普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专数学立体化教材

微积分

（经管类）

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高职高专数学立体化教材

微积分

（经管类）

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分．经管类/吴赣昌主编．
北京：中国人民大学出版社，2007
普通高等教育“十一五”国家级规划教材．高职高专数学立体化教材
ISBN 978-7-300-07973-8

Ⅰ．微…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．微积分-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 038340 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高职高专数学立体化教材
微积分（经管类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 4 月第 1 版
印　　张	13 插页 1	**印　　次**	2007 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	238 000	**定　　价**	26.00 元（含光盘）

内容简介

本书根据高职高专院校经管类专业微积分课程的教学大纲编写而成，其中涵盖了函数与极限、一元微分学、一元积分学、多元函数微分学等内容。书中融入了数学历史和数学文化方面的知识，并以适当的难度梯度循序渐进地选编了教学例题和习题，同时本书还特别提供了相应的数学实验（见附录）。

此外，我们还结合现代教学的新要求和信息技术的新发展，开发了一套内容丰富、功能强大的学习软件——《微积分多媒体学习系统》（光盘，附书后），其中包括多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，这些模块的设计将对学生们的课后复习、疑难解答、自学提高以及创新能力的培养起到积极的作用。在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合。

本书可作为高职高专院校经管类专业的数学基础课程教材。

总 序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，在迄今为止的七年多时间内，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的高职高专数学立体化系列教材，共包含两大类五门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经管类**：微积分，线性代数与概率统计两门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．

◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．

◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．

◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

◆ 与教材同步配套，简明实用地编写了“大学数学实验指导”．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化

的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，以充分满足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑、数学实践以及综合提高训练等方面的需要．其主要特点有：

◆ 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点．

◆ 习题详解：逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习．

◆ 数学试验：以交互、集成方式，设计了数学实验教学演示系统和实验案例库．

◆ 综合训练：总结每章教学知识点，通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于学生综合提高．

◆ 知识点交互：利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习．

立体化教材的配套建设服务

1.《＊＊＊＊多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 大学数学立体化教材服务网站 (www. math123.cn)

其中，《＊＊＊＊多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《＊＊＊＊多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点：

◆ 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节．

◆ 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位老师的个性化授课特点．

◆ 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势．

◆ 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验教学．

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 25 000 余道，具有以下特点：

◆ 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等．

◆ 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，通过人工调整按钮，可以很方便地对该试卷中的试题进行增删与替换．

◆ 直接实现试卷的 Word 排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改．

◆ 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全

真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能：使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

大学数学立体化教材服务网 (www.math123.cn) 是专门为采用我们立体化教材的师生提供配套教学服务的网站. 网站设计了教材简介、教学系统、题库系统、下载园地、教学论坛、数学实验、背景资源、考研资讯、征订信息等主要栏目，并有丰富的教学资源供广大师生下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的通用平台，在教学论坛栏目中，搜集、整理和转载了当前国内有关大学教育、专业教学等方面共同关心的议题和新闻，广大师生可在其中发表自己的意见和建议.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是，与当初启动这个项目时相比，现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境（从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设）和软硬件技术（从软件开发平台到计算机相关硬件技术）都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

七年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类) 出版以来，我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

编　者
2007 年 3 月 20 日

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

§1.1　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的 200 多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性．

一、数集与区间

本书今后常用的数集包括自然数集(记为 $\mathbf{N}$)、整数集(记为 $\mathbf{Z}$)、有理数集(记为 $\mathbf{Q}$)与实数集(记为 $\mathbf{R}$)．

区间是高等数学中常用的实数集，包括有四种**有限区间**和五种**无限区间**．

有限区间

设 a, b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a, b]=\{x \mid a \leq x \leq b\},\ [a, b)=\{x \mid a \leq x<b\},\ (a, b]=\{x \mid a<x \leq b\}.$$

无限区间

引入记号 $+\infty$ (读作“正无穷大”) 及 $-\infty$ (读作“负无穷大”)，则可类似地表示无限区间．例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leq x\},\ (-\infty, b)=\{x \mid x<b\}.$$

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$．

注：在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为“区间”，并常用 I 表示之．

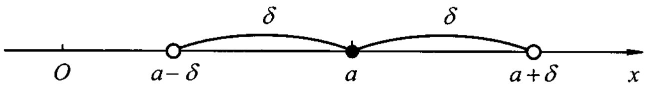
二、邻域

定义 1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的

δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 a 叫做该邻域的**中心**，δ 叫做该邻域的**半径**（见图1–1–1).



$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

图 1–1–1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

三、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型．

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量（变量)，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律．函数就是描述这种联系的一个法则．

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s.

假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 2　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**．

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**．因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**．

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 W 或 $f(D)$，即

$$W=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\,x\in D\}.$$

注：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素．两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定．如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**．

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域即为开区间 $(-1,1)$.

