SHUXUE

本册主编 林 常 王卫华

数学竞赛之窗

高中数学省级预赛指南

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

SHUXUE

ISBN 978-7-308-05827-8

9 787308 058278 >

定价：12.00元

数学竞赛之窗

高中数学省级预赛指南

丛书主编：《数学竞赛之窗》编辑部
本册主编：林　常　王卫华
本册编委：满　涛　羊明亮　张欣然
党效文　黎金传　祁志红
顾　滨　朱士军　王强芳

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

前　言

我国的数学竞赛活动在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下蓬勃发展，取得了丰硕的成果和丰富的经验，特别是在国际数学奥林匹克中，多次获得团体总分第一。

这一系列好成绩的取得，无疑与各学校对优秀学生的培养是分不开的，广大数学竞赛辅导老师在其中付出了很大的心血；同时，我国数学竞赛的深厚土壤和完善的竞赛选拔机制也应该是取得优秀成绩的一个重要因素。

随着中国科协《关于进一步加强全国五项学科竞赛省级赛区组织管理工作的通知》的颁发，我国数学竞赛活动基本形成了“省级预赛→全国高中数学联赛→中国数学奥林匹克（冬令营）→中国数学奥林匹克国家集训队→国际数学奥林匹克中国国家队”的一整套选拔模式。

在这样的一个选拔机制下，一个优秀的同学要脱颖而出，必须“过五关，斩六将”，这就使得一个系统、有效的训练显得尤为必要。《数学竞赛之窗》杂志作为一个专业的数学竞赛类杂志，在每期杂志上都会有一系列讲座和训练题，但是这些对于一个要准备全国高中数学联赛和冬令营的同学来说，那是远远不够的，为此，我刊特组织了本刊专家委员会的一些专家和中国奥数教学联盟学校的一些一线辅导老师编写了本套丛书。

本丛书的编写过程中，我们引用了大量的国内外数学竞赛试题，这里对这些赛题的命题老师表示感谢；我们同时参考了大量的文章和研究资料，引用了一些解题成果，部分成果我们在书中作了说明，对这些成果的发表人表示感谢。《数学竞赛之窗》专家指导委员会的专家们对本丛书提出了很多建设性的意见，在此表示感谢。

本丛书分为四册，分别是《高中数学省级预赛指南》、《高中数学竞赛真题评析》、《全国高中数学联赛冲刺》和《数学竞赛思维方法指导》。本丛书在构思和编写过程中，着重各项竞赛的针对性，既有知识和方法的系统介绍，又有竞赛真题

的展示；既有对最新经典试题的评析，又有最新的模拟训练，使得广大同学可以作为一个系统训练教材使用。

《高中数学省级预赛指南》内容分为两部分：第一部分在2007年度全国各省、市、自治区的预赛试题和省市数学竞赛中精选出了18套试题，并对每个问题加以详细的分析解答（包括选择和填空），第二部分按照各地省级预赛的模式配备5套预赛模拟试题，该模拟题试题大部分为自编或改编试题，具有良好的测试功能。本册供参加预赛的学生使用。

《高中数学竞赛真题评析》对2007年度国内外一些大型竞赛的试题进行分类评析。具体分为五大板块：不等式问题评析，代数问题评析，数论问题评析，平面几何问题评析，组合问题评析。所选试题涵盖东南竞赛、女子竞赛、西部竞赛、冬令营、中国国家队选拔考试以及国际数学奥林匹克、香港地区、美国、俄罗斯、日本、韩国、英国、保加利亚、罗马尼亚、越南、加拿大、亚太地区、巴尔干地区、伊朗等试题质量较高的数学竞赛。在全书的最后，附上了各项竞赛的完整索引。本册供参加全国高中联赛加试、冬令营、集训队的学生使用。

《全国高中数学联赛冲刺》内容分为三部分，第一部分是对最近两年联赛试题的评析，并对未来的联赛做一个展望和预测，第二部分是联赛模拟训练题，第三部分是联赛训练题的详细解答。本册适合作为全国联赛前的强化训练。

《数学竞赛思维方法指导》内容分为两个部分，第一部分是高中数学联赛专题讲座，对联赛中的重点内容，做专题辅导，并在每讲之后配备相应的练习题，供测试每讲的学习效果。第二部分是数学奥林匹克解题思想方法和技巧，着重讲解数学竞赛中的一些常用思想方法以及数学奥林匹克解题技巧。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，欢迎读者批评指正。

参与本分册编写工作的有福建教育学院林常教授、南京大学满涛博士，以及羊明亮（湖南）、黎金传、祁志红（江西）、顾滨（上海）、张欣然（湖北）、党效文（陕西）、朱士军（安徽）、王强芳（广西）等高级教练员。本刊编辑部王卫华老师对全书进行了统稿。

