases}x^2-1(0<x\leqslant 1),\\ x^2 \quad (-1\leqslant x<0).\end{cases}$

解：(1)由 $y=\frac{2x}{5x+1}$，得 $5xy+y=2x$，

$\therefore x=\frac{y}{2-5y}$，$\therefore y=\frac{2x}{5x+1}$的反函数为

$y=\frac{x}{2-5x}(x\neq\frac{2}{5})$.

(2) $\because$ $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，且 $x\leqslant 0$，

$\therefore y\geqslant -1$

又 $(x-1)^2=y+2$，$x\leqslant 0$，

$\therefore x-1=-\sqrt{y+2}$，

$x=1-\sqrt{y+2}$，

故，所求的反函数为 $y=1-\sqrt{x+2}(x\geqslant -1)$.

(3)函数 $y=\sqrt{-x-2}$的定义域为 $x\leqslant -2$，其值域为 $y\geqslant 0$.

由 $y=\sqrt{-x-2}$，得 $-x-2=y^2$，

$\therefore x=-y^2-2$.

故，所求的反函数为 $y=-x^2-2(x\geqslant 0)$

(4) $x\in(0,1]$时，$y\in(0,1]$，由 $y=x^2-1$，得 $x=\sqrt{y+1}$；当 $x\in[-1,0)$时，$y\in(0,1]$，由 $y=x^2$，得 $x=-\sqrt{y}$.

故，所求的反函数是 $y=\begin{cases}-\sqrt{x}(0<x\leqslant 1),\\ \sqrt{x+1}(-1<x\leqslant 0).\end{cases}$

例5 (2004·桂，文3)记函数 $y=1+3^{-x}$的反函数为 $y=g(x)$，则 $g(10)$的值为 (　　)

A. 2；　　B. -2；　　C. 3；　　D. -1

[解析] 先求出 $g(x)$的表达式，再代值计算是最容易想到的解法，如果从原函数与其反函数间的关系来考虑，就有了如下的解法：

设 $g(10)=x$，则 $10=1+3^{-x}$.

$\therefore -x=2, x=-2$，

故选 B

例 6 （2005 · 湖南）设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$ ________.

解：$\because f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，且 $f(4)=0$，$\therefore (4,0)$ 关于 $(1,2)$ 的对称点 (x,y) 也在 $f(x)$ 的图象上.

由 $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2}=1, \\ \dfrac{y+0}{2}=2, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=4, \end{cases}$ 即 $f(-2)=4$.

又 $\because f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$，

$\therefore f^{-1}(4)=-2$.

独立测试练习

1. （北师大附中新课标）若 $f:A\to B$ 能构成映射，下列说法正确的有 （　　）

(1) A 中的任一元素在 B 中必有象且唯一；

(2) B 中的多个元素可以在 A 中有相同的原象；

(3) B 中的元素可以在 A 中无原象；

(4) 象的集合就是 B.

A. 1 个；　　B. 2 个；　　C. 3 个；　　D. 4 个.

2. 已知 (x,y) 在映射 f 下的象是 $(x+y,x-y)$，则 $(2006,2008)$ 在 f 下的原象是 （　　）

A. $(2007,-1)$；　　B. $(-1,2007)$；

C. $(4014,-2)$；　　D. $(-2,4014)$.

3. （全国大联考第二次联考）下列函数中是同一函数的是 （　　）

A. $y=1$ 与 $y=x^0$；　　B. $y=x$ 与 $y=a\ loga^x$；

C. $y=2lgx$ 与 $y=1gx^2$；　　D. $y=2^{x+1}-2^x$ 与 $y=2^x$.

4. （北师大附中新课标）下列四个图形中，是函数图象的有 （　　）

A(1)；　　B. (1)(3)(4)；

C. (1)(2)(3)；　　D. (3)(4).

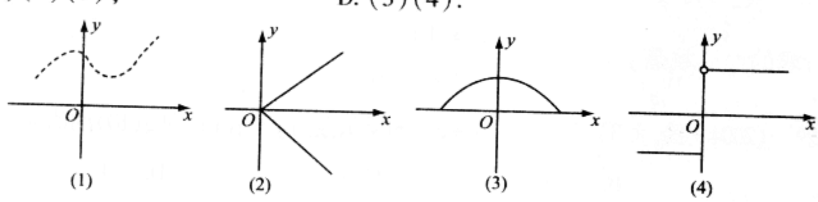


图 2－1

5. (2001 · 北京,春招)已知$f(x^6)=log_2x$,那么$f(8)$等于 ( )

A. $\frac{4}{3}$; B. 8; C. 18; D. $\frac{1}{2}$.

6. (2005 · 湖北)设$f(x)=3-x$,则$f\{f[f(x)]\}$等于 ( )

A. $f(x)$; B. $\frac{1}{f(x)}$; C. $-f(x)$; D. $3f(x)$

7. 设$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$,则$f(x^2-1)$等于 ( )

A. x^4+5x^2+1; B. x^4+x^2-3;

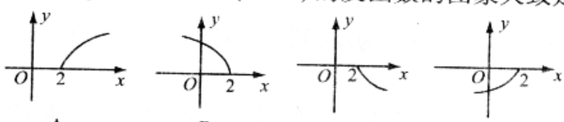
C. x^4-5x^2+1; D. x^4+x^2+3.

8. (2005 · 北京东城)函数$y=-\frac{1}{x+1}(x\neq-1)$的反函数是 ( )

A. $y=-\frac{1}{x}-1(x\neq0)$; B. $y=-\frac{1}{x}+1(x\neq0)$;

C. $y=-x+1(x\in R)$; D. $y=-x-1(x\in \mathrm{R})$

9. (2005 · 江苏常州)函数$f(x)=x^2+2(x\leqslant0)$的反函数的图象大致是下图中的 ( )



A B C D

10. (2006 · 重庆 6)设函数$y=f(x)$的反函数为$y=f^{-1}(x)$,且$y=f(2x-1)$的图象经过点$(\frac{1}{2},1)$,则$y=f^{-1}(x)$的图象必过点 ( )

A. $(\frac{1}{2},1)$; B. $(1,\frac{1}{2})$; C. $(1,0)$; D. $(0,1)$.

11. (2006 · 全国文 3)已知函数$y=e^x$的图象与函数$y=f(x)$的图象关于直线$y=x$对称,那么 ( )

A. $f(2x)=e^{2x}(x\in \mathrm{R})$; B. $f(2x)=ln2\cdot lnx(x>0)$;

C. $f(2x)=2e^x(x\in \mathrm{R})$; D. $f(2x)=lnx+ln2(x>0)$.

12. (2006 · 北京文 11)已知函数$f(x)=a^x-4a+3$的反函数的图象经过点$(-1,2)$,那么a的值等于________.

13. (2006 · 江西文 14)设$f(x)=log_3(x+6)$的反函数为$f^{-1}(x)$,若$[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$,则$f(m+n)=$________.

14. (2006 · 辽宁,文 14)设$g(x)=\begin{cases}ex,x\leqslant0,\\ lnx,x>0.\end{cases}$ 则$g[g(\frac{1}{2})]=$________.

15. (2005 · 北师大附中新课标)已知(x,y)在映射f下的象是$(x+y,xy)$,求$(-2,3)$在f下的象和$(2,-3)$在f下的原象.

16. (2004 · 北京朝阳一模 · 9)已知$f(x)=log_{\frac{1}{2}}x+3$的反函数为$f^{-1}(x)$,若不等式$f^{-1}(x)<x-2$成立,求$x$的取值范围.