函数的图形

对函数 $y=f(x)$, $x\in D$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y)，当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(见图1–1–2).

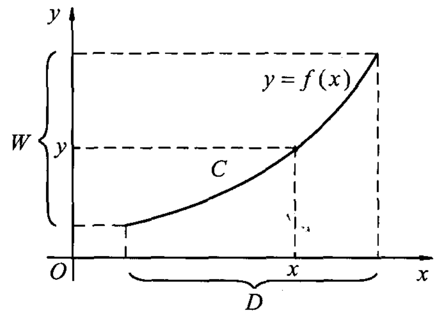


图 1–1–2

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数．对每一个 $x\in(-a,a)$，都有两个 y 值 $(\pm\sqrt{a^2-x^2})$ 与之对应，因而 y 是多值函数．

注：若无特别声明，本教程中的函数均指单值函数．

函数的常用表示法

(1) 表格法　自变量的值与对应的函数值列成表格的方法．

(2) 图像法　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法．

(3) 公式法(解析法)　自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法．根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种：

(i) 显函数　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示．例如，$y=x^2+1$.

(ii) 隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定．例如，$\ln y=\sin(x+y)$.

(iii) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式．以下是几个分段函数的例子．

例 1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$. 图形如图1–1–3所示．

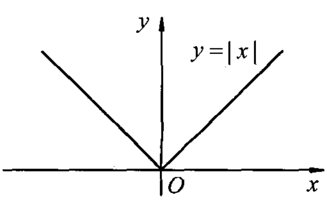


图 1–1–3

例 2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-4 所示.

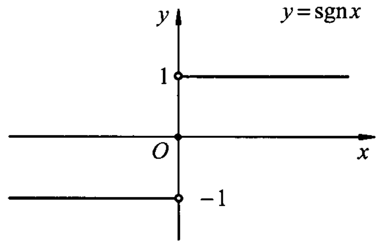


图 1-1-4

四、函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的**数学模型**，即建立**函数关系**.

要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 3　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解　根据题意，可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\le a\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & a<s\end{cases},$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数来表示的，定义域为 $(0,+\infty)$.

五、函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\le 1$. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，因为可以取无限靠近于零的数，使该函数的绝对值 $\left|\frac{1}{x}\right|$ 大于任何预先给定的正数 M. 但易见该函数在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的（见图1–1–5）. 而 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（见图1–1–6）.

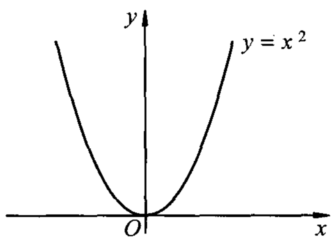


图 1–1–5

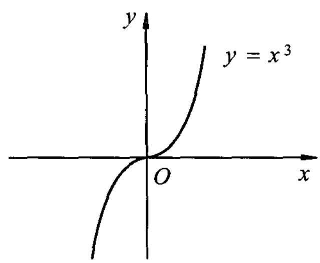


图 1–1–6

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(见图1–1–7). 奇函数的图形关于原点是对称的(见图1–1–8).

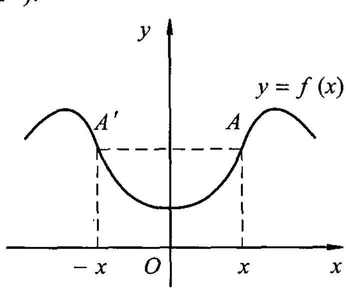


图 1–1–7

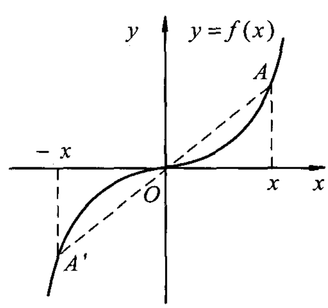


图 1–1–8

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数；函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

例 4　判断函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的奇偶性.

解　由于关系式

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在常数 $T>0$, 使得对一切 $x\in D$, 有 $(x\pm T)\in D$, 且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如, $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

通常周期函数的周期是指其**最小正周期**. 但并非每个周期函数都有最小正周期.

习题 1-1

1. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 下列各题中, 函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$;　(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

4. 讨论函数 $y=2x+\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

5. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=\tan x-\sec x+1$;　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

(3) $y=|x\cos x|e^{\cos x}$;　(4) $y=x(x-2)(x+2)$.

6. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y=\cos(x-1)$;　(2) $y=x\tan x$;　(3) $y=\sin^2 x$.

7. 火车站行李收费规定如下: 当行李不超过 50 kg 时, 按每千克 0.15 元收费, 当超出 50 kg时, 超重部分按每千克0.25 元, 试建立行李收费 $f(x)$(元) 与行李重量 x(kg)之间的函数关系.