《数学竞赛之窗》编辑部

2008年1月

目　　录

一、各省市预赛试题精选

2007 年北京市中学生数学竞赛高一年级试题

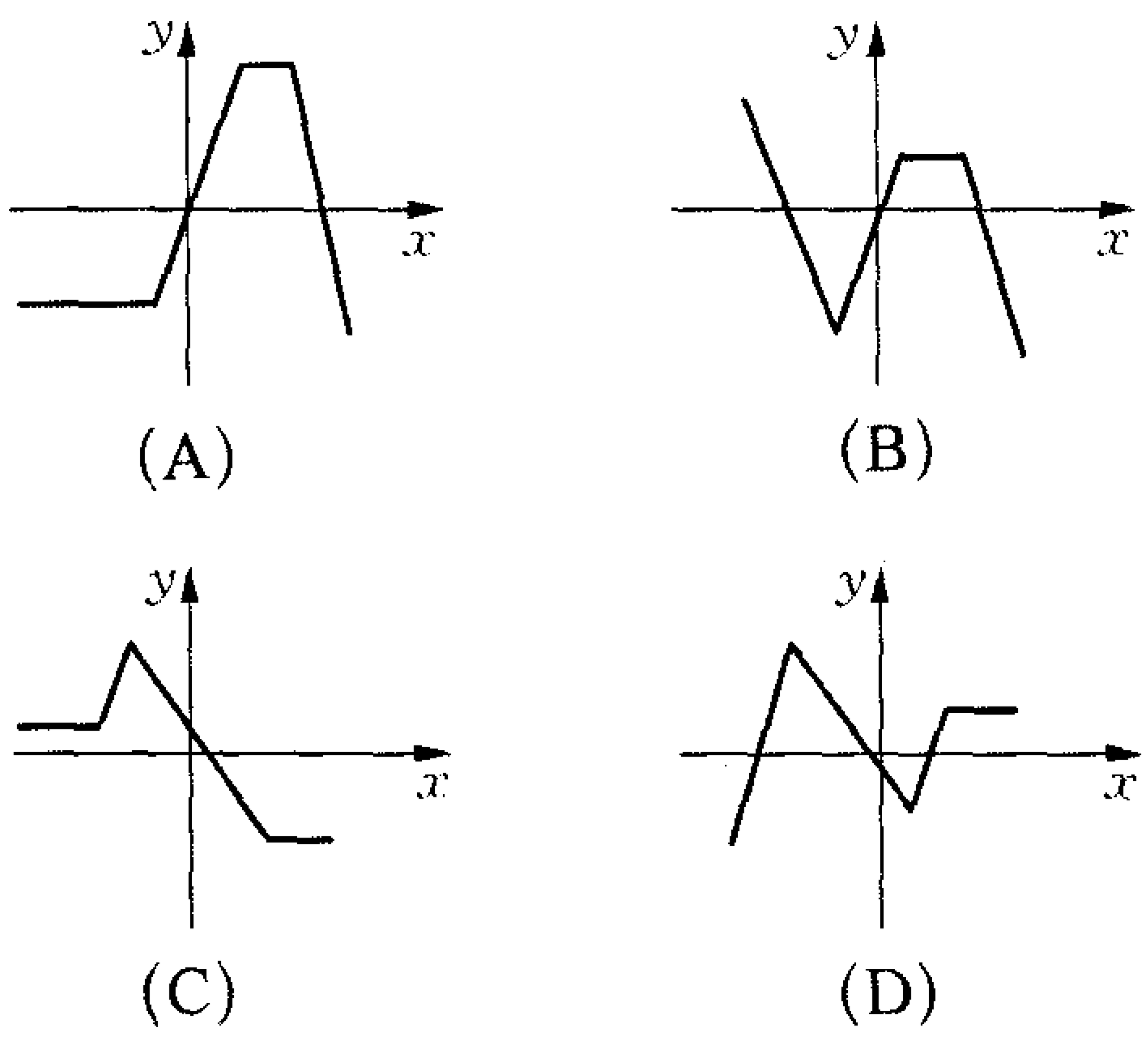
一、选择题(满分 25 分)

1. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则 $f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)+f(\sin\pi)+f\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$ ( )

A. -0.5　　B. 0

C. 0.5　　D. 1

2. 函数 $y=|k_1x+b_1|+|k_2x+b_2|-|k_3x+b_3|$(其中 k_1, k_2, k_3 为正常数,b_1, b_2, b_3 均为非零常数) 的图象可能是 ( )



3. 若 O 是三角形 ABC 内一点,满足 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$,则点 O是三角形ABC 的 ( )

A. 垂心　　B. 内心

C. 重心　　D. 外心

4. 若 $f(x)=(k-1)x^2+2kx+2\,007$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,则在$(-\infty,2\,007)$ 上 ( )

A. $f(x)$是增函数

B. $f(x)$是减函数

C. $f(x)$先减后增

D. $f(x)$先增后减

5. 在三角形 ABC 中,如果 $ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B=c^2$,其中 a, b, c 表示三角形的边,A, B, C 分别表示它们的对角,则三角形 ABC 的面积是 ( )

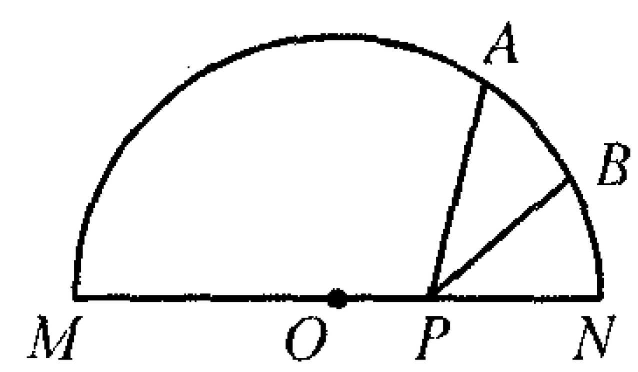
A. $\frac{1}{2}ab$　　B. $\frac{1}{2}bc$

C. $\frac{1}{2}ca$　　D. $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

二、填空题(满分 35 分)

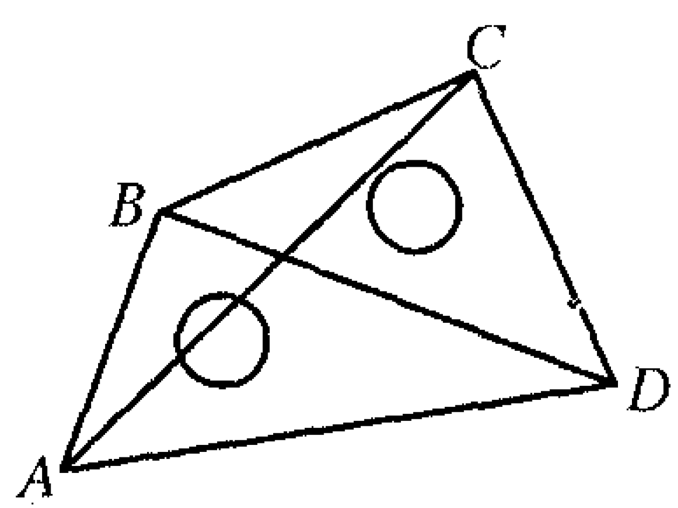
6. 已知 $a>1$, $b>1$, $c>1$,则$\log_a b+2\log_b c+4\log_c a$ 的最小值是________.

7. 如图,MN 是半圆 O 的直径,A 是半圆的一个三等分点,B 是 $\overset{\frown}{AN}$ 的中点. P 是直径 MN 上的点,若 $AP+PB$ 的最小值等于 $2\sqrt{2}$厘米. 则半圆 O 的面积是______平方厘米.



8. 一个等差数列的首项为非零实数 a,且对每个正整数 n,数列的前 n 项和都等于 an^2. 则这个数列的公差等于________.

9. 将一副三角板如图所示恰拼为一个四边形 $ABCD$(其中 $\angle CBD=\angle CDB=45°$,$\angle BAD=2\angle BDA=60°$),设对角线 CA 与边 CB 所成的角记为 θ,则 $\tan\theta=$________.

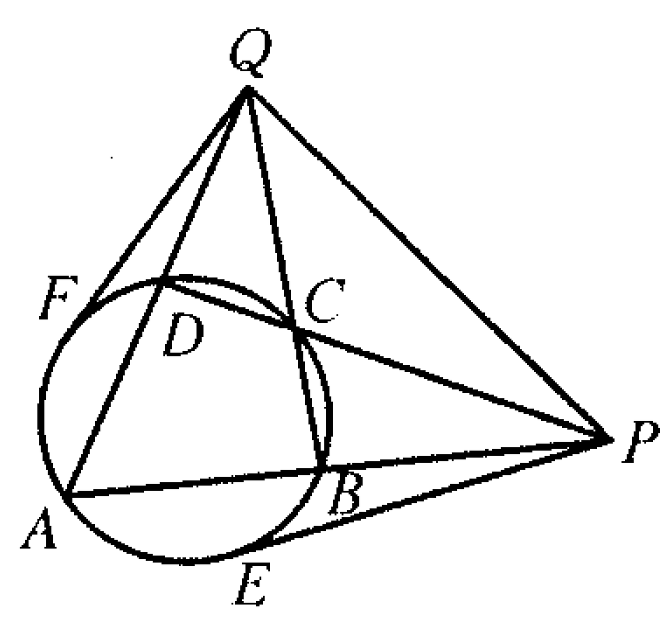


10. 在一张平面上画了 2 007 条互不重合的直线 l_1, l_2, $\cdots$, $l_{2\,007}$,始终遵循垂直、平行交替的规则进行:$l_2\perp l_1$, $l_3\,/\!/\,l_2$, $l_4\perp l_3$, $l_5\,/\!/\,l_4$,$\cdots$. 这 2 007 条互不重合的直线共有________个交点.

三、解答题

11.（满分 15 分）已知一次函数 $f(x)=ax+b$ 对任意的 x，$y\in[0,1]$ 都满足 $|f(x)+f(y)-xy|\leqslant\frac{1}{4}$，试确定这样的 $f(x)$.

12.（满分 10 分）如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB，DC 的延长线交于点 P，另一组对边 AD，BC 的延长线交于点 Q，自 P，Q 分别作该圆的切线 PE，QF，其中 E，F 是切点，连接 PQ. 求证：以线段 PE，QF，PQ 为边构成的三角形是直角三角形.