§1.2 初 等 函 数

一、反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖

关系. 但在研究过程中, 哪个量作为自变量, 哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.

一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W. 对于值域 W 中的任一数值 y, 在定义域 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应, 且满足关系式

$$f(x)=y.$$

如果把 y 作为自变量, x 作为函数, 则由上述关系式可确定一个新函数

$$x=\varphi(y)\quad(\text{或 } x=f^{-1}(y)),$$

这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的定义域为 W, 值域为 D. 相对于反函数, 函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

注: (1) 习惯上, 总是用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此, $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 常改写为

$$y=\varphi(x)\ (\text{或 } y=f^{-1}(x)).$$

(2) 在同一个坐标平面内, 直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

例 1 求函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{1+x}$, 解得 $x=\dfrac{y}{1-y}$, 改变变量的记号, 即得到所求反函数:

$$y=\frac{x}{1-x}.$$

二、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数. 由于在中学数学中, 我们已经深入学习过这些函数, 这里只作简要复习.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 是任意实数), 其定义域要依 α 具体是什么数而定. 当

$$\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 1/2,\ -1$$

时是最常用的幂函数(见图1-2-1).

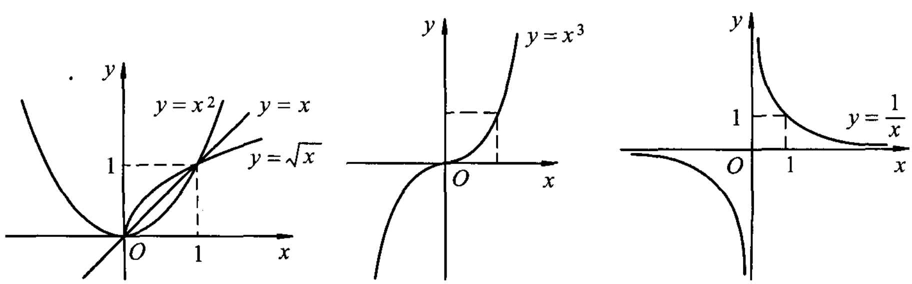


图1-2-1

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq 1$），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少. $y=a^{-x}$ 与 $y=a^x$ 的图形关于 y 轴对称（见图1–2–2）. 其中最为常用的是以 $e=2.718\,281\,8\cdots$ 为底数的指数函数

$$y=e^x.$$

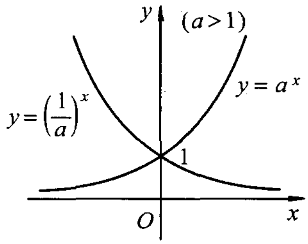


图 1–2–2

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为对数函数，记为

$$y=\log_a x\ (a\text{ 为常数，且 }a>0,\ a\neq 1).$$

其定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调减少. 见图1–2–3.

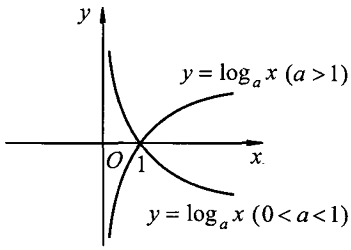


图 1–2–3

其中以 e 为底的对数函数叫做**自然对数函数**，记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有：

(1) 正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是奇函数及以 2π 为周期的周期函数（见图1–2–4）.

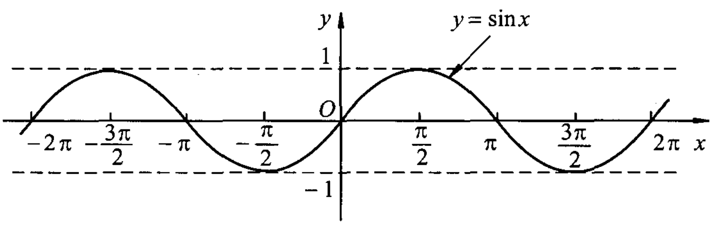


图 1–2–4

(2) 余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是偶函数及以 2π 为周期的周期函数（见图1–2–5）.

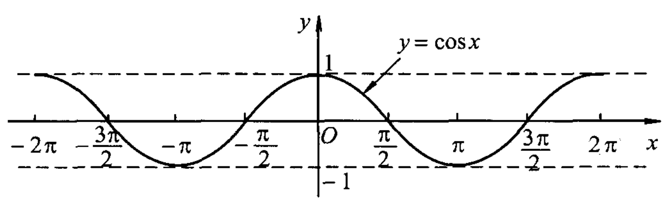


图 1–2–5

(3) 正切函数 $y=\tan x$，其定义域为 $x\neq k\pi+\pi/2$，$k\in\mathbf{Z}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是