13.（满分 15 分）已知实数序列 x_0，x_1，x_2，…，x_n，…的构成规律由递推关系给出：$x_0=5$，$x_n=x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

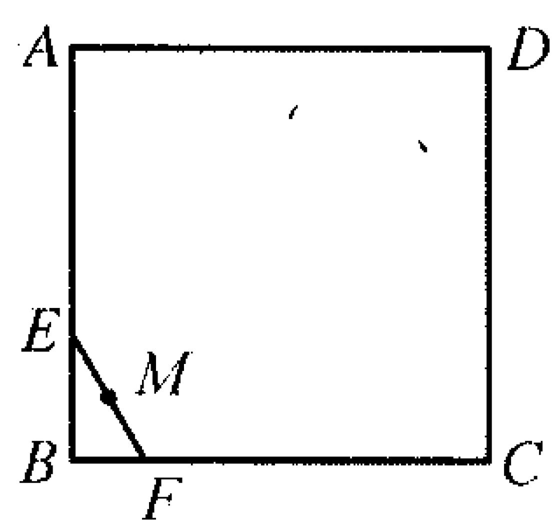
求证：$45<x_{1000}<45.1$.

2007 年上海市高中数学竞赛(新知杯)试题

一、填空题(本题满分 60 分,前 4 题每小题 7 分,后 4 小题每小题 8 分)

1. 方程 $\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$ 的实数解 $(x_1, x_2, x_3)=$ ________.

2. 如图,有一条长度为 1 的线段 EF,其端点 E, F 在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的四边上滑动,当 EF 绕着正方形的四边滑动一周时,EF 的中点 M 所形成的轨迹的长是________.



3. 复数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_n=a_{n-1}^2+\mathrm{i}$ ($n\geqslant 2$, i 为虚数单位),则它的前 2 007 项的和为________.

4. 已知 $\alpha-l-\beta$ 是大小为 45° 二面角,C 为二面角内一定点,且到半平面 α 和 β 的距离分别为 $\sqrt{2}$ 和 6,A, B 分别是半平面 α, β 内的动点,则 $\triangle ABC$ 周长的最小值为________.

5. 已知平面直角坐标系中点与点的对应法则 f: $P(m, n)\rightarrow P'(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ ($m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$). 若一段曲线在对应法则 f 下对应椭圆的一段弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$),则这段曲线的方程是________.

6. 已知 $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}$,计算:$f(1)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(2n-1)=$ ________.

7. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ ($n\geqslant 3$),则数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_n=$ ________.

8. 已知圆 M: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$,过 x 轴上的点 $P(a, 0)$ 存在圆 M 的割线 PBA,使得 $PA=BA$,则点 P 的横坐标 a 的取值范围是________.

二、解答题

9. (本题满分 14 分)

对任意正整数 n,用 $S(n)$ 表示满足不定方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 的正整数对 $\{x, y\}$ 的个数,例如,满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 的正整数对有 $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(3, 6)$ 三个,则 $S(2)=3$.

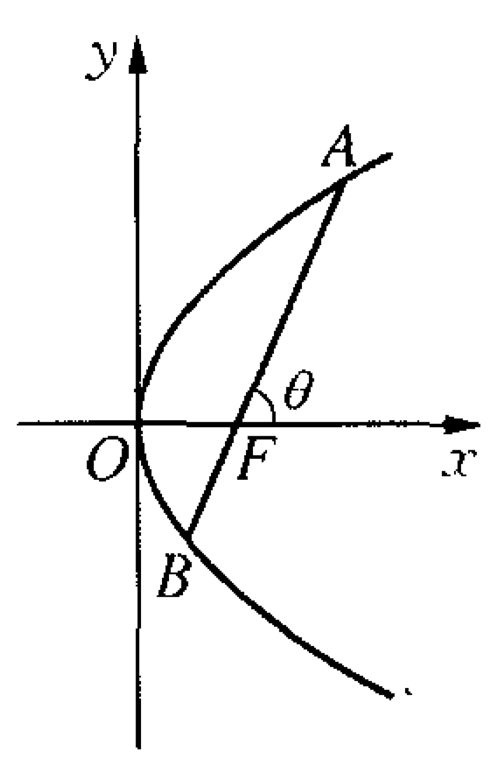
求出使得 $S(n)=2\,007$ 的所有正整数 n.

10.（本题满分 14 分）

已知关于 x 的方程 $x^3\sin\theta-(\sin\theta+2)x^2+6x-4=0$ 有三个正实根，求 $u=\dfrac{9\sin^2\theta-4\sin\theta+3}{(1-\cos\theta)(2\cos\theta-6\sin\theta-3\sin 2\theta+2)}$ 的最小值.

11.（本题满分 16 分）

如图，已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$，AB 是过焦点 F 的弦，如果 AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\angle AOB$.



12.（本题满分 16 分）

求满足如下条件的最小正整数 n：在圆周上任取 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得在 C_n^2 个角 $\angle A_iOA_j\,(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 中，至少有 2 007 个不超过 $120°$.

2007 年全国高中数学联赛河南省预赛试题

一、选择题（本题满分 30 分，每小题 5 分）

1. 已知 $7\sin\alpha + 24\cos\alpha = 25$，则 $\tan\alpha =$ （　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{24}{7}$　　D. $\frac{7}{24}$

2. 设 $f(n)$ 为正整数 n（十进制）的各数位上的数字的平方之和，比如 $f(123) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$. 记 $f_1(n) = f(n)$，$f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$，$k = 1, 2, 3 \cdots$，则 $f_{2\,007}(2\,007) =$ （　　）

A. 20　　B. 4

C. 145　　D. 42

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c，$\tan A = \frac{1}{2}$，$\cos B = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. 若 $\triangle ABC$ 最长的边为 1，则最短边的长为 （　　）

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. 凸四边形 $ABCD$ 中 $AB = \sqrt{3}$，$BC = CD = DA = 1$，设 S 和 T 分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积，则 $S^2 + T^2$ 的最大值是 （　　）

A. $\frac{8}{7}$　　B. 1

C. $\frac{7}{8}$　　D. 2

5. 直角三角形的三个内角的正弦值成等比数列，则该三角形的最小角等于 （　　）

A. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\arccos\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

6. 在正 2 008 边形中，与所有边均不平行的对角线的条数为 （　　）

A. 2 008

B. $1\,004^2$

C. $1\,004^2 - 1\,004$

D. $1\,004^2 - 1\,003$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在题中的横线上）

7. 抛物线 $y^2 = 2x$ 上一点到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离的最小值为________.

8. 已知方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = M$ 在 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ 上有两个不同的解，则 M 的取值范围是________.

9. 设 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(0, 1)$，点 P 是线段 AB 上的一个动点，$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} \geqslant \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，则实数 λ 的取值范围是________.

10. 已知 n 是整数，且方程 $(n+1)^2x^2 - 5n(n+1)x + (6n^2 - n - 1) = 0$ $(n \neq -1)$ 有两个整数根，则 $n =$ ________.

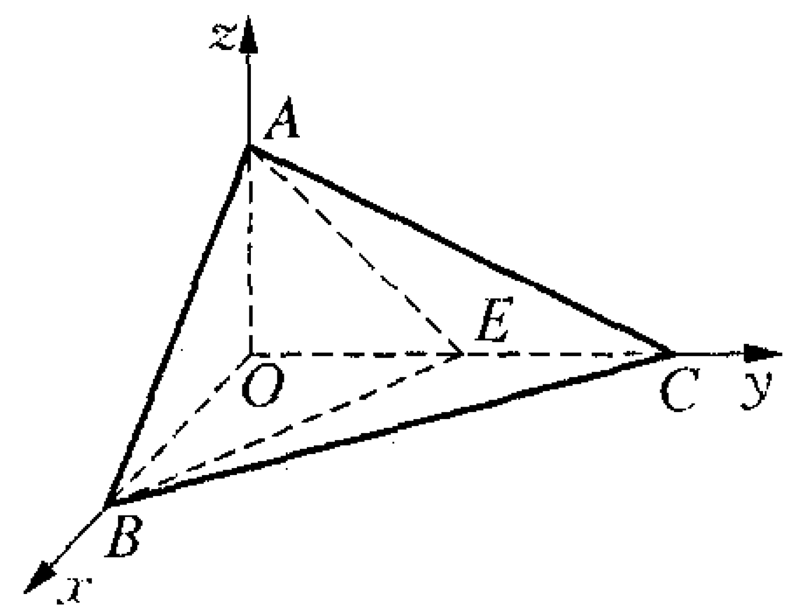
11. 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$|AB| = 2$，$|AC| = 1$，$\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$. 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$，若 $\overrightarrow{AO} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$，则 $\lambda_1 + \lambda_2 =$ ________.

12. 设 a，b 都是正实数，则 $\frac{a^3 + b^3 + 4}{(a+1)(b+1)}$ 的最小值等于________.

三、解答题（本题有 4 小题，每题 20 分）

13.（本小题满分 20 分）

如图，已知三棱锥 $O-ABC$ 的侧棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA=1$，$OB=OC=2$，E 是 OC 的中点.（1）求 O 点到面 ABC 的距离；（2）求异面直线 BE 与 AC 所成的角；（3）求二面角 $E-AB-C$ 的大小.



14.（本小题满分 20 分）

设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，其前 n 项和为 S_n，并且对所有自然数 n，都有 $S_n=\frac{3n+1}{2}-\frac{n}{2}a_n$.

（1）写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（写出推证过程）；

（3）令 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

15.（本小题满分 20 分）

已知抛物线 $x^2=4y$ 及定点 $P(0,8)$，A、B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

（1）证明点 M 的纵坐标为定值；

（2）是否存在定点 Q，使得无论 AB 怎样运动，都有 $\angle AQP=\angle BQP$，证明你的回答.

16.（本小题满分 20 分）

已知偶函数 $f(x)=5\cos\theta\sin x-5\sin(x-\theta)+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$ 的最小值为 -6.

（1）求 $f(x)$ 的最大值和此时的 x 的集合；

（2）设函数 $g(x)=\lambda f(\tilde{\omega}x)-f\left(\tilde{\omega}x+\frac{\pi}{2}\right)$，其中 $\lambda>0$，$\tilde{\omega}>0$. 已知 $y=g(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取最小值并且点 $\left(\frac{2\pi}{3},3-3\lambda\right)$ 是其图象的一个对称中心，试求 $\lambda+\tilde{\omega}$ 的最小值.

2007 年河北省高中数学竞赛试题

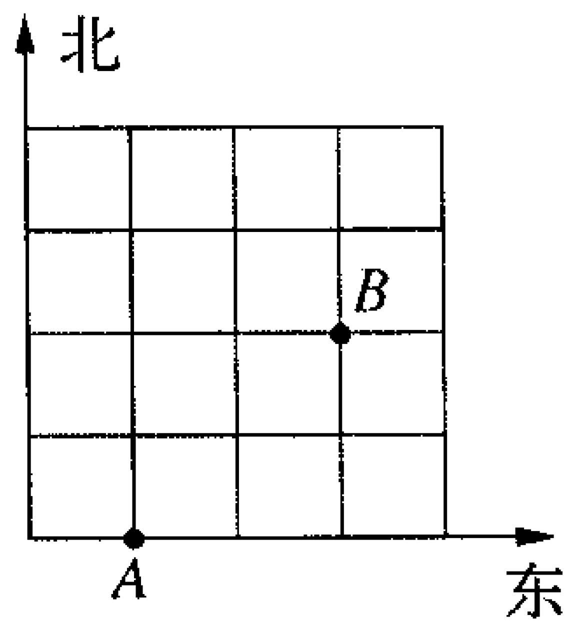
一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,满分 36 分)

1. 非零向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,若点 B 关于$\overrightarrow{OA}$ 所在直线的对称点为 B_1,则向量$\overrightarrow{OB_1}$ 为 ( )

A. $\dfrac{2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}-\boldsymbol{b}$　　B. $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

C. $\dfrac{2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}$　　D. $\dfrac{2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$

2. 如图,路口 B 在路口 A 的东北方向.某人从路口 A 出发,每到一个十字路口都要做一次选择,要么向东走,要么向北走.假设他在每个十字路口选择向东走的概率均为 $\frac{1}{2}$,那么他经过四次选择可以到达 B 处的概率为 ( )



A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{16}$

3. 满足 $a>b>9$,且使得 ab, $\frac{b}{a}$, $a-b$, $a+b$ 可以按某一次序排成等比数列的实数对 (a, b) 的个数为 ( )

A. 0 个　　B. 恰有一个

C. 恰有两个　　D. 不少于三个

4. 以点(1, 1)为焦点,以直线 $6x+8y+1=0$, $3x+4y-9=0$ 为准线的椭圆的离心率 e 满足 ( )

A. $0<e\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$

C. $1<e\leqslant\sqrt{2}$　　D. 以上答案都不对

5. 在四个函数① $f(x)=x^3$、② $f(x)=1-x^2$、③ $f(x)=|\tan x|\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$、④ $f(x)=2x+1$ 中,满足条件 $f\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right)\geqslant\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(y)$ 的函数有______ 个. ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知 $x, y, z\geqslant0$,且 $x+y+z=1$.设 $u=(z-x)(z-y)$,则 ( )

A. u 无最小值,有最大值 1

B. u 有最小值 $-\frac{1}{8}$,无最大值

C. u 有最小值 $-\frac{1}{8}$,有最大值 1

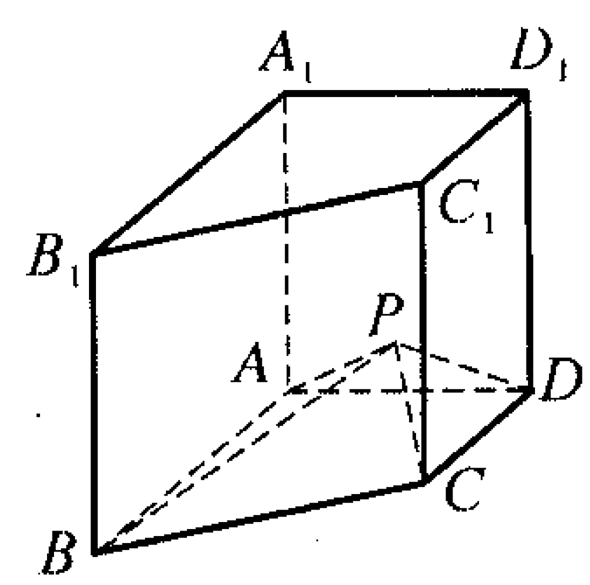
D. u 既无最小值,也无最大值

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,满分 36 分)

7. 在平面直角坐标系中,O 为原点,α 是终边在第一象限的角,P 是 α 终边与单位圆的交点,由点 P 分别向 y 轴、x 轴作垂线,垂足是 A、B,若 $\sin 2\alpha=\frac{17}{18}$,则矩形 $OAPB$ 的面积是______.

8. 同时抛掷两枚骰子,如果至少有一枚出现 5 点或 6 点,就称这次抛掷为“好点”,连续抛掷 180 次,那么出现“好点”的数学期望为______.

9. 如图,在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AD\perp AB$, $AD\perp CD$, $AB=AA_1=$



$2AD=2CD=12$，点P在矩形AA_1D_1D内，满足$\angle APB=\angle DPC$，则$\triangle APD$的面积的最大值为________.

10. 不等式$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-2x-3)>x^2-2x-9$的解集为________________.

11. 已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(0,3)$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$，点P坐标为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 若$Q$为$\triangle ABC$的边界上一点，且折线$BP$，$PQ$将$\triangle ABC$的面积分成相等的两部分，则$Q$的坐标为________.

12. 设f是$\mathbf{N}^+$到$\mathbf{N}^+$的函数，定义$f(n)$如下：

$$f(n)=\begin{cases}n-5,\ n>2\,007\\ f(f(n+10)),\ n\leqslant 2\,007\end{cases}$$

则$f(1)$的值为________________.

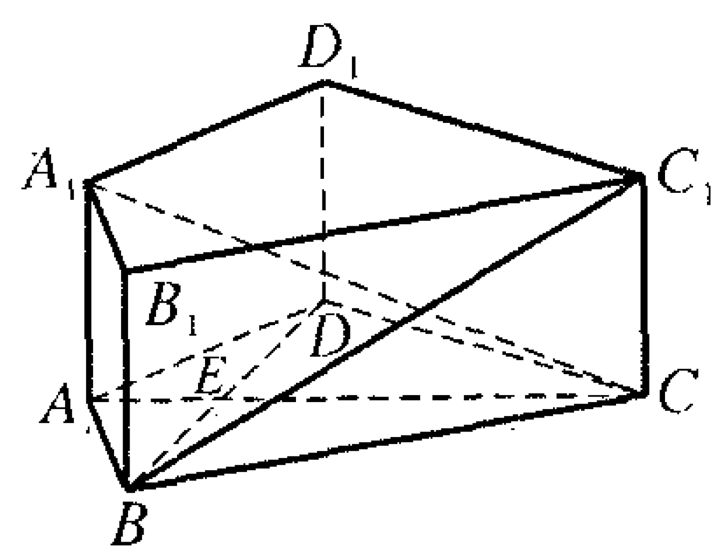
三、解答题（每题的解答均要求有推理过程，本大题共5小题，第17小题18分，其余每小题各15分，满分78分）

13. 如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2$，$DC=2\sqrt{3}$，$AA_1=\sqrt{3}$，$AD\perp DC$，$AC\perp BD$，垂足为E.

（1）求证：$BD\perp A_1C$；

（2）求二面角A_1-BD-C_1的大小；

（3）求异面直线AD与BC_1所成角的大小.



14. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_1=1$，$b_1=-1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{nb_{n+1}}{n+1}$，$b_n=b_{n+1}(1-(2na_n)^2)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求a_n和b_n的通项公式；

（2）若不等式$(1+a_1)(1+2a_2)\cdots(1+na_n)\geqslant\frac{m}{\sqrt{b_2b_3\cdots b_{n+1}}}$对所有$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$m$的取值范围.

15. 若x，y，z为正实数，且$xy+yz+zx=1$.

求证：$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{y+\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{z+\sqrt{1+z^2}}\leqslant 1$.

16. 过抛物线 $y^2=12x$ 的焦点 F，作与 x 轴不垂直的直线 l 交抛物线于 M，N 两点，线段 MN 的垂直平分线(垂足为 Q) 交 x 轴于 R 点.

(1) 求 QR 中点的轨迹 L 的方程；

(2) 证明：L 上有无穷多个整点(横、纵坐标均为整数的点)，且 L 上任意整点到原点的距离均不为整数.

17. 定义函数 $f_n(x)=(1+x)^n-1$，$x>-2$，$n\in\mathbf{N}^*$. 问是否存在区间 $[a, b]\subseteq(-\infty, 0]$，使函数 $h(x)=f_3(x)-f_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[ka, kb]$？若存在，求出最小的 k 值及相应的区间 $[a, b]$，若不存在，请说明理由.

2007年全国高中数学联赛甘肃省预赛试题

一、选择题(本题满分36分,每小题6分)

1. $\triangle ABC$ 中 $\lg\sin A-\lg\cos B-\lg\sin C=\lg 2$,那么 $\triangle ABC$ 一定是 ( )

A. 等腰三角形　B. 等边三角形

C. 直角三角形　D. 形状不确定

2. 若四面体 $ABCD$ 中,有 $AB=CD=5$, $AC=BD=4$, $AD=BC=x$,则 x 的取值范围为 ( )

A. $1<x<9$　B. $1<x<\sqrt{41}$

C. $3<x<9$　D. $3<x<\sqrt{41}$

3. 设 $E_iF_i(i=1,2,3,4)$ 是平行于梯形上、下底且端点在梯形腰上的线段,若 E_1F_1 分梯形为等积的两部分,E_2F_2 为梯形的中位线,E_3F_3 分梯形为两相似图形,E_4F_4 过梯形两对角线的交点,则它们的大小关系为 ( )

A. $E_1F_1\leqslant E_2F_2\leqslant E_4F_4\leqslant E_3F_3$

B. $E_4F_4\leqslant E_3F_3\leqslant E_2F_2\leqslant E_1F_1$

C. $E_2F_2\leqslant E_1F_1\leqslant E_4F_4\leqslant E_3F_3$

D. $E_1F_1\leqslant E_4F_4\leqslant E_3F_3\leqslant E_2F_2$

4. 已知 $x, y\geqslant 1$ 且 $\sqrt[n]{x-1}+\sqrt[n]{y-1}\leqslant 2$,则 ( )

A. $x\geqslant y$　B. $x\leqslant y$

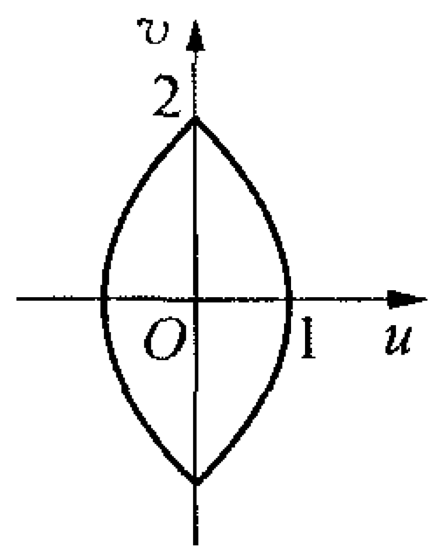
C. $x+y\geqslant xy$　D. $x+y\leqslant xy$

5. 设 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$,映射 $f: A\to B$ 满足:对任意的 $x\in A$, $x+f(x)+xf^2(x)$ 为奇数,则这样的映射的个数为 ( )

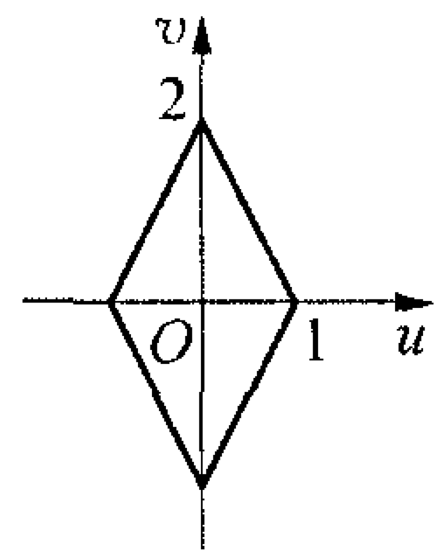
A. 80　B. 100

C. 250　D. 625

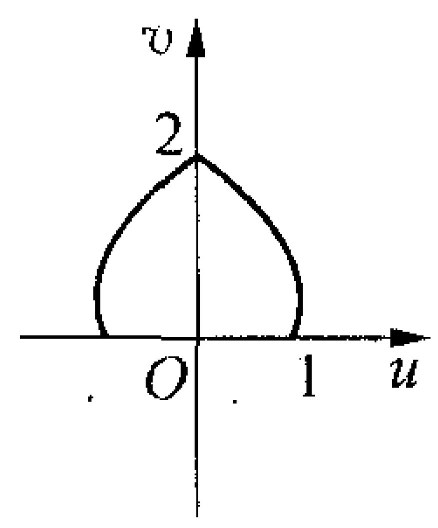
6. 设 $ABCD$ 为 xy 平面的一个正方形,其顶点是 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$. $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ 是 xy 平面到 uv 平面的变换,则正方形 $ABCD$ 的像点集是 ( )



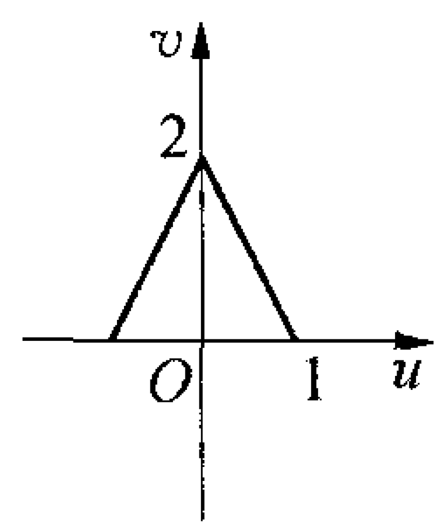
(A)



(B)



(C)



(D)

二、填空题(本题满分54分,每小题9分)

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n=0$,则 $a_{2008}=$________.

8. 方程 $1!+2!+\cdots+x!=y^2$ 的所有正整数解是________.

9. 设 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ (n 为正整数),则 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{3\left[\frac{2n}{3}\right]}$ (其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分)的值为________.

10. 已知 $2<\dfrac{A_{n+1}^5}{A_{n-1}^3}\leqslant 42$,则 n 的值为________.

11. 以一个正六棱柱的顶点为顶点的四面体共有________个.

12. 设二次函数 $f(x)$ 的首项系数为正,且满足等式 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, $x\in\mathbf{R}$,则不等式 $f(\arcsin|x|)<f(\arccos|x|)$ 解集是________.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 已知 $\tan(\alpha+\beta-\gamma)\tan\beta=\tan(\alpha-\beta+\gamma)\tan\gamma$，求证 $\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos\alpha}=-1$.

14. 方程 $\cos 2x-4a\cos x-a+2=0$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$有两个不同的解，试求 a 的取值范围.

15. 有一个由 0 和 1 构成的 6 行 n 列的数字阵，其中每行中恰有 5 个 1，任意两行中同一列都取 1 的列数不超过 2，求 n 的最小值.